

О существовании и сопряженности инъекторов в конечной группе¹

Янг Н.

Университет Цзяннань, Уси, Китай
yangny@jiangnan.edu.cn

Воробьёв Н.Т.

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова, Витебск, Беларусь
ntvorobyov@mail.ru

Воробьёв С.Н.

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова, Витебск, Беларусь
belarus8889@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Обобщению классических теорем Силова и Холла посвящена известная теорема Гашюца-Фишера-Хартли [1] о том, что в разрешимой группе G для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ существуют $\mathfrak{F}$ -инъекторы G и любые два из них сопряжены в G . При этом подгруппа V группы G называется $\mathfrak{F}$ -инъектором G , если $V \cap N$ является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой N для любой субнормальной подгруппы N группы G . Вопрос о существовании и сопряженности $\mathfrak{F}$ -инъекторов в произвольной группе в общем случае решается отрицательно (см. [2], 7.1.3–7.1.4), хотя в группах с разрешимым фактором по $\mathfrak{F}$ -радикалу аналог указанной выше теоремы верен.

Дальнейшее исследование вопросов существования и сопряженности $\mathfrak{F}$ -инъекторов в группе классов Фиттинга, определяемых при помощи разбиений множества всех простых чисел $\mathbb{P}$ – основная цель настоящей работы.

Пусть σ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$, $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$, где $\pi(n)$ – множество всех простых делителей натурального числа n .

Определение 1 [3]. Группа G называется:

σ -примарной, если G – σ_i -группа для некоторого i ;

σ -разрешимой, если каждый главный фактор группы G σ -примарен;

σ -нильпотентной, если $G = G_1 \times \dots \times G_n$, где $G_1, \dots, G_n$ – σ -примарные группы.

Дуализируя [4] σ -метод А.Н. Скибы изучения формаций, всякое отображение $f : \sigma \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$ назовём σ -функцией Хартли или просто H_σ -функцией.

Пусть $LH_\sigma(f) = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} f(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$, где $\mathfrak{E}_{\sigma'_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – классы всех σ'_i -групп и всех σ_i -групп соответственно.

Определение 2. Класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ назовём σ -классом Хартли, если $\mathfrak{H} = LH_\sigma(f)$ для некоторой H_σ -функции f . Если $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, то $\mathfrak{H} = \bigcap_p f(p) \mathfrak{E}_p \mathfrak{R}_p$ – класс Хартли [5].

Пусть $F_\sigma(G)$ – σ -нильпотентный радикал группы G .

Определение 3. Группу G назовём σ -скованной, если $C_G(F_\sigma(G)) \leq F_\sigma(G)$.

Пусть f – H_σ -функция и $\text{Supp}(f) = \{\sigma_i \in \sigma : f(\sigma_i) \neq \emptyset\}$ – носитель f , то $G_f = \prod_{\sigma_i \in \text{Supp}(f)} G_{f(\sigma_i)}$ назовём f -радикалом группы G .

Теорема. Если $\mathfrak{H} = LH_\sigma(f)$ – σ -класс Хартли и группа G такова, что фактор G/G_f σ -скован, то в G существуют $\mathfrak{H}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены.

Следствие. Пусть $\mathfrak{H} = LH_\sigma(f)$ – σ -класс Хартли. Если фактор G/G_f σ -разрешим (в частности, группа G σ -разрешима), то группа G имеет единственный класс сопряженных $\mathfrak{H}$ -инъекторов.

¹Исследование выполнено в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь "Конвергенция – 2025".

Заметим, что следствиями полученных результатов являются также теоремы о существовании и сопряженности инъекторов Р. Шнакенберга, А. Манна, В. Го и Н.Т. Воробьёва.

Список литературы

- [1] B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen. *Math. Z.*, **102**: 5 (1967), 337–339.
- [2] A. Ballester-Bolínches, L. M. Ezquerro. *Classes of finite groups*. Dordrecht, Springer, 2006. **5**: 3 (1998), 285–288.
- [3] A. N. Skiba. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups. *J. Algebra.*, **456** (2015), 1–16.
- [4] W. Guo, L. Zhang, N. T. Vorob'ev. On σ -local Fitting classes. *J. Algebra.*, **542** (2020), 116–129.
- [5] B. Hartley. On Fischer's dualization of formation theory. *Proc. London Math. Soc.*, **3**: 2 (1969), 123–207.