

С.М. Бородич¹, Т.В. Кавитова²

¹Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
г. Витебск, Беларусь

SPIN-код: 5379-9020

²Средняя школа № 42 г. Витебска им. Д.Ф. Райцева,
г. Витебск, Беларусь

SPIN-код: 4044-6196

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕАВТОНОМНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ $t \rightarrow +\infty$

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассматривается неавтономное гиперболическое уравнение

$$\partial_t^2 u + \varepsilon \partial_t u = \Delta u - f(u, t) - g(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

с граничным условием

$$u|_{x \in \partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon > 0$, $u = u(x, t)$, Δ – оператор Лапласа по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 , $f(t, u)$ и $g(t, x)$ – заданные функции. Предполагается, что

$$f(u, t) = \varphi(u, t) + h(u, t), \quad \varphi(u, t), h(u, t) \in C^1(\mathbf{R} \times [0, +\infty))$$

и выполнены следующие условия:

$$f(u, t)u \geq -C_1, \quad \varphi(u, t)u \geq 0, \quad \varphi'_u(u, t) \geq -C_2, \quad \varphi'_u(0, t) \leq C_3,$$

$$|\varphi'_u(u, t) - \varphi'_u(v, t)| \leq C_4 |u - v| (1 + |u| + |v|),$$

$$|h'_u(u, t)| \leq C_5 (|u|^\gamma + 1), \quad 0 < \gamma < 2,$$

$$F(u, t) \equiv \int_0^u f(s, t) ds \geq -C_6,$$

$$|h'_t(u, t)| \leq k_1(t) (|u|^3 + 1), \quad |\varphi'_t(u, t)| \leq k_2(t) (|\varphi(t, u)| + |u|),$$

$$F'_t(u, t) \leq k_3(t) (F(u, t) + u^2 + C_7)$$

для всех $u, v \in \mathbf{R}$ и $t \geq 0$, где

$$C_i > 0 \quad (i = \overline{1, 7}), \quad k_j(t) \in C([0, +\infty)), \quad k_j(t) \geq 0, \\ k_j(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty \quad (j = 1, 2, 3)$$

и, кроме того,

$$\int_0^{+\infty} k_3(t) dt < +\infty.$$

Предполагается также, что $g(\cdot, t), g'_t(\cdot, t) \in C([0, +\infty); L_2(\Omega))$, причем

$$\|g(x, t)\| \leq C \quad \forall t \geq 0, \quad \int_0^{+\infty} \|g'_t(x, t)\| dt < +\infty, \quad \|g'_t(x, t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

где $\|\cdot\|$ – норма в пространстве $L_2(\Omega)$.

С помощью методов, изложенных, например, в книгах [1], [2], устанавливается, что задача (1), (2) порождает в пространстве $E = H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ семейство эволюционных операторов $\{S_{t,\tau}, t \geq \tau \geq 0\}$:

$$S_{t,\tau} : y_0 \rightarrow y(t),$$

где $y_0 = (u_0, p_0) \in E$, $y(t) = (u(t), \partial_t u(t))$, $u(t)$ – решение задачи (1), (2) с начальными условиями

$$u|_{t=\tau} = u_0, \quad \partial_t u|_{t=\tau} = p_0.$$

Исследуется поведение при $t \rightarrow +\infty$ совокупности решений задачи (1), (2), начальные значения которых образуют произвольное ограниченное множество в банаховом пространстве E начальных данных задачи.

Для любых непустых множеств $X, Y \subset E$ положим

$$\text{dist}(X, Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|_E \quad (\|\cdot\|_E - \text{норма в } E).$$

Максимальным аттрактором семейства эволюционных операторов $\{S_{t,\tau}\}$ называется такое компактное в E множество A , что:

- 1) для любого ограниченного в E множества B $\text{dist}(S_{t,0}B, A) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ (свойство притяжения);

2) если $\mathcal{M}$ – компактное в E множество и для любого ограниченного в E множества B $\text{dist}(S_{t,0}B, \mathcal{M}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ (свойство минимальности).

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Семейство эволюционных операторов $\{S_{t,\tau}\}$, порожденное задачей (1), (2), обладает максимальным аттрактором.

Литература

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
2. Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.