



МАТЭМАТЫКА

УДК 512.542

О σ -ЛОКАЛЬНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ КЛАССОВ ФИТТИНГА И ФОРМАЦИЙ

Чжао Цзыжуй*, С.Н. Воробьев**, Д.А. Китаров**, А.П. Мехович**

*Школа науки университета Цзяннань (КНР)

**Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В работе рассматриваются только конечные группы. Классом Фиттинга называют класс групп $\mathcal{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathcal{F}$ -подгрупп, формацией – такой класс групп $\mathcal{F}$, который замкнут относительно факторгрупп и подпрямых произведений.

Цель статьи – доказать, что произведение σ -локальных классов Фиттинга является σ -локальным классом Фиттинга и произведение σ -локальных формаций – σ -локальной формацией.

Материал и методы. Материал для исследования – произведения σ -локальных классов Фиттинга и формаций. Авторами использованы терминология и методы абстрактной теории групп и теории классов групп, в частности, теории классов Фиттинга.

Результаты и их обсуждение. Пусть σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$, $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$, для всех $i \neq j$. Класс Фиттинга $\mathcal{F}$ называется σ -локальным, если $\mathcal{F} = \mathfrak{F}_\Pi \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} f(\sigma_i) \mathfrak{F}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_i'})$ для некоторой функции $f: \sigma \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$, $\Pi = \{\sigma_i : f(\sigma_i) \neq \emptyset\}$, $\mathfrak{F}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{F}_{\sigma_i'}$ – классы всех σ_i -групп и σ_i' -групп соответственно. Формация $\mathcal{F}$ называется σ -локальной, если $\mathcal{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{F}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_i'} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{F}_\Pi$ для некоторой формационной σ -функции $\sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$. В настоящей работе получены результаты о построении σ -локальных произведений классов Фиттинга и формаций. В частности, альтернативные доказательства теорем о том, что произведение σ -локальных классов Фиттинга (σ -локальных формаций) является σ -локальным классом Фиттинга (σ -локальной формацией).

Заключение. Описаны σ -локальные произведения классов Фиттинга и формаций. В частности, получены альтернативные доказательства теорем о том, что произведение σ -локальных классов Фиттинга (σ -локальных формаций) является σ -локальным классом Фиттинга (σ -локальной формацией).

Ключевые слова: класс Фиттинга, формация, σ -локальный класс Фиттинга, σ -локальная формация, произведение σ -локальных классов Фиттинга, произведение σ -локальных формаций.

ON σ -LOCAL PRODUCTS OF FITTING CLASSES AND FORMATIONS

Zhao Zirui*, S.N. Vorobyev**, D.A. Kitarov**, A.P. Mekhovich**

*University School of Science (CPR)

**Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

Only finite groups are considered. A Fitting class is a class of $\mathfrak{F}$ groups closed under taking normal subgroups and products of normal $\mathfrak{F}$ -subgroups. A formation is a class of $\mathfrak{F}$ groups which is closed under taking factor groups and subdirect products.

The purpose of the paper is to prove that the product of σ -local Fitting classes is a σ -local Fitting class and the product of σ -local formations is a σ -local formation.

Material and methods. The material for the study is products of σ -local Fitting classes and formations. In the research we have used terminology and methods of abstract group theory and the theory of classes of groups, in particular the theory of Fitting classes.

Findings and their discussion. Let σ be some partition of $\mathbb{P}$, that is $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$, $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$, for all $i \neq j$. A Fitting class $\mathfrak{F}$ is called σ -local, if $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\Pi \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} f(\sigma_i) \mathfrak{F}_{\sigma_i'})$ for some function $f: \sigma \rightarrow \{\text{Fitting classes}\}$, $\Pi = \{\sigma_i : f(\sigma_i) \neq \emptyset\}$, $\mathfrak{F}_{\sigma_i}$ and $\mathfrak{F}_{\sigma_i'}$ – for all classes σ_i -groups and σ_i' -groups respectively. Formation $\mathfrak{F}$ is called σ -local if $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{F}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_i'} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{F}_\Pi$ for some formation σ -function $\sigma \rightarrow \{\text{formations of groups}\}$. In the present paper we obtain results on the construction of σ -local products of Fitting classes and formations. In particular, alternative proofs of the theorem that the product of σ -local Fitting classes (σ -local formations) is a σ -local Fitting class (σ -local formation) are obtained.

Conclusion. In the paper we have described σ -local products of Fitting classes and formations. In particular, we have received alternative proofs of the theorem that the product of σ -local Fitting classes (σ -local formations) is a σ -local Fitting class (σ -local formation).

Key words: Fitting class, formation, σ -local Fitting class, σ -local formation, product of σ -local Fitting classes, product of σ -local formations.

В работе рассматриваются только конечные группы. Совокупность групп $\mathfrak{X}$ называют классом групп [1, определение II, (1.1)], если $\mathfrak{X}$ содержит вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G .

Одна из важных задач теории классов групп состоит в нахождении различных типов алгебр классов. В этом направлении исследований ключевым моментом является изучение произведений классов групп, среди которых наиболее известны своими приложениями фиттинговые и формационные произведения.

Классом Фиттинга [1, определение II, (2.8) (а)] называют класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то для любой группы G существует наибольшая из нормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп G . Ее называют $\mathfrak{F}$ -радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Напомним, что формацией называется такой класс групп $\mathfrak{F}$, который замкнут относительно факторгрупп и подпрямых произведений [1, определение II, (2.2)]. Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то для любой группы G существует наименьшая нормальная подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ такая, что $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Ее называют $\mathfrak{F}$ -корадикалом G .

Произведением $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ двух классов групп $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ обозначают класс всех групп G такой, что G имеет нормальную $\mathfrak{F}$ -подгруппу N с факторгруппой $G/N \in \mathfrak{H}$.

Класс групп $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H} = (G: G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ называется произведением классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$.

Если класс $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = (G: G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ для формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ – произведение формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$.

Хорошо известно, что если класс $\mathfrak{F}$ замкнут относительно произведений нормальных подгрупп и класс $\mathfrak{H}$ замкнут относительно гомоморфных образов, тогда $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ [1, с. 388 и 566] и произведение двух классов Фиттинга (соответственно произведение двух формаций) – это класс Фиттинга (формация) и произведение классов Фиттинга (формаций) удовлетворяет ассоциативному закону [1, IV, теорема 1.8 и IX, теорема 1.12].

В теории классов групп основными объектами исследований являются произведения локальных классов Фиттинга и локальных формаций. В работах [2; 3] были получены основополагающие

результаты о том, что произведение двух любых локальных классов Фиттинга является локальным классом Фиттинга и произведение двух любых локальных формаций – локальная формация.

В работах А.Н. Скибы [4–6] был предложен оригинальный метод исследования групп и алгебр классов групп, определяемых локально при помощи разбиений множества всех простых чисел. Позднее в работах [7; 8] указанные выше результаты о произведениях локальных классов Фиттинга и формаций были расширены на случай так называемых σ -локальных классов Фиттинга и σ -локальных формаций (теорема 1.2 [7] и теорема 1.14 [8]). Пусть σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{ \sigma_i : i \in I \}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$, $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$, для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{ \sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset \}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Если $\mathfrak{X}$ – класс групп, то $\sigma(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X}} \sigma(G)$. Назовем любую функцию f вида $f: \sigma \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$ σ -функцией Хартли или просто H_σ -функцией. Пусть $\Pi = \text{Supp}(f) = \{ \sigma_i : f(\sigma_i) \neq \emptyset \}$ – носитель H_σ -функции f . Тогда

$$LR_\sigma(f) = \mathfrak{C}_\Pi \cap \left(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} f(\sigma_i) \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{C}_{\sigma'_i} \right)$$

– это класс Фиттинга. Учитывая утверждение 3 леммы 3.1 [7], класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ будем в дальнейшем называть σ -локальным, если существует H_σ -функция f такая, что $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$.

Любую функцию f вида $f: \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ называют формационной σ -функцией [8]. Пусть $\Pi = \text{Supp}(f) = \{ \sigma_i : f(\sigma_i) \neq \emptyset \}$ – носитель формационной σ -функции. Тогда

$$LF_\sigma(f) = \left(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{C}_{\sigma'_i} \mathfrak{C}_{\sigma_i} f(\sigma_i) \right) \cap \mathfrak{C}_\Pi$$

– это формация. Согласно утверждению 2 леммы 2.1 [8], формацию $\mathfrak{F}$ будем называть σ -локальной, если $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ для некоторой формационной σ -функции f .

Указанные выше формульные определения понятий σ -локальности классов Фиттинга и формаций обуславливают задачу нахождения формульных более простых альтернативных доказательств представленных ранее результатов Н.Т. Воробьева, Го Вэньбина, Ли Чжана [7] и Чи Чжана, А.Н. Скибы, В.Г. Сафонова [8]. Решение этой задачи – основная цель настоящей работы.

Материал и методы. Материалом для исследования являются произведения σ -локальных классов Фиттинга и формаций. При исследовании применены терминология, методы абстрактной теории групп и теории классов групп, в частности, теории классов Фиттинга.

Результаты и их обсуждение. Для доказательства основного результата мы будем использовать ряд утверждений, которые приведем в качестве лемм.

Лемма 1 [7, лемма 3.1]. Пусть $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ и $\Pi = \text{Supp}(f)$. Тогда:

- 1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;
- 2) $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G \in f(\sigma_i) \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{C}_{\sigma'_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$;
- 3) $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}_\Pi \cap \left(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} f(\sigma_i) \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{C}_{\sigma'_i} \right)$.

Лемма 2 [2, лемма 1]. Справедливы следующие утверждения:

1) если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $\{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$ – множество классов Фиттинга, то имеет место равенство:

$$\bigcap_{i \in I} (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{F}_i) = \mathfrak{F} \diamond \left(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right);$$

2) если $\{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$ – множество классов Фиттинга и $\mathfrak{H}$ – формация Фиттинга, то справедливо равенство:

$$\bigcap_{i \in I} (\mathfrak{F}_i \diamond \mathfrak{H}) = \left(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) \diamond \mathfrak{H}.$$

Лемма 3 [7, теорема 7.2]. Пересечение любого непустого множества σ -локальных классов Фиттинга является σ -локальным классом Фиттинга.

Лемма 4 [8, лемма 2.1]. Пусть $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ и $\Pi = \text{Supp}(f)$. Тогда:

- 1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;
- 2) $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{C}_{\sigma'_i} \mathfrak{C}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$;
- 3) $\mathfrak{F} = \left(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{C}_{\sigma'_i} \mathfrak{C}_{\sigma_i} f(\sigma_i) \right) \cap \mathfrak{C}_\Pi$.

Непосредственной проверкой легко установить, что справедлива следующая лемма.

Лемма 5. Справедливы следующие утверждения:

1) если $\mathfrak{H}$ – формация и $\{\mathfrak{F}_i: i \in I\}$ – множество формаций, то имеет место равенство:

$$\bigcap_{i \in I} (\mathfrak{F}_i \circ \mathfrak{H}) = (\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i) \circ \mathfrak{H};$$

2) если $\{\mathfrak{H}_i: i \in I\}$ – множество формаций и $\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга, то справедливо равенство:

$$\bigcap_{i \in I} (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}_i) = \mathfrak{F} \circ (\bigcap_{i \in I} \mathfrak{H}_i);$$

3) если $\mathfrak{F}, \mathfrak{H}$ – непустые формации и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{H}}$.

Лемма 6 [8, теорема 1.14]. Пусть $\mathfrak{M} = LF_{\sigma}(m)$, где m – внутренняя формационная σ -функция, $\Pi = \sigma(\mathfrak{M})$ и $\mathfrak{H} = LF_{\sigma}(h)$, где h – внутренняя функция, тогда $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = LF_{\sigma}(f)$, где

$$f(\sigma_i) = \begin{cases} m(\sigma_i) \circ \mathfrak{H}, & \text{если } \sigma_i \in \Pi; \\ h(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \Pi. \end{cases}$$

Определение 1. σ -Локальным произведением классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс Фиттинга $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$, который σ -локален.

Лемма 7. Пусть σ – разбиение множества $\mathbb{P}$, $\sigma_i \subseteq \sigma$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – класс всех σ_i -групп. Тогда $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – σ -локальный класс Фиттинга.

Доказательство. Так как $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – класс всех σ_i -групп. Тогда $\mathfrak{E}_{\sigma_i} = LR_{\sigma}(f)$, где f – внутренняя H_{σ} -функция, $f(\sigma_i) = \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $f(\sigma_j) = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Следовательно, $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – σ -локальный класс Фиттинга. Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_{\sigma_j}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$, $\mathfrak{F} = LR_{\sigma}(f)$ и $\mathfrak{H} = LR_{\sigma}(h)$. Тогда $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ – σ -локальный класс Фиттинга.

Доказательство. Согласно лемме 7 $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – σ -локальные классы Фиттинга. Пусть Π – носитель H_{σ} -функции h . Тогда $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$ по теореме 1.2 [7] установлено, что класс $\mathfrak{M}$ определяется следующей функцией:

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}, & \text{если } \sigma_i \in \Pi; \\ \mathfrak{F}, & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \Pi. \end{cases}$$

Следовательно, класс Фиттинга $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ – σ -локален. Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть σ – разбиение множества $\mathbb{P}$ и $\sigma_i \subseteq \sigma$. Тогда произведение $\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma'_i}$ σ -локально для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Построим H_{σ} -функцию f следующим образом: $f(\sigma_i) = \mathfrak{X} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $f(\sigma_j) = \mathfrak{F}$ для всех $i \neq j$. Тогда класс Фиттинга

$$\begin{aligned} LF_{\sigma}(f) &= \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} f(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma'_i} = \mathfrak{X} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \cap (\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{F} \mathfrak{E}_{\sigma_j} \mathfrak{E}_{\sigma'_j}) = \\ &= \mathfrak{X} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \cap (\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{F} \mathfrak{E}_{\sigma_j} \mathfrak{E}_{\sigma'_j}) = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{F} (\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{E}_{\sigma_j} \mathfrak{E}_{\sigma'_j}) = \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 10. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые классы Фиттинга разрешимых групп, то $\sigma(\mathfrak{F} \mathfrak{H}) = \sigma(\mathfrak{F}) \cup \sigma(\mathfrak{H})$.

Доказательство. Пусть $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F} \mathfrak{H})$. Тогда существует такая группа G из $\mathfrak{F} \mathfrak{H}$, что σ_i делит $|G|$. Очевидно, $|G_{\mathfrak{F}}|$ делит $|G/G_{\mathfrak{F}}| \in \sigma(\mathfrak{F}) \cup \sigma(\mathfrak{H})$. Следовательно, $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) \cup \sigma(\mathfrak{H})$.

Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \mathfrak{H}$, то $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{F} \mathfrak{H})$. Покажем, что $\sigma(\mathfrak{H}) \subseteq \sigma(\mathfrak{F} \mathfrak{H})$. Пусть $q \in \sigma(\mathfrak{H})$. Тогда по теореме X. 4с) [9] $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, циклическая группа Q порядка q принадлежит $\mathfrak{H}$. Если $Q_{\mathfrak{F}} = 1$, то $Q/Q_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$ и $Q \in \mathfrak{F} \mathfrak{H}$. Пусть $Q_{\mathfrak{F}} = Q$. Тогда $Q \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \mathfrak{H}$. Итак, в каждом случае $q \in \sigma(\mathfrak{F} \mathfrak{H})$. Значит, $\sigma(\mathfrak{F}) \cup \sigma(\mathfrak{H}) \subseteq \sigma(\mathfrak{F} \mathfrak{H})$. Лемма доказана.

Теорема 1. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – σ -локальные классы Фиттинга, то их произведение $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ – σ -локальный класс Фиттинга.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – σ -локальные классы Фиттинга с H_{σ} -функциями f и h соответственно. Тогда по утверждению 1 леммы 2 имеет место равенство:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}^*, \quad (2.1)$$

где

$$\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F} \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})} \text{ и } \mathfrak{H}^* = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})} \mathfrak{F} h(\sigma_i) \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{C}_{\sigma'_i}. \quad (2.2)$$

Так как по лемме 9 произведения $\mathfrak{F} h(\sigma_i) \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{C}_{\sigma'_i}$ σ -локально для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$, то по лемме 3 класс Фиттинга $\mathfrak{H}^*$ σ -локальный. Поэтому, учитывая снова лемму 3, для σ -локальности $\mathfrak{F}$ покажем, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$ σ -локален. По утверждению 2 леммы 2 получаем равенство:

$$\mathfrak{F}^* = \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{F})} \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})} \bigcap (\bigcap_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})} f(\sigma_i) \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{C}_{\sigma'_i} \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})}). \quad (2.3)$$

Пусть $x(\sigma_i) = f(\sigma_i) \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{C}_{\sigma'_i}$ и $\mathfrak{X} = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})} x(\sigma_i) \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})}$. Учитывая (2.3) и леммы 3 и 8, для доказательства теоремы теперь остается установить, что класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ σ -локален. Для этого ввиду леммы 3 покажем, что произведения $x(\sigma_i) \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})}$ σ -локальны для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$.

Имеются следующие две возможности:

1) $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$. В этом случае $\mathfrak{C}_{\sigma'_i(\mathfrak{H})} \subseteq \mathfrak{C}_{\sigma'_i}$ и, следовательно, $x(\sigma_i) \mathfrak{C}_{\sigma'_i(\mathfrak{H})} = x(\sigma_i)$. Значит, по лемме 9 $x(\sigma_i) \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})}$ – σ -локальный класс Фиттинга. Остается принять случай

2) $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) \setminus \sigma(\mathfrak{H})$. Но тогда $\mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})} \subseteq \mathfrak{C}_{\sigma'_i}$ и поэтому имеет место равенство:

$$x(\sigma_i) \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})} = x(\sigma_i). \quad (2.4)$$

Теперь класс Фиттинга $x(\sigma_i)$ σ -локален по лемме 9. Теорема доказана.

В случае $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ получаем

Следствие 1 [2]. Произведение локальных классов Фиттинга – локальный класс Фиттинга.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые классы Фиттинга разрешимых групп, причем $\mathfrak{H}$ – σ -локальный класс Фиттинга с H_σ -функцией h . Если $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$, то произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ σ -локально и определяется H_σ -функцией f такой, что $f(\sigma_i) = \mathfrak{F} h(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$.

Доказательство. По утверждению 1 леммы 2

$$\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})} \bigcap (\bigcap_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})} f(\sigma_i) \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{C}_{\sigma'_i}),$$

где $f(\sigma_i) = \mathfrak{F} h(\sigma_i)$ для всех простых $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$. Теперь тот факт, что f определяет $\mathfrak{F}$, вытекает из того, что по лемме 10 $\sigma(\mathfrak{F}\mathfrak{H}) = \sigma(\mathfrak{F}) \cup \sigma(\mathfrak{H})$. Теорема доказана.

В случае $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ получаем

Следствие 2 [2]. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга с H -функцией h , причем $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$, то произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ локально и определяется с H -функцией f такой, что $f(p) = \mathfrak{F} h(p)$ для всех простых $p \in \pi(\mathfrak{H})$.

Символом $l_\sigma \text{Fit} \mathfrak{F}$ будем обозначать σ -локальный класс Фиттинга, порожденный классом Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, $\mathfrak{H}$ – σ -локальный класс Фиттинга, Π – носитель H_σ -функции $\mathfrak{H}$. Если $l_\sigma \text{Fit} \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H})}$, то произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ σ -локально.

Доказательство. По утверждению 1 леммы 2

$$\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})} \bigcap \mathfrak{F}^*, \quad \mathfrak{F}^* = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})} \mathfrak{F} h(\sigma_i) \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{C}_{\sigma'_i}$$

и h – H_σ -функция класса $\mathfrak{H}$. Заметим, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$ локален по леммам 3 и 9. Поэтому, ввиду леммы 3, для доказательства теоремы достаточно установить σ -локальность произведения $\mathfrak{F} \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})}$.

Поскольку $l_\sigma \text{Fit} \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H})}$ и $(l_\sigma \text{Fit} \mathfrak{F}) \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})} \subseteq \mathfrak{F} \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})}$, и поэтому произведение $(l_\sigma \text{Fit} \mathfrak{F}) \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})} = \mathfrak{F} \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})}$ σ -локально по теореме 1. Теорема доказана.

Из теоремы в случае $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ вытекает результат Н.Т. Воробьева, который также приведем в качестве следствия.

Если $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, то $l_\sigma \text{Fit} \mathfrak{F}$ обозначает $l \text{Fit} \mathfrak{F}$ и $l \text{Fit} \mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга, порожденный классом Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Следствие 3 [2]. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, $\mathfrak{H}$ – локальный класс Фиттинга. Если $l \text{Fit} \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{H})}$, то произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ локально.

Определение 2. σ -Локальным произведением формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется формация $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$, которая σ -локальна.

Лемма 11. Пусть σ – разбиение множества $\mathbb{P}$, $\sigma_i \subseteq \sigma$ и $\mathfrak{C}_{\sigma_i}$ – класс всех σ_i -групп. Тогда $\mathfrak{C}_{\sigma_i}$ – σ -локальная формация.

Доказательство. Так как $\mathfrak{C}_{\sigma_i}$ – класс всех σ_i -групп, то $\mathfrak{C}_{\sigma_i} = LF_{\sigma}(f)$, где f – внутренняя H_{σ} -функция, $f(\sigma_i) = \mathfrak{C}_{\sigma_i}$ и $f(\sigma_j) = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Следовательно, $\mathfrak{C}_{\sigma_i}$ – σ -локальная формация. Лемма доказана.

Лемма 12. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{C}_{\sigma_j}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ – σ -локальная формация.

Доказательство. По лемме 11 формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – σ -локальны. Пусть $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f)$ и $\mathfrak{H} = LF_{\sigma}(h)$ и Π – носитель формационной σ -функции h . Тогда по утверждению 1 леммы 4 $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$. Кроме того, по лемме 6 установлено, что класс $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = LF_{\sigma}(m)$ определяется формационной σ -функцией m такой, что

$$m(\sigma_i) = \begin{cases} f(\sigma_i) \circ \mathfrak{H}, & \text{если } \sigma_i \in \Pi; \\ h(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \Pi. \end{cases}$$

Следовательно, $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ – σ -локальная формация. Лемма доказана.

Лемма 13. Пусть σ – разбиение множества $\mathbb{P}$ и $\sigma_i \subseteq \sigma$. Тогда произведение $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{X}$ – σ -локальная формация для любой непустой формации $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Построим формационную σ -функцию f следующим образом: $f(\sigma_i) = \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{X}$ и $f(\sigma_j) = \mathfrak{F}$ для всех $i \neq j$. Тогда σ -локальная формация

$$\begin{aligned} LF_{\sigma}(f) &= \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{C}_{\sigma_i} f(\sigma_i) = \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{X} \bigcap (\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{C}_{\sigma_j} \mathfrak{F}) = \\ &= \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{C}_{\sigma_i} \mathfrak{X} \bigcap (\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{C}_{\sigma_j} \mathfrak{F}) = \mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{F} (\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{C}_{\sigma_j} \mathfrak{F}) = \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 14 [10, лемма 4.2]. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые σ -локальные формации разрешимых групп, то $\sigma(\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}) = \sigma(\mathfrak{F}) \cup \sigma(\mathfrak{H})$.

Лемма 15. Пересечение любого непустого множества σ -локальных формаций является σ -локальной формацией.

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{F}_j : j \in I\}$ – множество формаций и $\mathfrak{F} = \bigcap_{j \in I} \mathfrak{F}_j$. Определим формационную σ -функцию f такую, что $f(\sigma_i) = \bigcap_{j \in I} f_j(\sigma_i)$ для всех $j \in I$ и $\sigma_i \in \sigma$, причем $\mathfrak{F}_j = LF_{\sigma}(f_j)$ для каждого $j \in I$. Покажем, что $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f)$. Пусть $G \in LF_{\sigma}(f)$. Тогда по определению σ -локальной формации следует $G^{f(\sigma_i)} \in \mathfrak{C}_{\sigma_j} \mathfrak{C}_{\sigma_j}$ для всех $j \in I$. Поскольку $f(\sigma_i) \subseteq f_j(\sigma_i)$ для всех $j \in I$ и $\sigma_i \subseteq \sigma$, по утверждению 3 леммы 5 $G^{f_j(\sigma_i)} \trianglelefteq G^{f(\sigma_i)}$. Так как формация $\mathfrak{C}_{\sigma_j} \mathfrak{C}_{\sigma_j}$ является классом Фиттинга, то $G^{f_j(\sigma_i)} \in \mathfrak{C}_{\sigma_j} \mathfrak{C}_{\sigma_j}$. Следовательно, по утверждению 2 леммы 4 $G \in \mathfrak{C}_{\sigma_j} \mathfrak{C}_{\sigma_j} f_j(\sigma_i)$ для всех $j \in I$ и $\sigma_i \in \sigma(G)$ и, значит, $G \in \mathfrak{F}_j = LF_{\sigma}(f_j)$ для каждого $j \in I$. Таким образом, $G \in \bigcap_{j \in I} f_j(\sigma_i) = \mathfrak{F}$ и справедливо включение $LF_{\sigma}(f) \subseteq \mathfrak{F}$.

Докажем обратное включение. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}_j = LF_{\sigma}(f_j)$ для всех $j \in I$. Следовательно, $G^{f(\sigma_i)} \in \mathfrak{C}_{\sigma_j} \mathfrak{C}_{\sigma_j}$ для каждого $j \in I$. Поскольку $\mathfrak{C}_{\sigma_j} \mathfrak{C}_{\sigma_j}$ – класс Фиттинга и $G^{f(\sigma_i)} \trianglelefteq G$, то по определению $\mathfrak{C}_{\sigma_j} \mathfrak{C}_{\sigma_j}$ – радикала группы G следует $G^{f_j(\sigma_i)} \trianglelefteq G_{\mathfrak{C}_{\sigma_j} \mathfrak{C}_{\sigma_j}}$. Теперь, применяя изоморфизм,

$$(G/G^{f_j(\sigma_i)})/(G_{\mathfrak{C}_{\sigma_j} \mathfrak{C}_{\sigma_j}}/G^{f_j(\sigma_i)}) \cong G/G_{\mathfrak{C}_{\sigma_j} \mathfrak{C}_{\sigma_j}} \in f_j(\sigma_i)$$

для всех $j \in I$ и $\sigma_i \in \sigma(G)$. Следовательно, по определению σ -локальной формации ([8], определение 1.1(i)) $G_{\mathfrak{C}_{\sigma_j} \mathfrak{C}_{\sigma_j}} \in \bigcap_{j \in I} f_j(\sigma_i) = f(\sigma_i)$ и поэтому $G \in LF_{\sigma}(f)$. Лемма доказана.

Теорема 4. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – σ -локальные формации, то их произведение $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ – σ -локальная формация.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – σ -локальные формации с σ -функциями f и h соответственно. Тогда по утверждению 1 леммы 5 имеет место равенство:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}^*, \quad (2.5)$$

где

$$\mathfrak{F}^* = \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{F})} \mathfrak{H} \text{ и } \mathfrak{H}^* = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})} \mathfrak{C}_{\sigma_i'} \mathfrak{C}_{\sigma_i'} f(\sigma_i) \mathfrak{H}. \quad (2.6)$$

Так как по лемме 13 произведение $\mathfrak{C}_{\sigma_i'} \mathfrak{C}_{\sigma_i'} f(\sigma_i) \mathfrak{H}$ σ -локально для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$, тогда по лемме 15 формация $\mathfrak{H}^*$ σ -локальна. Поэтому, учитывая снова лемму 15, для σ -локальности $\mathfrak{F}$ покажем, что формация $\mathfrak{F}^*$ σ -локальна. По утверждению 2 леммы 5 получаем равенство:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^* &= \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{F})} \mathfrak{H} = \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{F})} (\mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})} \bigcap (\bigcap_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})} \mathfrak{C}_{\sigma_i'} \mathfrak{C}_{\sigma_i'} h(\sigma_i))) = \\ &= \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{F})} \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})} \bigcap (\bigcap_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})} \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{F})} \mathfrak{C}_{\sigma_i'} \mathfrak{C}_{\sigma_i'} h(\sigma_i)). \end{aligned} \quad (2.7)$$

По лемме 12 произведение $\mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{F})} \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})}$ σ -локально. Тогда по лемме 15 достаточно показать, что $\mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{F})} (\mathfrak{C}_{\sigma_i'} \mathfrak{C}_{\sigma_i'} h(\sigma_i))$ – σ -локальная формация. Формация $\mathfrak{C}_{\sigma_i'} \mathfrak{C}_{\sigma_i'} h(\sigma_i)$ σ -локальна по лемме 13. Кроме того, формация $\mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{F})}$ также σ -локальна по лемме 11. Поэтому по лемме 12 следует, что каждое произведение $\mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{F})} \mathfrak{C}_{\sigma_i'} \mathfrak{C}_{\sigma_i'} h(\sigma_i)$ σ -локально. Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые формации разрешимых групп, причем $\mathfrak{H}$ – σ -локальная формация с σ -функцией h . Если $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$, то произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ σ -локально и определяется σ -функцией f такой, что $f(\sigma_i) = h(\sigma_i) \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$.

Доказательство. По утверждению 1 леммы 5

$$\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (\bigcap_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})} \mathfrak{C}_{\sigma_i'} \mathfrak{C}_{\sigma_i'} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{C}_{\sigma(\mathfrak{H})} \mathfrak{H},$$

где $f(\sigma_i) = h(\sigma_i) \mathfrak{F}$ для всех простых $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$. Теперь тот факт, что f определяет $\mathfrak{F}$, вытекает из того, что по лемме 14 $\sigma(\mathfrak{F}\mathfrak{H}) = \sigma(\mathfrak{F}) \cup \sigma(\mathfrak{H})$. Теорема доказана.

Заключение. В настоящей работе были получены альтернативные формульные доказательства теорем о том, что произведение σ -локальных классов Фиттинга (σ -локальных формаций) является σ -локальным классом Фиттинга (σ -локальной формацией).

ЛИТЕРАТУРА

- Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – P. 891.
- Воробьев, Н.Т. Локальные произведения классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев // Весті АН БССР. Серія фізико-математичних наук. – 1991. – № 6. – С. 28–32.
- Шеметков, Л.А. Экраны произведения формаций / Л.А. Шеметков // Докл. АН БССР. – 1981. – Т. 25, № 8. – С. 677–680.
- Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and Appl. – 2015. – Vol. 15, № 5. – P. 21–36.
- Skiba, A.N. On σ -properties of Finite groups II / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2015. – № 3(24). – P. 70–83.
- Чжан Чи. О Σ_1^{σ} -замкнутых классах конечных групп / Чжан Чи, А.Н. Скиба // Украинский математический журнал. – 2018. – Т. 70, № 12. – С. 1707–1716.
- Wenbin Guo. On σ -local Fitting classes / Wenbin Guo, Li Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542. – P. 116–129.
- Zhang Chi. On n -multiply σ -local formations of finite groups / Zhang Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Commun. Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.
- Gaschütz, W. Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups / W. Gaschütz // Notes in Pure Mathematics. Canberra. – 1979. – Vol. 11. – 100 p.
- Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).

REFERENCES

- Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – P. 891.
- Vorobyev N.T. *Vestsi AN BSSR. Seriya fizika-matematichnykh nauk* [Journal of the AS of the BSSR. Physical and Mathematical Sciences], 1991, 6, pp. 28–32.
- Shemetkov L.A. *Dokl. AN BSSR* [Reports of the AS of the BSSR], 1981, 25(8), pp. 677–680.
- Skiba A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and Appl. – 2015. – Vol. 15, № 5. – P. 21–36.
- Skiba, A.N. On σ -properties of Finite groups II / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2015. – № 3(24). – P. 70–83.
- Chi Z., Skiba A.N. *Ukrainski matematicheski zhurnal* [Ukrainian Mathematical Journal], 2018, 70(12), pp. 1707–1716.
- Wenbin Guo. On σ -local Fitting classes / Wenbin Guo, Li Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542. – P. 116–129.
- Zhang Chi. On n -multiply σ -local formations of finite groups / Zhang Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Commun. Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.
- Gaschütz, W. Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups / W. Gaschütz // Notes in Pure Mathematics. Canberra. – 1979. – Vol. 11. – 100 p.
- Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of Finite Groups], Moscow: Nauka, 1978, 272 p.

Поступила в редакцию 28.01.2025

Адрес для корреспонденции: e-mail: deniskitarov@gmail.com – Китаров Д.А.