О факторизациях σ-локальных классов Фиттинга

Воробьев Н.Т.
ВГУ имени П.М. Машерова, Витебск, Республика Беларусь
ntvorobyov@mail.ru

Китаров Д.А.
ВГУ имени П.М. Машерова, Витебск, Республика Беларусь
deniskitarov@gmail.com

Все рассматриваемые группы конечны. В терминологии и обозначениях следуем [1]. Одна из важных задач теории классов групп нахождение различных типов алгебр классов. В этом направлении исследований ключевым моментом является изучение произведений классов Фиттинга. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то их произведение класс групп $\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{H} = (G : G/G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F})$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга (см [1], теорема IX 1.12). В работе [2] доказано, что произведение двух любых локальных классов Фиттинга является локальным классом Фиттинга. Кроме того, в [3] обобщено понятие локального класса Фиттинга, где определены, так называемые σ-локальные классы Фиттинга. В работе [3] было показано, что произведение σ-локальных классов Фиттинга является σ-локальным классом Фиттинга. *В связи с этим возникает задача о том, является ли произведение σ-локальным классом Фиттинга в случае, когда только один из множителей σ-локален.*

Мы будем использовать метод σ-свойств для изучения σ-локальных классов Фиттинга, предложенный в [3]. Пусть $\pi(n)$ – множество всех простых делителей натурального числа n, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых делителей порядка G. Пусть σ – разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$, $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$, $\sigma_i \bigcap \sigma_j = \oslash$, для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i | \sigma_i \bigcap \pi(n) \neq \oslash\}$ [4]; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Если $\mathfrak{X}$ – класс групп, то $\sigma(\mathfrak{X}) = \bigcup_{\sigma\in\mathfrak{X}} \sigma(G)$. Назовем любую функцию f вида f: $\longrightarrow$ {классы Фиттинга} σ-функцией Хартли или просто H_σ-функцией. Пусть $\Pi = Supp(f) = \{\sigma_i : f(\sigma_i) \neq \oslash\}$ – носитель H_σ-функции. Тогда $LR_\sigma(f) = \mathfrak{E}_\Pi \bigcap (\bigcap_{\sigma_i\in\Pi} f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i})$ – класс Фиттинга.

Определение 1 [3]. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется σ-локальным, если существует H_σ-функция f такая, что $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$.*

Если $\sigma = \{\{2\},\{3\},\{5\},\dots\}$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют локальным и H_σ-функцию f – H-функцией, определяющей f.

Определение 2 [3]. *Произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называем σ-локальным, если класс Фиттинга $\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{H}$ – σ-локален.*

Теорема 1. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга определяется H_σ-функцией h, причем $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$, то произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ σ-локально и определяется H_σ-функцией f такой, что $f(\sigma_i) = \mathfrak{F}h(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$.

В случае $\sigma = \{\{2\},\{3\},\{5\},\dots\}$ получаем

Следствие 1 [2]. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга с H-функцией h, причем $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$, то произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ локально и определяется с H-функцией f такой, что $f(p) = \mathfrak{F}h(p)$ для всех простых $p \in \pi(\mathfrak{H})$.

Символом $l_\sigma Fit\mathfrak{F}$ будем обозначать σ-локальный класс Фиттинга, порожденный классом Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, $\mathfrak{H}$ – σ-локальный класс Фиттинга, Π– носитель H_σ-функции $\mathfrak{H}$ и $\Pi' = \Pi\backslash\sigma(\mathfrak{H})$. Если $l_\sigma Fit\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H})}$ или $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\sigma_i} = \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \subseteq \sigma'(\mathfrak{H})$, то произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ σ-локально.*

Если $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, то $l_\sigma Fit\mathfrak{F}$ обозначает $lFit\mathfrak{F}$ и $lFit\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга, порожденный классом Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Следствие 2 [2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, $\mathfrak{H}$ – локальный класс Фиттинга. Если $lFit\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{H})}$ или $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}$ для всех простых $p \in \pi'(\mathfrak{H})$, то произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ локально.*

Список литературы

[1] K. Doerk, T. Hawkes. Finite solube groups. *De Gruyter Exp. In Math.*, **4** (1992).

[2] Н. Т. Воробьев. Локальные произведения классов Фиттинга. *Весці АН БССР. Сер. фізіка-матэматычных навук*, **6** (1991), 28–32.

[3] Wenbin Guo, Li Zhang, N. T. Vorob'ev. On σ-local Fitting classes. *Journal of Algebra*, **542** (2020), 116–129.

[4] A. N. Skiba. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra*, **436** (2015), 1–16.