УДК 512.543

О свободных подгруппах в обобщенных тетраэдральных группах типа (3, 8, 2, 2, 2, 2)

В.В. Беняш-Кривец*, Я.А. Жуковец**
**Белорусский государственный университет*
***Учреждение образования «Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка»*

В статье рассматриваются обобщенные тетраэдральные группы с копредставлением $\Gamma=\left\langle a,b,c \middle| a^3=b^8=c^2=R(a,b)^2=(bc)^2=(ac)^2=1\right\rangle$, где $R(a,b)=a^{k_1}b^{l_1}a^{k_2}b^{l_2}\dots a^{k_s}b^{l_s}$, $1\le k_i\le 2, 1\le l_i\le 7$, $K=k_1+\dots+k_s$, $L=l_1+\dots+l_s$. Доказано, что в следующих случаях Γ содержит неабелеву свободную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса: 1) s – нечетное; 2) s – четное и либо $K\not\equiv 0 \pmod 3$, либо $L\not\equiv 4 \pmod 8$; 3) $s\le 6$.

Ключевые слова: *обобщенная тетраэдральная группа, альтернатива Титса, свободная группа.*

On free subgroups of generalized tetrahedron groups of (3, 8, 2, 2, 2, 2) type

V.V. Beniash-Kryvets*, Y.A. Zhukovets**
**Belarusian State University*
***Educational establishment «Belarusian State M. Tank Pedagogical University»*

We consider generalized tetrahedron groups with corepresentation $\Gamma=\left\langle a,b,c \middle| a^3=b^8=c^2=R(a,b)^2=(bc)^2=(ac)^2=1\right\rangle$, where $R(a,b)=a^{k_1}b^{l_1}a^{k_2}b^{l_2}\dots a^{k_s}b^{l_s}$, $1\le k_i\le 2, 1\le l_i\le 7$, $K=k_1+\dots+k_s$, $L=l_1+\dots+l_s$. It is proved that in the following cases Γ contains a non-abelian free subgroup and hence satisfies the Tits alternative: 1) s is odd; 2) s is even and either $K\not\equiv 0 \pmod 3$ or $L\not\equiv 4 \pmod 8$; 3) $s\le 6$.

Key words: *a generalized tetrahedron group, the Tits alternative, a free group.*

Говорят, что группа G удовлетворяет альтернативе Титса, если G содержит либо неабелеву свободную подгруппу, либо разрешимую подгруппу конечного индекса. Обобщенные тетраэдральные группы имеют копредставление

$$\Gamma=\left\langle a,b,c \middle| \begin{array}{l} a^{k_1}=b^{k_2}=c^{k_3}=R_{12}(a,b)^l= \\ =R_{23}(b,c)^m=R_{13}(a,c)^n=1 \end{array}\right\rangle,$$

где $k_1,k_2,k_3,l,m,n\ge 2$, R_{ij} – циклически редуцированное слово, которое не является собственной степенью. Розенбергер и Файн в [1] выдвинули гипотезу, что каждая обобщенная тетраэдральная группа удовлетворяет альтернативе Титса. К настоящему времени эта гипотеза доказана для всех обобщенных тетраэдральных групп (см. [1–2]), кроме групп, имеющих копредставление

$$\Gamma=\left\langle a,b,c \middle| \begin{array}{l} a^{k_1}=b^{k_2}=c^{k_3}=(a^{\alpha}b^{\beta})^2= \\ =(b^{\gamma}c^{\delta})^{k_4}=R_{13}(a,c)^n=1 \end{array}\right\rangle,$$

для которого выполнено одно из условий:

1) $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}+\frac{1}{n}\ge 1, k_4=2;$

2) $R_{13}=a^{\eta}c^{\theta}$, $n=3,4,5$, $k_4=3$,
$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}+\frac{1}{n}\ge \frac{7}{6};$

3) $R_{13}=a^{\eta_1}c^{\theta_1}a^{\eta_2}c^{\theta_2}$, $k_4=3$, $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}\ge \frac{2}{3}.$

В данной работе мы рассмотрим группы вида $\Gamma=\left\langle a,b,c \middle| a^3=b^8=c^2=R(a,b)^2=(bc)^2=(ac)^2=1\right\rangle.$

Доказывается следующая

Теорема. *Пусть*

$$\Gamma=\left\langle a,b,c \middle| \begin{array}{l} a^3=b^8=c^2=R(a,b)^2= \\ =(bc)^2=(ac)^2=1 \end{array}\right\rangle -$$

обобщенная тетраэдральная группа, где $R(a,b)=a^{k_1}b^{l_1}a^{k_2}b^{l_2}\dots a^{k_s}b^{l_s}$, $1\le k_i\le 2$, $1\le l_i\le 7$. *Положим* $K=k_1+\dots+k_s$, $L=l_1+\dots+l_s$. *В сле-*

дующих случаях Γ *содержит неабелеву свободную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса: 1)* s *– нечетное; 2)* s *– четное и либо* $K \not\equiv 0 \,(\bmod 3)$, *либо* $L \not\equiv 4 \,(\bmod 8)$*; 3)* $s \le 6$.

Рассмотрим подгруппу Γ_1 группы Γ, порожденную элементами a, b. Тогда $\Gamma_1 \lhd \Gamma$, индекс $[\Gamma:\Gamma_1] = 2$ и Γ_1 имеет копредставление $\Gamma_1 = \left\langle a, b \,\middle|\, a^3 = b^8 = R(a,b)^2 = R(a^{-1}, b^{-1})^2 = 1 \right\rangle$. Таким образом, если Γ_1 содержит свободную неабелеву подгруппу, то и Γ содержит такую подгруппу.

Далее мы будем обозначать через $[A]$ образ матрицы $A \in SL_2(\mathbf{C})$ в $PSL_2(\mathbf{C})$, через $\operatorname{tr} A$ – след матрицы A. Подгруппа $H \subset PSL_2(\mathbf{C})$ называется элементарной, если любые два элемента бесконечного порядка из H имеют общий ненулевой собственный вектор. Неэлементарная подгруппа H из $PSL_2(\mathbf{C})$ содержит неабелеву свободную подгруппу [3]. Там же доказано, что если H порождена двумя элементами $[A]$, $[B]$, то H неэлементарна тогда и только тогда, когда H неприводима, бесконечна и отлична от бесконечной группы диэдра. При этом H является бесконечной группой диэдра в точности тогда, когда хотя бы два из трех чисел $\operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr} B$, $\operatorname{tr} AB$ равны нулю. Конечными подгруппами в $PSL_2(\mathbf{C})$ являются циклические группы, группы диэдра D_n, а также A_4, S_4, A_5. Нетрудно показать, что элемент $[X] \in PSL_2(\mathbf{C})$ имеет порядок $n \ge 2$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} X = 2\cos\dfrac{\pi u}{n}$, где $(u, n) = 1$. Гомоморфизм

$$\rho : \Gamma' = \left\langle a, b \,\middle|\, \begin{aligned} &a^k = b^l = R(a,b)^m = \\ &= R(a^{-1}, b^{-1})^m = 1 \end{aligned} \right\rangle \to PSL_2(\mathbf{C})$$

будем называть существенным, если образы элементов a, b, $R(a,b)$, $R(a^{-1}, b^{-1})$ имеют порядки k, l, m, m соответственно. Группу Γ' будем называть псевдоконечной, если образ $\rho(\Gamma')$ конечен для любого существенного представления ρ. Идея доказательства теоремы состоит в том, чтобы построить представление $\rho: G \to PSL_2(\mathbf{C})$, где G – исследуемая группа, такое, что $\rho(G)$ – неэлементарная подгруппа. Мы используем стандартные факты и обозначения из теории характеров Фрике (см., например, [4–6]).

Отметим также следующий факт: пара матриц $A, B \in SL_2(\mathbf{C})$ порождает приводимую подгруппу тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} ABA^{-1}B^{-1} = 2$, а это равносильно условию

$$(\operatorname{tr} A)^2 + (\operatorname{tr} B)^2 + (\operatorname{tr} AB)^2 - \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B \operatorname{tr} AB - 4 = 0. \quad (1)$$

Пусть F_3 – свободная группа с базисом g_1, g_2, g_3 и $w \in F_3$ – произвольный элемент. Обозначим $x_i = \tau_{g_i}$, $y_{ij} = \tau_{g_i g_j}$, $z_{ijk} = \tau_{g_i g_j g_k}$. В [5] доказано, что

$$\tau_w = A_w(x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23}) + \\ + B_w(x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23}) z_{123},$$

где

$A_w(x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23})$, $B_w(x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23})$ – многочлены от переменных $x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23}$. Пусть

$$P = x_1 y_{23} + x_2 y_{13} + x_3 y_{12} - x_1 x_2 x_3,$$

$$Q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_{12}^2 + y_{13}^2 + y_{23}^2 + \\ + y_{12} y_{13} y_{23} - x_1 x_2 y_{12} - x_1 x_3 y_{13} - x_2 x_3 y_{23} - 4.$$

Тогда z_{123} и z_{132} – корни квадратного уравнения

$$z^2 - Pz + Q = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим группу

$$\Gamma_1 = \left\langle a, b \,\middle|\, a^3 = b^8 = R(a,b)^2 = R(a^{-1}, b^{-1})^2 = 1 \right\rangle.$$

Пусть $Q_R(x, y, z)$ – полином Фрике элемента R. Положим $g(z) = Q_R(1, 2\cos\dfrac{\pi}{8}, z)$. Если z_0 – корень $g(z)$, то существуют матрицы $A, B \in SL_2(\mathbf{C})$ такие, что $\operatorname{tr} A = 1$, $\operatorname{tr} B = 2\cos\dfrac{\pi}{8}$, $\operatorname{tr} AB = z_0$ и $\operatorname{tr} R(AB) = 0$ (см. [7], лемма 2). Тогда $[A]^3 = [B]^8 = R^2([A],[B]) = 1$ и, так как $\operatorname{tr} R(A^{-1}, B^{-1}) = Q_R(\operatorname{tr} A^{-1}, \operatorname{tr} B^{-1}, \operatorname{tr} A^{-1}B^{-1}) = Q_R(\operatorname{tr} A, \operatorname{tr} B, \operatorname{tr} AB) = g(z_0) = 0$, то отображение $a \to [A]$, $\mathrm{b} \to [B]$ задает представление группы Γ_1. Пусть z_0 – некоторый корень полинома $g(z)$. Обозначим через $G(z_0)$ группу, порожденную $[A]$, $[B]$. Так как $\operatorname{tr} A = 1$ и $\operatorname{tr} B = 2\cos\dfrac{\pi}{8}$, то $G(z_0)$ не является группой диэдра, а также отлична от групп A_4, S_4, A_5 [3]. Если z_0 не является корнем уравнения $z^2 - 2\cos\dfrac{\pi}{8} z - 3 + 4\cos^2\dfrac{\pi}{8} = 0$, т.е. $z_0 \ne 2\cos\dfrac{11\pi}{24}$,

$z_0 \neq 2\cos\frac{5\pi}{24}$, то из (1) следует, что группа $G(z_0)$ неприводима, а следовательно, неэлементарна. В этом случае группа Γ_1 содержит свободную неабелеву подгруппу.

Лемма 1. *Если s – нечетное, то существует существенный гомоморфизм $\rho: \Gamma_1 \to PSL_2(\mathbf{C})$ с неэлементарным образом.*

Доказательство. Пусть не существует существенного гомоморфизма $\rho: \Gamma_1 \to PSL_2(\mathbf{C})$ с неэлементарным образом. В этом случае многочлен $g(z)$ имеет вид:

$$g(z) = A_0\left(z - 2\cos\frac{11\pi}{24}\right)^{s_1}\left(z - 2\cos\frac{5\pi}{24}\right)^{s_2},$$

где $s_1 + s_2 = s$. Пусть для определенности $s_1 > s_2$. Чтобы найти коэффициент A_0, рассмотрим полиномы $P_n(x)$, которые удовлетворяют начальным условиям $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$ и рекуррентному соотношению $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$. В [8] доказано, что если $w = g^{u_1}h^{v_1}\cdots g^{u_s}h^{v_s} \in F_2$, где $s \geq 1$, – циклически редуцированное слово, и $x = \tau_g$, $y = \tau_h$, $z = \tau_{gh}$, то полином Фрике $Q_w \in \mathbf{Z}[x, y, z]$ имеет вид $Q_w(x, y, z) = M_s(x, y)z^s + \cdots + M_0(x, y)$, где $M_s(x, y) = \prod_{i=1}^{s} P_{u_i-1}(x)P_{v_i-1}(y)$. Следовательно,

$$A_0 = \prod_{i=1}^{s} P_{k_i-1}\ 1\ P_{l_i-1}\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= \left(2\cos\frac{\pi}{8}\right)^{h_1}\ \sqrt{2}+1\ ^{h_2}\ \sqrt{2}\ ^{h_3},$$

где h_1 – количество двоек, четверок и шестерок среди l_i; h_2 – количество троек и пятерок среди l_i; h_3 – количество четверок среди l_i.

Имеем $g(z) = Q_R(1, 2\cos\frac{\pi}{8}, z) \in K[z]$, где $K = Q(2\cos\frac{\pi}{8})$. Запишем

$$g(z) = A_0\left(z - 2\cos\frac{11\pi}{24}\right)^{s_1 - s_2}\left(z^2 - 2\cos\frac{\pi}{8}z - 1 + \sqrt{2}\right)^{s_2}.$$

Рассмотрим коэффициент $M_{s_1+s_2-1} = A_0\left(-2\cos\frac{11\pi}{24}(s_1 - s_2) - 2\cos\frac{\pi}{8}s_2\right)$ при $z^{s_1+s_2-1}$. Так как $2\cos\frac{11\pi}{24} \notin K$ и $s_1 - s_2 \neq 0$, то $M_{s_1+s_2-1} \notin K$. Получили противоречие. Аналогичный результат имеем при $s_1 < s_2$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если*

$$g(z) = A_0\left(z - 2\cos\frac{11\pi}{24}\right)^{s_1}\left(z - 2\cos\frac{5\pi}{24}\right)^{s_2},$$

то s четно, $s_1 = s_2$ и $K \equiv 0 \pmod 3$, $L \equiv 4 \pmod 8$, где $K = k_1 + \ldots + k_s$, $L = l_1 + \ldots + l_s$.

Доказательство. Если $s_1 \neq s_2$, то $g(z)$ не может иметь требуемый вид, как следует из доказательства леммы 1. Положим $A = \begin{pmatrix} \varepsilon^8 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-8} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 0 \\ t & \varepsilon^{-3} \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}$. Тогда $\operatorname{tr} A = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$, $\operatorname{tr} B = 2\cos\frac{\pi}{8}$, $\operatorname{tr} AB = t + 2\cos\frac{11\pi}{24}$. Имеем равенство

$$\operatorname{tr} R(A, B) = g\left(t + 2\cos\frac{11\pi}{24}\right) =$$

$$= A_0 t^{s_1}\left(t + 2\cos\frac{11\pi}{24} - 2\cos\frac{5\pi}{24}\right)^{s_2}.$$

В этом случае свободный член в $g\left(t + 2\cos\frac{11\pi}{24}\right)$ равен нулю.

С другой стороны, свободный член полинома $\operatorname{tr} R(A, B)$ равен $2\cos\frac{8K + 3L}{24}\pi$. Следовательно, $K \equiv 0 \pmod 3$, $L \equiv 4 \pmod 8$.

Следствие. *Если s – нечетное или s – четное и существует существенный гомоморфизм $\rho: \Gamma_1 \to PSL_2(\mathbf{C})$ с неэлементарным образом, то группа Γ_1 содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Таким образом, в дальнейшем будем рассматривать группы, для которых $g(z) = A_0\left(z - 2\cos\frac{11\pi}{24}\right)^{\frac{s}{2}}\left(z - 2\cos\frac{5\pi}{24}\right)^{\frac{s}{2}}$ при любом существенном гомоморфизме $\rho: \Gamma_1 \to PSL_2(\mathbf{C})$.

Будем говорить, что два циклически редуцированных слова $w(a, b), w_1(a, b) \in \langle a, b \mid a^k = b^l = 1\rangle$ *эквивалентны*, если $w(a, b)$ может быть преобразовано в $w_1(a, b)$ последовательностью преобразований: 1) циклическая перестановка; 2) переход к обратному слову; 3) автоморфизм группы $\langle a \mid a^l = 1 \rangle$ или $\langle b \mid b^k = 1 \rangle$. Если два слова $w(a,b)$, $w_1(a,b)$ эквивалентны, то будем говорить, что соответствующие обобщенные тетраэдральные группы эквивалентны. Ясно, что эквивалентные группы изоморфны.

Лемма 3. *При* $s \le 6$ *с точностью до эквивалентности существует три обобщенные тетраэдральные группы* $\Gamma_{1,i} = \langle a, b \mid a^3 = b^8 = R_i(a,b)^2 = R_i(a^{-1}, b^{-1})^2 = 1 \rangle$, *все образы которых приводимы для любого существенного представления. Соответствующие слова* $R_i(a,b)$ *перечислены в таблице*:

$s = 2$	$R_1 = aba^2b^3$, $R_2 = ab^2a^2b^2$
$s = 4$	$R_3 = aba^2bab^5a^2b^5$

Группы из леммы 3 найдены с использованием лемм 1, 2 и с помощью компьютерных вычислений с программой Maple.

Следующая лемма завершает доказательство теоремы.

Лемма 4. *Группы* $\Gamma_{1,i}$, $i = \overline{1,3}$, *содержат неабелеву свободную подгруппу.*

Доказательство. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм $\varphi : \Gamma_{1,i} \to C_4 : a \mapsto 1, b \mapsto c$, где $C_4 = \langle c \mid c^4 = 1 \rangle$ – циклическая группа порядка 4. Пусть $T_i = \mathrm{Ker}\,\varphi$. Найдем копредставление групп T_i, используя переписывающий процесс Рейдемейстера–Шрейера:

$$\begin{aligned} T_1 = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid x_1^3 = x_2^3 = x_3^3 = x_4^3 = x_5^2 = \\ = (x_1x_2^2x_5)^2 = (x_2x_3^2x_5)^2 = (x_3x_4^2x_5)^2 = \\ = (x_4x_5x_1^2)^2 = (x_1^2x_5x_4)^2 = (x_2^2x_1x_5)^2 = \\ = (x_3^2x_4x_5)^2 = (x_4^2x_3x_5)^2 = 1 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid x_1^3 = x_2^3 = x_3^3 = x_4^3 = x_5^2 = \\ = (x_1x_3^2x_5)^2 = (x_2x_4^2x_5)^2 = \\ = (x_3x_5x_1^2)^2 = (x_4x_5x_2^2)^2 = (x_1^2x_5x_3)^2 = \\ = (x_2^2x_5x_4)^2 = (x_3^2x_1x_5)^2 = (x_4^2x_2x_5)^2 = 1 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3 = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid x_1^3 = x_2^3 = x_3^3 = x_4^3 = x_5^2 = \\ = (x_1x_2^2x_3x_5x_4^2)^2 = (x_2x_3^2x_4x_1^2x_5)^2 = \\ = (x_3x_4^2x_5x_1x_5x_2^2x_5)^2 = (x_4x_5x_1^2x_2x_5x_3^2x_5)^2 = \\ = (x_1^2x_5x_4x_3^2x_5x_2x_5)^2 = (x_2^2x_1x_5x_4^2x_5x_3x_5)^2 = \\ = (x_3^2x_2x_1^2x_4x_5)^2 = (x_4^2x_3x_2^2x_5x_1)^2 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Для каждой из групп T_i рассмотрим ее факторгруппу D_i, получающуюся из T_i добавлением соотношений $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Легко видеть, что $D_i \cong \langle c \mid c^3 = 1 \rangle * \langle d \mid d^2 = 1 \rangle$, т.е. D_i является свободным произведением циклических групп порядка 2 и 3. Значит, D_i содержит неабелеву свободную подгруппу. Следовательно, этим же свойством обладают группы T_i, а вместе с ними и группы $\Gamma_{1,i}$. Лемма 4 и теорема доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fine B., Rosenberger G. // Algebraic generalizations of discrete groups. – N. Y., 1999. – P. 274.
2. Howie J., Kopteva N. // J. Group Theory. – 2006. – Vol. 9. – P. 173.
3. Majeed A., Masson A.W. // Glasgow Math. J. – 1978. – Vol. 19. – P. 45.
4. Horowitz R. // Comm. Pure Appl. Math. – 1972. – Vol. 25. – P. 635.
5. Magnus W. // Result. der Math. – 1981. – Vol. 4. – P. 171.
6. Culler M., Shalen P. // Ann. of Math. 1983. – Vol. 117. – P. 109.
7. Беняш-Кривец В.В., Хуа Сюин // Известия Гомельского госуниверситета. – 2008. – № 2(74). – С. 13.
8. Traina C. // Proc. Amer. Math. Soc. – 1980. – Vol. 79. – P. 369.
9. Vinberg E.B., Kaplinsky R. // Groups: topological, combinatorial and arithmetic aspects. Papers from the conference, Bielefeld, 1999. Cambridge, 2004. LMS Lecture Note Series 311. – P. 564.

Поступила в редакцию 06.11.2011. Принята в печать 28.12.2011

Адрес для корреспонденции: 220018, г. Минск, ул. Якубовского, д. 78, кв. 264, e-mail: benyash@bsu.by – Беняш-Кривец В.В.