УДК 517.956.2

Условия существования положительных целых решений системы полулинейных эллиптических уравнений

С.В. Сергеенко
Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

В этой работе рассматривается система двух полулинейных эллиптических уравнений второго порядка следующего вида: $\Delta u=H(|x|)v^{\alpha}$, $\Delta v=K(|x|)u^{\beta}$, $x\in R^N$, $N\geq 3$, где α, β – положительные постоянные, причем $\alpha\beta>1$, коэффициенты K, H – неотрицательные непрерывные функции, которые удовлетворяют при любом $r>r_0$ ($r_0>e$) следующим неравенствам: $H(r)\leq L_1/(r^{\lambda}\ln^{\mu} r)$, $K(r)\leq L_2/(r^{\nu}\ln^{\xi} r)$, L_1, L_2 – положительные постоянные, λ, μ, ν, ξ – произвольные постоянные. Под целым решением рассматриваемой системы будем понимать такую вектор-функцию $(u,v)\in C^2(R^N)\times C^2(R^N)$, которая удовлетворяет системе в каждой точке R^N. Для таких систем получены достаточные условия существования целых решений. Эти условия определяются показателями λ, μ, ν, ξ. Полученные результаты сформулированы в виде теоремы, доказательство которой основано на теореме Шаудера–Тихонова о неподвижной точке.

Ключевые слова: *полулинейные эллиптические системы, целые решения, достаточные условия существования.*

Existence conditions of positive entire solutions of semilinear elliptic equation system

S.U. Syargeenka
Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

We consider the system of second order two semilinear elliptic equations of the form $\Delta u=H(|x|)v^{\alpha}$, $\Delta v=K(|x|)u^{\beta}$, for $x\in R^N$, $N\geq 3$, where α, β are positive constants at $\alpha\beta>1$, K, H are nonnegative continuous functions which satisfy the following inequalities $H(r)\leq L_1/(r^{\lambda}\ln^{\mu} r)$, $K(r)\leq L_2/(r^{\nu}\ln^{\xi} r)$ for $r>r_0$ ($r_0>e$), L_1, L_2 are positive constants and λ, μ, ν, ξ are arbitrary constants. An entire solution of system is defined to be vector-valued function $(u,v)\in C^2(R^N)\times C^2(R^N)$ which satisfies the system at every point x in R^N. Existence conditions of positive entire solutions of semilinear elliptic systems were obtained. These conditions are determined by the following exponents λ, μ, ν, ξ. The proof of this theorem is based on Schauder–Tychonoff fixed point theorem.

Key words: *semilinear elliptic systems, entire solution, sufficeint conditions of existence.*

Рассматривается система полулинейных эллиптических уравнений

$$\begin{cases}\Delta u=H(|x|)v^{\alpha},\\ \Delta v=K(|x|)u^{\beta},\end{cases} \tag{1}$$

где $x\in R^N$, $N\geq 3$, α, β – положительные постоянные, H, K – непрерывные неотрицательные функции, удовлетворяющие при некоторых постоянных $r_0>e$, $L_1>0$, $L_2>0$, λ, μ, ν, ξ и всех значениях $r>r_0$ следующим неравенствам:

$$H(r)\leq \frac{L_1}{r^{\lambda}\ln^{\nu} r}, \tag{2}$$

$$K(r)\leq \frac{L_2}{r^{\mu}\ln^{\xi} r}. \tag{3}$$

Целью данной работы является нахождение достаточных условий существования целых решений системы (1).

Определение 1. *Целым решением системы (1) называется такая вектор-функция $(u,v)\in C^2(R^N)\times C^2(R^N)$, которая удовлетворяет системе (1) в каждой точке R^N.*

Вопросы существования и отсутствия целых решений систем нелинейных эллиптических уравнений рассматривались в ряде работ (см., например, [1–6]).

Так, в работе [1] для системы полулинейных эллиптических уравнений вида (1) доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $N\geq 3$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha\beta>1$, функции $H(r)$, $K(r)$ удовлетворяют неравенствам*

$$H(r)\leq \frac{L_1}{r^{\lambda}},$$

$$K(r)\leq \frac{L_2}{r^{\mu}}$$

при $r\geq r_0>0$, где L_1, L_2 – положительные постоянные и

$$\begin{cases}\lambda > \alpha(2-\mu)+2,\\ \mu > \beta(2-\lambda)+2.\end{cases}$$

Тогда система (1) *имеет бесконечно много положительных радиально симметричных целых решений.*

Кроме того, показано, что теорема 1 является точной для систем вида (1) с коэффициентами, асимптотически эквивалентными степенным функциям.

В [2] эти результаты обобщаются на случай систем с произвольным числом уравнений.

Результаты и их обсуждение. Заметим, что система (1) в классе радиально симметричных функций равносильна системе

$$\begin{cases}(u' r^{N-1})' r^{1-N} = H(r)v^{\alpha},\\ (v' r^{N-1})' r^{1-N} = K(r)u^{\beta},\end{cases}$$

так как в полярных координатах для радиально симметричных функций $\Delta u(r)\equiv(u' r^{N-1})' r^{1-N}$. Домножив оба уравнения системы на r^{N-1} и проинтегрировав обе части равенств каждого из полученных уравнений по отрезку $[0,\ r]$, учитывая, что для радиально симметричных решений $u'(0)=0$, $v'(0)=0$, получим

$$u'(r)r^{N-1}=\int_0^r s^{N-1}H(s)v^{\alpha}(s)ds,$$

$$v'(r)r^{N-1}=\int_0^r s^{N-1}K(s)u^{\beta}(s)ds.$$

Проинтегрировав обе части равенств по отрезку $[0,\ r]$, предварительно домножив их на r^{1-N}, получим

$$u(r) = a + \int_0^r\int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{N-1} H(s)v^{\alpha}(s)dsdt,$$

$$v(r) = b + \int_0^r\int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{N-1} K(s)u^{\beta}(s)dsdt,$$

где a, b – некоторые положительные числа. Поменяем порядок интегрирования и обозначим

$$I(r,s) = s^{N-2}\int_s^r t^{1-N}dt = \frac{1}{N-2}\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right].$$

Тогда радиально симметричные решения системы (1) удовлетворяют равенствам

$$u(r)= a+\int_0^r sH(s)I(r,s)v^{\alpha}(s)ds, \tag{4}$$

$$v(r)= b+\int_0^r sK(s)I(r,s)u^{\beta}(s)ds. \tag{5}$$

Заметим, что радиально симметричные функции $u(x)=u(|x|)$, $v(x)=v(|x|)$, для которых справедливы соотношения (4), (5) при всех значениях x, являются целыми решениями системы (1).

Теорема 2. *Пусть дана система* (1)*, у которой $\alpha\beta>1$ и коэффициенты при некоторых постоянных $r_0>e$, $L_1>0$, $L_2>0$, λ, μ, ν, ξ и всех значениях $r>r_0$ удовлетворяют неравенствам* (2) *и* (3).

Если выполняется одно из условий

а)

$$\begin{cases}2-\lambda+\alpha(2-\mu)<0,\\ 2-\mu+\beta(2-\lambda)<0,\end{cases} \tag{6}$$

б)

$$\begin{cases}\lambda>2,\\ 2-\lambda+\alpha(2-\mu)=0,\\ 1-\nu-\alpha\xi<0,\\ \beta(1-\nu)-\xi<0,\end{cases} \tag{7}$$

в)

$$\begin{cases}\lambda<2,\\ 2-\mu+\beta(2-\lambda)=0,\\ -\nu+\alpha(1-\xi)<0,\\ -\beta\nu+1-\xi<0,\end{cases} \tag{8}$$

г)

$$\begin{cases}\lambda=2,\\ \mu=2,\\ 1-\nu+\alpha(1-\xi)<0,\\ \beta(1-\nu)+1-\xi<0,\end{cases} \tag{9}$$

то существует бесконечно много положительных радиально симметричных целых решений системы (1).

Доказательство. Справедливость теоремы в случае а) следует из теоремы 1.

Рассмотрим случай б). Выберем константы C_1 и C_2 так, чтобы при любом $r>r_0$ выполнялись следующие неравенства:

$$\int_{r_0}^r \frac{s^{-1}\ln^{-\nu+\alpha n}s}{r_0^{2-\mu}\ln^n r_0}ds \le \frac{C_1\ln^{1-\nu+\alpha n}r}{\ln^m r_0}, \tag{10}$$

$$\int_{r_0}^r \frac{s^{1-\mu}\ln^{-\xi+\beta m}s}{\ln^m r_0}ds \le \frac{C_2 r^{2-\mu}\ln^{-\xi+\beta m}r}{r_0^{2-\mu}\ln^n r_0}, \tag{11}$$

где $m=(1-\nu-\alpha\xi)/(1-\alpha\beta)>0$, $n=(\beta(1-\nu)-\xi)/(1-\alpha\beta)$. Выбор таких постоянных C_1 и C_2 возможен в силу существования конечных положительных пределов при $r \to \infty$ функций

$$\int_{r_0}^{r} s^{-1} \ln^{-\nu+\alpha n} s ds / \ln^{1-\nu+\alpha n} r,$$

$$\int_{r_0}^{r} s^{1-\mu} \ln^{-\xi+\beta m} s ds / (r^{2-\mu} \ln^{-\xi+\beta m} r)$$

и монотонности интегралов $\int_{r_0}^{r} s^{-1} \ln^{-\nu+\alpha n} s ds$, $\int_{r_0}^{r} s^{1-\mu} \ln^{-\xi+\beta m} s ds$ как функций от верхнего предела.

Пусть постоянные a и b в (4), (5) таковы, что выполняются неравенства

$$\frac{(2b)^{\alpha}}{N-2} \int_{0}^{r_0} sH(s) ds \le \frac{a}{2}, \tag{12}$$

$$\frac{L_1 C_1 (2b)^{\alpha}}{N-2} \le \frac{a}{2}, \tag{13}$$

$$\frac{(2a)^{\beta}}{N-2} \int_{0}^{r_0} sK(s) ds \le \frac{b}{2}, \tag{14}$$

$$\frac{L_2 C_2 (2a)^{\beta}}{N-2} \le \frac{b}{2}. \tag{15}$$

Положим

$$A_1(r) = \begin{cases} 2a & \text{при } 0 \le r \le r_0, \\ \dfrac{2a \ln^m r}{\ln^m r_0} & \text{при } r_0 \le r, \end{cases}$$

$$B_1(r) = \begin{cases} 2b & \text{при } 0 \le r \le r_0, \\ \dfrac{2br^{2-\mu} \ln^n r}{r_0^{2-\mu} \ln^n r_0} & \text{при } r_0 \le r. \end{cases}$$

Рассмотрим пространство Y_1 непрерывных вектор-функций (u, v), определенных на $[0, \infty)$, которые удовлетворяют неравенствам $a \le u(r) \le A_1(r)$, $b \le v(r) \le B_1(r)$, при любом $r \ge 0$. Очевидно, Y_1 – замкнутое выпуклое подмножество пространства $C[0, \infty) \times C[0, \infty)$ с топологией равномерной сходимости. Определим оператор $F : C[0, \infty) \times C[0, \infty) \to C[0, \infty) \times C[0, \infty)$ таким образом, чтобы $F(u,v) = (\tilde{u}, \tilde{v})$, где

$$\tilde{u}(r) = a + \int_{0}^{r} sI(r,s)H(s)v^{\alpha}(s) ds, \tag{16}$$

$$\tilde{v}(r) = b + \int_{0}^{r} sI(r,s)K(s)u^{\beta}(s) ds. \tag{17}$$

Покажем, что F отображает Y_1 в себя. Очевидно, $\tilde{u}(r) \ge a$ и $\tilde{v}(r) \ge b$. Пусть $0 \le r \le r_0$. Тогда, в силу неравенства (12) и определения Y_1, имеем

$$\tilde{u}(r) = a + \int_{0}^{r} sI(r,s)H(s)v^{\alpha}(s) ds \le$$

$$\le a + \frac{1}{N-2} \int_{0}^{r} sH(s)v^{\alpha}(s) ds =$$

$$= a + \frac{(2b)^{\alpha}}{N-2} \int_{0}^{r} sH(s) ds \le a + \frac{a}{2} \le 2a.$$

Аналогично получаем, что $\tilde{v}(r) \le 2b$.

Пусть $r \ge r_0$. Тогда, в силу неравенств (2), (12), (13) и (10), имеем

$$\tilde{u}(r) \le a + \frac{1}{N-2} \int_{r_0}^{r} sH(s)v^{\alpha}(s) ds +$$

$$+ \frac{1}{N-2} \int_{r_0}^{r} sH(s)v^{\alpha}(s) ds \le \frac{3}{2} a +$$

$$+ \frac{L_1 (2b)^{\alpha}}{N-2} \int_{r_0}^{r} \frac{s^{1-\lambda+\alpha(2-\mu)} \ln^{-\nu+\alpha n} s}{r_0^{2-\mu} \ln^n r_0} ds \le$$

$$\le \frac{3}{2} a + \frac{L_1 C_1 (2b)^{\alpha}}{N-2} \cdot \frac{\ln^{1-\nu+\alpha n} r}{\ln^m r_0} \le$$

$$\le \frac{3}{2} a + \frac{a}{2} \cdot \frac{\ln^m r}{\ln^m r_0} \le \frac{2a \ln^m r}{\ln^m r_0}.$$

Аналогично, в силу (3), (14), (15), (11), выводим неравенство $\tilde{v}(r) \le 2br^{2-\mu} \ln^n r \Big/ \left(r_0^{2-\mu} \ln^n r_0 \right)$.

Таким образом, оператор F отображает Y_1 в себя. Доказательство того, что оператор F является непрерывным и компактным оператором на Y_1, проводится аналогично тому, как сделано в [1, с. 254–255]. Для полноты изложения приведем это доказательство. Пусть (u, v) и (u_m, v_m), $m=1,2,\dots$ – вектор-функции из Y_1 такие, что $(u_m, v_m) \to (u, v)$ при $m \to \infty$ равномерно на каждом компактном подмножестве $[0, \infty)$. Пусть $F(u_m, v_m) = (\tilde{u}_m, \tilde{v}_m)$ и $F(u,v) = (\tilde{u}, \tilde{v})$. Тогда

$$\left| \tilde{u}_m(r) - \tilde{u}(r) \right| \le$$

$$\le \int_{0}^{r} sH(s)I(r,s) \left| v_m^{\alpha}(s) - v^{\alpha}(s) \right| ds \le$$

$$\le \frac{1}{N-2} \int_{0}^{r} sH(s) \left| v_m^{\alpha}(s) - v^{\alpha}(s) \right| ds.$$

Так как функции $h_m(s) = sH(s)|v_m^{\alpha}(s) - v^{\alpha}(s)|$, $m \in \mathbf{N}$ удовлетворяют неравенству

$h_m(s)\le 2sH(s)B_1^{\alpha}(s)$ при любых $s\ge 0$ и $h_m(s)\to 0$ при $m\to\infty$ в каждой точке $s\ge 0$, то по теореме Лебега $\tilde{u}_m(r)\to\tilde{u}(r)$ при $m\to\infty$ равномерно на каждом компактном подмножестве $[0,\infty)$. Аналогично получаем $\tilde{v}_m(r)\to\tilde{v}(r)$ при $m\to\infty$ равномерно на каждом компактном подмножестве $[0,\infty)$. Следовательно, оператор F является непрерывным на Y_1.

Покажем, что $F(Y_1)$ является предкомпактом. Для этого достаточно показать, что $F(Y_1)$ является множеством равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным на каждом компактном подмножестве $[0,\infty)$. Заметим, что при любой вектор-функции $(u,v)\in Y_1$ для вектор-функции $(\tilde{u},\tilde{v})$, определенной в соответствии с (16) и (17), при $r\ge 0$ выполняются неравенства

$$0\le\tilde{u}'(r)=\int_0^r\left(\frac{s}{r}\right)^{N-1}H(s)v^{\alpha}(s)ds\le$$

$$\le\int_0^r H(s)B_1^{\alpha}(s)ds,$$

$$0\le\tilde{v}'(r)=\int_0^r\left(\frac{s}{r}\right)^{N-1}H(s)u^{\beta}(s)ds\le$$

$$\le\int_0^r H(s)A_1^{\beta}(s)ds.$$

Легко заметить, что $\tilde{u}'(r)$ и $\tilde{v}'(r)$ ограничены на любом компактном подмножестве $[0,\infty)$. Таким образом, по теореме Шаудера–Тихонова о неподвижной точке оператор F имеет неподвижную точку в Y_1. Так как при различном выборе констант a и b получаются различные решения и существует бесконечное множество возможных вариантов выбора этих постоянных, то существует бесконечно много положительных радиально симметричных целых решений системы (1).

В силу симметрии исходной системы случаи в) и б) аналогичны.

Рассмотрим случай г). Выберем константы C_1 и C_2 так, чтобы при любом $r>r_0$ выполнялись следующие неравенства:

$$\int_{r_0}^{r}\frac{s^{-1}\ln^{-\nu+\alpha l}s}{\ln^{l}r_0}ds\le\frac{C_1\ln^{1-\nu+\alpha l}r}{\ln^{k}r_0},\qquad(18)$$

$$\int_{r_0}^{r}\frac{s^{-1}\ln^{-\xi+\beta k}s}{\ln^{k}r_0}ds\le\frac{C_2\ln^{1-\xi+\beta k}r}{\ln^{l}r_0},\qquad(19)$$

где $k=(1-\nu+\alpha(1-\xi))/(1-\alpha\beta)>0$, $l=(\beta(1-\nu)+$ $+1\xi)/(1-\alpha\beta)>0$. Выбор таких постоянных C_1 и C_2 возможен в силу существования конечных положительных пределов при $r\to\infty$ функций

$$\int_{r_0}^{r}s^{-1}\ln^{-\nu+\alpha l}s\,ds/\ln^{1-\nu+\alpha l}r,$$

$$\int_{r_0}^{r}s^{-1}\ln^{-\xi+\beta k}s\,ds/\ln^{1-\xi+\beta k}r$$

и монотонности интегралов $\int_{r_0}^{r}s^{-1}\ln^{-\nu+\alpha l}s\,ds$, $\int_{r_0}^{r}s^{-1}\ln^{-\xi+\beta k}s\,ds$ как функций от верхнего предела.

Пусть постоянные a и b в (4), (5) удовлетворяют неравенствам (12)–(15). Положим

$$A_2(r)=\begin{cases}2a & \text{при } 0\le r\le r_0,\\ \dfrac{2a\ln^{k}r}{\ln^{k}r_0} & \text{при } r_0\le r,\end{cases}$$

$$B_2(r)=\begin{cases}2b & \text{при } 0\le r\le r_0,\\ \dfrac{2b\ln^{l}r}{\ln^{l}r_0} & \text{при } r_0\le r.\end{cases}$$

Рассмотрим пространство Y_2 непрерывных вектор-функций (u,v), определенных на $[0,\infty)$, которые удовлетворяют неравенствам $a\le u(r)\le A_2(r)$, $b\le v(r)\le B_1(r)$, при любом $r\ge 0$. Очевидно, Y_2 – замкнутое выпуклое подмножество пространства $C[0,\infty)\times C[0,\infty)$ с топологией равномерной сходимости.

Покажем, что F отображает Y_2 в себя. Очевидно, $\tilde{u}(r)\ge a$ и $\tilde{v}(r)\ge b$. Пусть $0\le r\le r_0$, тогда, в силу неравенств (12), (14) и определения Y_2, справедливы оценки $\tilde{u}(r)\le 2a$, $\tilde{v}(r)\le 2b$. Доказательство этого факта проводится аналогично тому, как это сделано в случае б).

Пусть $r\ge r_0$. Тогда, в силу неравенств (2), (12), (13) и (18), имеем

$$\tilde{u}(r)\le a+\frac{1}{N-2}\int_0^{r_0}sH(s)v^{\alpha}(s)ds+$$

$$+\frac{1}{N-2}\int_{r_0}^{r}sH(s)v^{\alpha}(s)ds\le\frac{3}{2}a+$$

$$+\frac{L_1(2b)^{\alpha}}{N-2}\int_{r_0}^{r}\frac{s^{-1}\ln^{-\nu+\alpha l}s}{\ln^{l}r_0}ds\le$$

$$\le \frac{3}{2}a + \frac{L_1 C_1 (2b)^\alpha}{N-2} \cdot \frac{\ln^{1-\nu+\alpha l} r}{\ln^k r_0} \le$$
$$\le \frac{3}{2}a + \frac{a}{2} \cdot \frac{\ln^k r}{\ln^k r_0} \le \frac{2a \ln^k r}{\ln^k r_0}.$$

Аналогично получаем, что $\tilde{v}(r) \le 2b \ln^l r / \ln^l r_0$.

Таким образом, показано, что оператор F отображает Y_2 в себя. Доказательство того, что оператор F является непрерывным и компактным в Y_2, проводится аналогично случаю б). Следовательно, по теореме Шаудера–Тихонова о неподвижной точке, оператор F имеет неподвижную точку в Y_2 и, значит, существует бесконечно много положительных радиально симметричных целых решений системы (1). Теорема доказана.

Аналогично теореме 2 доказываются следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть в системе* (1) $x \in R^2$, $\alpha\beta > 1$ *и коэффициенты при некоторых постоянных* $r_0 > e$, $L_1 > 0$, $L_2 > 0$, λ, μ, ν, ξ *и всех значениях* $r > r_0$ *удовлетворяют неравенствам*

$$H(r) \le \frac{L_1}{r^2 \ln^\lambda r (\ln\ln r)^\nu}, \; K(r) \le \frac{L_2}{r^2 \ln^\mu r (\ln\ln r)^\xi}.$$

Тогда, если выполняется одно из условий

а)

$$\begin{cases} 1-\lambda+\alpha(2+\beta-\mu) < 0, \\ 1-\mu+\beta(2+\alpha-\lambda) < 0, \end{cases} \tag{20}$$

б)

$$\begin{cases} \lambda > \alpha+1, \\ 1-\lambda+\alpha(2+\beta-\mu) = 0, \\ 1-\nu-\alpha\xi < 0, \\ \beta(1-\nu)-\xi < 0, \end{cases} \tag{21}$$

в)

$$\begin{cases} \lambda < \alpha+1, \\ 1-\mu+\beta(2+\alpha-\lambda) = 0, \\ -\nu+\alpha(1-\xi) < 0, \\ -\beta\nu+1-\xi < 0, \end{cases} \tag{22}$$

г)

$$\begin{cases} \lambda = \alpha+1, \\ \mu = \beta+1, \\ 1-\nu+\alpha(1-\xi) < 0, \\ \beta(1-\nu)+1-\xi < 0, \end{cases} \tag{23}$$

то существует бесконечно много положительных радиально симметричных целых решений системы (1).

Теорема 4. *Пусть в системе (1)* $x \in R^1$, $\alpha\beta > 1$ *и коэффициенты при некоторых постоянных* $r_0 > e$, $L_1 > 0$, $L_2 > 0$, λ, μ, ν, ξ *и всех значениях* $r > r_0$ *удовлетворяют неравенствам (2) и (3). Тогда, если выполняется одно из условий (20), (21), (22), (23), то существует бесконечно много положительных радиально симметричных целых решений данной системы.*

Заключение. В работе получены достаточные условия существования целых положительных радиально симметричных целых решений системы полулинейных эллиптических уравнений с нелинейностью степенного вида. Полученные результаты являются обобщением ранее установленных в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Teramoto, T. Existence and nonexistence of positive entire solutions of second order semilinear elliptic systems / T. Teramoto // Funkcialaj Ekvacioj. – 1999. – Vol. 42. – P. 241–260.
2. Teramoto, T. On nonnegative entire solutions of second-order semilinear elliptic systems / T. Teramoto // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. – 2003. – Vol. 2003, № 94. – P. 1–22.
3. Kawano, N. On Positive entire solutions of a class of second order semilinear elliptic systems / N. Kawano, T. Kusano // Mathematische Zeitschrift. – 1984. – Vol. 186. – P. 187–197.
4. Lair, A.V. Existence of Entire Large Positive Solutions of Semilinear Elliptic Systems / A.V. Lair, A.W. Wood // J. Diff. Equations. – 2000. – Vol. 164, № 2. – P. 380–394.
5. Teramoto, T. A Liouville type theorem for semilinear elliptic systems / T. Teramoto, H. Usami // Pacific J. Math. – 2002. – Vol. 204, № 1. – P. 247–255.
6. Zhang, Z. Existence of Entire Solutions for Semilinear Elliptic Systems under the Keller-Osserman Condition / Z. Zhang, Y. Shi, Y. Xue // Electron. J. Diff. Eqns. – 2011. – Vol. 2011, № 39. – P. 1–9.

Поступила в редакцию 19.10.2011. Принята в печать 28.12.2011

Адрес для корреспонденции: e-mail: sergeenko@vsu.by – Сергеенко С.В.