УДК 681.3.057:53

# Многомерный аналог задачи Аполлония

**Ю.В. Трубников, И.А. Орехова, Сунь Байюй**
*Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»*

*В работе классическая задача Аполлония о кратчайшем расстоянии от точки до эллипса решается методом разложения по малому параметру. Кроме того, рассмотрен многомерный аналог данной задачи. Получено алгебраическое уравнение, решение которого определяет требуемую точку на многомерном эллипсоиде. Заметим, что операция проектирования на выпуклое множество в гильбертовом пространстве является монотонным оператором [1]. Интересным является тот факт, что в данной задаче значения такого оператора находятся по корням алгебраического уравнения. Такое уравнение является удобным для численной реализации. Разложение корня по степеням малого параметра позволяет аналитически исследовать зависимость корня от координат точки, от которой до эллипса находится кратчайшее расстояние. В случае многомерного эллипсоида выделение малого параметра возможно не всегда, поэтому получающееся в процессе исследования задачи алгебраическое уравнение естественно решать каким-либо численным методом. Авторы данной статьи применяли алгоритм Вейерштрасса одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения. Установлена высокая эффективность такого итерационного процесса.*

***Ключевые слова:*** *эллипс, расстояние от точки до эллипса, многомерный эллипсоид.*

# Multidimensional analog of Apollonius problem

**Y.V. Trubnikov, I.A. Orehova, Syn Baiyi**
*Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»*

*The classical Apollonius problem on the shortest distance from a point to an ellipse is solved in the article by the method of decomposition according to small parameter. Besides, a multidimensional analog of the problem is considered. An algebraic equation is obtained the solution of which defines the required point on a multidimensional ellipsoid. It should be pointed out that the operation of the projection on convex multitude in Gilbert space is a monotone operator [1]. It is interesting that in the problem the indications of such operator are in the radicals of an algebraic equation. Such equation is convenient for numerical implementation. Decomposition of the radical according to the degrees of small parameter makes it possible to analytically study the dependence of the radical on the point coordinates, from which it is the shortest to the ellipse. In case of multidimensional ellipsoid the identification of a small parameter is not always possible, that is why the algebraic equation, which is obtained as a result of study process, can be naturally solved by some numerical method. The authors used Weierstrass algorithm of simultaneous finding all radicals of the algebraic equations. High efficiency of such iteration process was found out.*

***Key words:*** *ellipse, distance from point to the ellipse, multidimensional ellipsoid.*

В работе классическая задача Аполлония о кратчайшем расстоянии от точки до эллипса решается методом разложения по малому параметру. Кроме того, рассмотрен многомерный аналог данной задачи. Получено алгебраическое уравнение, решение которого определяет требуемую точку на многомерном эллипсоиде. Заметим, операция проектирования на выпуклое множество в гильбертовом пространстве является монотонным оператором [1]. Интересным является тот факт, что значения такого оператора находятся по корням алгебраического уравнения. Это уравнение является удобным для численной реализации. Разложение корня по степеням малого параметра позволяет аналитически исследовать зависимость корня от координат точки, от которой до эллипса находится кратчайшее расстояние.

Рассмотрим задачу Аполлония ([2], с. 96) о кратчайшем расстоянии от точки до эллипса. Пусть уравнение эллипса имеет вид:

$$g(x,y) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad (1)$$

а точка $(x_0, y_0)$ лежит вне соответствующего эллиптического диска, т.е.

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 > 0.$$

Требуется найти точку на эллипсе, минимизирующую функцию

$$f(x,y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2. \qquad (2)$$

Такая точка должна быть решением системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0, & (3.1) \\ \dfrac{2x}{a^2} = t(x_0 - x), & (3.2) \\ \dfrac{2y}{b^2} = t(y_0 - y). & (3.3) \end{cases}$$

Репозиторий ВГУ

Уравнения (3.2) и (3.3) выражают тот факт, что градиент функции $g(x, y)$ в экстремальной точке должен быть коллинеарен вектору

$$\begin{bmatrix} x_0 & -x \\ y_0 & -y \end{bmatrix}.$$

Для определения будем считать, что $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.

Разделив равенство (3.2) на равенство (3.3), получаем

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y} = \frac{x_0 - x}{y_0 - y}. \qquad (4)$$

Из уравнения (4)

$$b^2xy_0 - \left[a^2(x_0 - x) + b^2x\right]\cdot y = 0. \qquad (5)$$

Тогда, умножив обе части уравнения (5) на выражение

$$b^2xy_0 + \left[a^2(x_0 - x) + b^2x\right]\cdot y, \qquad (6)$$

получаем

$$b^4x^2y_0^2 = \left[a^2(x_0 - x) + b^2x\right]^2\cdot y^2 \qquad (7)$$

и, сделав подстановку

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

приведем уравнение (7) к виду

$$b^2x^2y_0^2 = \left[(b^2 - a^2)\cdot x + a^2x_0\right]^2\cdot\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

т.е.

$$(a^2 - b^2)^2\cdot x^4 - 2a^2x_0(a^2 - b^2)\cdot x^3 + \left[a^2b^2y_0^2 + a^4x_0^2 - a^2(a^2 - b^2)^2\right]\cdot x^2 + 2a^4x_0(a^2 - b^2)\cdot x - a^6x_0^2 = 0. \qquad (8)$$

Разделив обе части уравнения (8) на $a^4$, приведем его к виду

$$\varepsilon^4x^4 - 2x_0\varepsilon^2x^3 + \left[(1 - \varepsilon^2)\cdot y_0^2 + x_0^2 - a^2\varepsilon^4\right]\cdot x^2 + 2a^2x_0\varepsilon^2x - a^2x_0^2 = 0, \qquad (9)$$

где $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$ – эксцентриситет эллипса.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (9) имеет вид

$$(x_0^2 + y_0^2)\cdot x^2 - a^2x_0^2 = 0. \qquad (10)$$

Его решение

$$x^2 = \frac{a^2x_0^2}{x_0^2 + y_0^2} = \frac{r^2x_0^2}{x_0^2 + y_0^2}, \qquad (11)$$

где $r$ – радиус окружности (при $\varepsilon = 0$ эллипс превращается в окружность). При этом

$$x_1 = \frac{r\cdot x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

дает значение абсциссы точки на окружности, ближайшей к точке $(x_0, y_0)$, а значение $x_2$, равное

$$x_2 = -\frac{r\cdot x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}},$$

– это абсцисса наиболее удаленной на окружности точки от точки $(x_0, y_0)$.

Подстановка $\mu = \varepsilon^2$ приводит уравнение (9) к виду

$$\mu^2x^4 - 2x_0\mu\cdot x^3 + \left[(1 - \mu)\cdot y_0^2 + x_0^2 - a^2\mu^2\right]\cdot x^2 + 2a^2x_0\mu\cdot x - a^2x_0^2 = 0. \qquad (12)$$

**Теорема.** *Разложение по малому параметру $\mu$ интересующего нас корня $x(\mu)$ имеет вид:*

$$x(\mu) = \frac{ax_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} + \frac{ax_0y_0^2\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - 2a\right)}{2(x_0^2 + y_0^2)^2}\mu + \frac{ax_0y_0^2}{8(x_0^2 + y_0^2)^{7/2}}[8a(x_0^2 - y_0^2)(x_0^2 + y_0^2)^{1/2} - 12a^2x_0^2 + 3x_0^2y_0^2 + 8a^2y_0^2 + 3y_0^4]\cdot\mu^2 + O(\mu^3). \qquad (13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для нахождения первой производной $x^{(1)}(0)$ продифференцируем обе части равенства (12) по параметру $\mu$:

$$2\mu\cdot x^4 + 4\mu^2\cdot x^3x^{(1)} - 2x_0x^3 - 6x_0\mu\cdot x^2x^{(1)} + (-y_0^2 - 2a^2\mu)\cdot x^2 + 2\left[(1 - \mu)\cdot y_0^2 + x_0^2 - a^2\mu^2\right]\cdot x\cdot x^{(1)} + 2a^2x_0x + 2a^2x_0\mu\cdot x^{(1)} = 0. \qquad (14)$$

При $\mu = 0$ равенство (14) будет иметь вид

$$-2x_0x^3 - y_0^2x^2 + 2(y_0^2 + x_0^2)\cdot x\cdot x^{(1)} + 2a^2x_0x = 0. \qquad (15)$$

Выразим из равенства (15) $x^{(1)}(0)$:

$$2(x_0^2 + y_0^2)\cdot x\cdot x^{(1)} = 2x_0x^3 + y_0^2x^2 - 2a^2x_0x$$

Репозиторий ВГУ

и, таким образом,

$$x^{(1)}(0)=\frac{2x_0x^3+y_0^2x^2-2a^2x_0x}{2(x_0^2+y_0^2)\cdot x}=$$

$$=\frac{2x_0x^2+y_0^2x-2a^2x_0}{2(x_0^2+y_0^2)}. \qquad (16)$$

Подставляя значение $x=x(0)$, получаем

$$x^{(1)}(0)=\frac{1}{2(x_0^2+y_0^2)}[2x_0\cdot\frac{a^2x_0^2}{x_0^2+y_0^2}+$$

$$+y_0^2\frac{ax_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}-2a^2x_0]=$$

$$=\frac{1}{2(x_0^2+y_0^2)^2}(2a^2x_0^3-2a^2x_0^3-$$

$$-2a^2x_0y_0^2+ax_0y_0^2\sqrt{x_0^2+y_0^2})=$$

$$=\frac{ax_0y_0^2(\sqrt{x_0^2+y_0^2}-2a)}{2(x_0^2+y_0^2)^2}. \qquad (17)$$

Аналогично $x^{(2)}(0)$ можно найти, дифференцируя по $\mu$ равенство (14):

$$2x^4+2\mu\cdot4x^3x^{(1)}+8\mu\cdot x^3x^{(1)}+$$
$$+4\mu^2\cdot3x^2\left[x^{(1)}\right]^2+4\mu^2x^3x^{(2)}-$$
$$-2x_0 3x^2x^{(1)}-6x_0x^2x^{(1)}-$$
$$-6x_0\cdot\mu\cdot2x\left[x^{(1)}\right]^2-$$
$$-6x_0\cdot\mu\cdot x^2x^{(2)}+(-2a^2)\cdot x^2+$$
$$+(-y_0^2-2a^2\mu)\cdot2xx^{(1)}+$$
$$+2(-y_0^2-2a^2\mu)\cdot xx^{(1)}+$$
$$+2\left[(1-\mu)(y_0^2+x_0^2)-a^2\mu^2\right]\cdot\left[x^{(1)}\right]^2+$$
$$+2\left[(1-\mu)(y_0^2+x_0^2)-a^2\mu^2\right]\cdot xx^{(2)}+$$
$$+2a^2x_0x^{(1)}+2a^2x_0x^{(1)}+$$
$$+2a^2x_0\mu x^{(2)}=0. \qquad (18)$$

При $\mu=0$ равенство (18) будет иметь вид:

$$2x^4-2x_0\cdot3x^2\cdot x^{(1)}-6x_0x^2x^{(1)}-$$
$$-2a^2x^2-2y_0^2xx^{(1)}-2y_0^2xx^{(1)}+$$
$$+2(x_0^2+y_0^2)\cdot\left[x^{(1)}\right]^2+2(x_0^2+y_0^2)\cdot xx^{(2)}+$$
$$+2a^2x_0x^{(1)}+2a^2x_0x^{(1)}=0,$$

т.е.

$$2(x_0^2+y_0^2)\cdot xx^{(2)}=-2x^4+6x_0x^2x^{(1)}+$$
$$+6x_0x^2x^{(1)}+2a^2x^2+2y_0^2xx^{(1)}+$$
$$+2y_0^2xx^{(1)}-2(x_0^2+y_0^2)\left[x^{(1)}\right]^2-4a^2x_0x^{(1)}.$$

Таким образом, с учетом равенств (11) и (17) получаем:

$$x^{(2)}=\frac{1}{2(x_0^2+y_0^2)\cdot x}[-2x^4+12x_0x^2x^{(1)}+$$
$$+2a^2x^2+4y_0^2xx^{(1)}-2(x_0^2+y_0^2)\cdot\left[x^{(1)}\right]^2-$$
$$-4a^2x_0x^{(1)}]=\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{(x_0^2+y_0^2)\cdot ax_0}[-x^4+$$
$$+6x_0x^2x^{(1)}+a^2x^2+2y_0^2xx^{(1)}-$$
$$-(x_0^2+y_0^2)\cdot\left[x^{(1)}\right]^2-2a^2x_0x^{(1)}]=$$
$$=\frac{ax_0y_0^2}{4(x_0^2+y_0^2)^{7/2}}[8a(x_0^2-y_0^2)\cdot(x_0^2+y_0^2)^{1/2}-$$
$$-12a^2x_0^2+3x_0^2y_0^2+8a^2y_0^2+3y_0^4]\cdot\mu^2. \qquad (19)$$

Теорема доказана.

Заметим, что уравнение (12) можно получить следующим образом: по отношению к верхнему полуэллипсу требуется минимизировать функцию

$$f(x)=(x-x_0)^2+\left[b\cdot\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}-y_0\right]^2. \qquad (20)$$

Так как

$$f'(x)=2(x-x_0)-\frac{2bx}{a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\times$$
$$\times\left[b\cdot\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}-y_0\right],$$

то, приравнивая $f'(x)$ к нулю, получаем

$$\frac{t\cdot s\cdot\left(\frac{y_0}{a}\right)}{\sqrt{1-s^2}}=\left[(t^2-1)\cdot s+\frac{x_0}{a}\right], \qquad (21)$$

где $s=\frac{x}{a}$, $t=\frac{b}{a}$ $(0<b<a)$.

Репозиторий ВГУ

Функция

$$\phi(s)=\frac{t\cdot s\cdot\left(\frac{y_0}{a}\right)}{\sqrt{1-s^2}}-$$

$$-\left[(t^2-1)\cdot s+\frac{x_0}{a}\right]\quad 0\le s\le 1 \qquad (22)$$

имеет один положительный корень $s_*$, так как

$$\phi(0)=-\frac{x_0}{a}<0 \quad (\text{при } x_0>0)$$

и

$$\phi'(s)=\frac{t\cdot y_0}{a\sqrt{1-s^2}}+\frac{t\cdot y_0\cdot s^2}{a(1-s^2)^{3/2}}+1-t^2$$

$$\left(t=\frac{b}{a}<1\right).$$

В точке $s_*$ функция $\varphi(s)$ меняет знак «–» на «+», т.е. в этой функции достигается минимум функции $f(x)$.

По отношению к нижнему полуэллипсу квадрат расстояния выражается следующим образом:

$$f(x)=(x-x_0)^2+\left[b\cdot\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}+y_0\right]^2.$$

В этом случае

$$f'(x)=2(x-x_0)-\frac{2b^2x}{a^2}-$$

$$-\frac{2bxy_0}{a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}. \qquad (23)$$

Уравнение $f'(x)=0$ запишем в следующем виде:

$$\frac{t\cdot s\cdot\left(\frac{y_0}{a}\right)}{\sqrt{1-s^2}}+\left[(t^2-1)\cdot s+\left(\frac{x_0}{a}\right)\right]=0. \qquad (24)$$

Умножив выражение (22) на левую часть равенства (24), получим уравнение

$$\frac{t^2\cdot s^2\cdot\left(\frac{y_0}{a}\right)^2}{1-s^2}-\left[(t^2-1)\cdot s+\left(\frac{x_0}{a}\right)\right]^2=0. \qquad (25)$$

Раскрыв квадрат и умножив обе части уравнения (25) на $1-s^2$, получаем уравнение (9):

$$t^2\cdot s^2\cdot\left(\frac{y_0}{a}\right)^2-(1-s^2)\cdot[(t^2-1)^2\cdot s^2+$$

$$+2(t^2-1)\frac{x_0}{a}\cdot s+\frac{x_0^2}{a^2}]=t^2\cdot\left(\frac{y_0}{a}\right)^2\cdot s^2+$$

$$+(t^2-1)^2\cdot s^4+2(t^2-1)\frac{x_0}{a}\cdot s^3+$$

$$+\frac{x_0^2}{a^2}s^2-(t^2-1)^2\cdot s^2-2(t^2-1)\frac{x_0}{a}\cdot s-\frac{x_0^2}{a^2}=$$

$$=(t^2-1)^2\cdot s^4-2(1-t^2)\frac{x_0}{a}\cdot s^3+$$

$$+\left[t^2\left(\frac{y_0}{a}\right)^2+\frac{x_0^2}{a^2}-(1-t^2)^2\right]\cdot s^2+$$

$$+2(1-t^2)\frac{x_0}{a}\cdot s-\frac{x_0^2}{a^2}=0. \qquad (26)$$

Если разделить обе части уравнения (26) на $a^2$, мы получим уравнение (26).

Далее рассмотрим обобщение задачи Аполлония: пусть уравнение многомерного эллипсоида имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{a_j^2}=1, \qquad (27)$$

а точка $x_0=(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$ лежит вне соответствующей эллиптической поверхности, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_{j0}^2}{a_j^2}>1. \qquad (28)$$

Требуется найти точку на поверхности (27), минимизирующую функцию

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_{j0})^2. \qquad (29)$$

Такая точка должна быть решением системы уравнений

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{a_j^2}=1, & (30.1)\\ \frac{2x_j}{a_j^2}=t\cdot(x_{j0}-x_j) \quad (j=1,2,...,n). & (30.2)\end{cases}$$

Уравнения (30.2) выражают тот факт, что градиент функции (27) коллинеарен вектору

$$(x_{10}-x_1,x_{20}-x_2,...,x_{n0}-x_n). \qquad (31)$$

Разделив первое из уравнений (30.2) на каждое из остальных, получаем

$$\frac{a_j^2}{a_1^2}\cdot\frac{x_1}{x_j}=\frac{x_{10}-x_1}{x_{j0}-x_j} \qquad (j=2,3,...,n),$$

Репозиторий БГУ

т.е.

$$a_j^2 x_1 (x_{j0} - x_j) = a_1^2 x_j (x_{10} - x_1) \qquad (32)$$
$$(j = 2, 3, \ldots, n).$$

Выразим из равенств (32) $x_j$:

$$a_j^2 x_1 x_{j0} - a_j^2 x_1 x_j = a_1^2 (x_{10} - x_1) \cdot x_j,$$
$$a_j^2 x_1 x_{j0} = \left[a_1^2 (x_{10} - x_1) + a_j^2 x_1\right] \cdot x_j,$$
$$x_j = \frac{a_j^2 x_1 x_{j0}}{a_1^2 (x_{10} - x_1) + a_j^2 x_1} \qquad (33)$$
$$(j = 2, 3, \ldots, n).$$

Далее подставим правые части равенств (33) в уравнение (30.1)

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{a_j^2} \cdot \frac{(a_j^2 x_1 x_{j0})^2}{\left[a_1^2 (x_{10} - x_1) + a_j^2 x_1\right]^2} =$$
$$= \frac{x_1^2}{a_1^2} + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_j^2 (x_1 x_{j0})^2}{\left[a_1^2 (x_{10} - x_1) + a_j^2 x_1\right]^2} = 1,$$

т.е.

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_j^2 (x_1 x_{j0})^2}{\left[a_1^2 x_{10} + (a_j^2 - a_1^2) \cdot x_1\right]^2} = 1. \qquad (34)$$

Умножая обе части уравнения (34) на выражение

$$a_1^2 \prod_{j=2}^{n} \left[a_1^2 x_{10} + (a_j^2 - a_1^2) \cdot x_1\right]^2,$$

получаем алгебраическое уравнение степени $2n$ относительно переменной $x_1$:

$$x_1^2 \prod_{j=2}^{n} \left[a_1^2 x_{10} + (a_j^2 - a_1^2) \cdot x_1\right]^2 +$$
$$+ a_1^2 \sum_{j=2}^{n} (a_j x_1 x_{j0})^2 \times$$
$$\times \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^{n} \left[a_1^2 x_{10} + (a_j^2 - a_1^2) \cdot x_1\right]^2 =$$
$$= a_1^2 \prod_{j=2}^{n} \left[a_1^2 x_{10} + (a_j^2 - a_1^2) \cdot x_1\right]^2. \qquad (35)$$

Решив уравнение (35) и подставив значение $x_1$ в равенство (33), получаем остальные $x_j$ $(j = 2, 3, \ldots, n)$.

*ЛИТЕРАТУРА*


1. Трубников, Ю.В. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями / Ю.В. Трубников, А.И. Перов. – Минск: Наука и техника, 1986. – 199 с.
2. Алексеев, В.М. Оптимальное уравнение / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1979. – 432 с.


*Поступила в редакцию 27.10.2011. Принята в печать 28.12.2011*
***Адрес для корреспонденции:*** 210026, г. Витебск, ул. Коммунистическая, д. 12/23, кв. 16,
e-mail: Yurii_Trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.

Репозиторий ВГУ