УДК 512.543

# О свободных подгруппах в обобщенных тетраэдральных группах типа (3, 8, 2, 2, 2, 2)

**В.В. Беняш-Кривец*, Я.А. Жуковец****
**Белорусский государственный университет*
***Учреждение образования «Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка»*

*В статье рассматриваются обобщенные тетраэдральные группы с копредставлением* $\Gamma = \left\langle a,b,c \,\middle|\, a^3 = b^8 = c^2 = R(a,b)^2 = (bc)^2 = (ac)^2 = 1 \right\rangle$, *где* $R(a,b) = a^{k_1}b^{l_1}a^{k_2}b^{l_2}\ldots a^{k_s}b^{l_s}$, $1 \le k_i \le 2, 1 \le l_i \le 7$, $K = k_1 + \ldots + k_s$, $L = l_1 + \ldots + l_s$. *Доказано, что в следующих случаях* $\Gamma$ *содержит неабелеву свободную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса: 1)* $S$ *– нечетное; 2)* $S$ *– четное и либо* $K \not\equiv 0 \pmod 3$, *либо* $L \not\equiv 4 \pmod 8$*; 3)* $s \le 6$.

**Ключевые слова:** *обобщенная тетраэдральная группа, альтернатива Титса, свободная группа.*

# On free subgroups of generalized tetrahedron groups of (3, 8, 2, 2, 2, 2) type

**V.V. Beniash-Kryvets*, Y.A. Zhukovets****
**Belarusian State University*
***Educational establishment «Belarusian State M. Tank Pedagogical University»*

*We consider generalized tetrahedron groups with corepresentation* $\Gamma = \left\langle a,b,c \,\middle|\, a^3 = b^8 = c^2 = R(a,b)^2 = (bc)^2 = (ac)^2 = 1 \right\rangle$, *where* $R(a,b) = a^{k_1}b^{l_1}a^{k_2}b^{l_2}\ldots a^{k_s}b^{l_s}$, $1 \le k_i \le 2, 1 \le l_i \le 7$, $K = k_1 + \ldots + k_s$, $L = l_1 + \ldots + l_s$. *It is proved that in the following cases* $\Gamma$ *contains a non-abelian free subgroup and hence satisfies the Tits alternative: 1)* $S$ *is odd; 2)* $S$ *is even and either* $K \not\equiv 0 \pmod 3$ *or* $L \not\equiv 4 \pmod 8$*; 3)* $s \le 6$.

**Key words:** *a generalized tetrahedron group, the Tits alternative, a free group.*

Говорят, что группа $G$ удовлетворяет альтернативе Титса, если $G$ содержит либо неабелеву свободную подгруппу, либо разрешимую подгруппу конечного индекса. Обобщенные тетраэдральные группы имеют копредставление

$$\Gamma = \left\langle a,b,c \,\middle|\, \begin{array}{l} a^{k_1} = b^{k_2} = c^{k_3} = R_{12}(a,b)^l = \\ = R_{23}(b,c)^m = R_{13}(a,c)^n = 1 \end{array} \right\rangle,$$

где $k_1, k_2, k_3, l, m, n \ge 2$, $R_{ij}$ – циклически редуцированное слово, которое не является собственной степенью. Розенбергер и Файн в [1] выдвинули гипотезу, что каждая обобщенная тетраэдральная группа удовлетворяет альтернативе Титса. К настоящему времени эта гипотеза доказана для всех обобщенных тетраэдральных групп (см. [1–2]), кроме групп, имеющих копредставление

$$\Gamma = \left\langle a,b,c \,\middle|\, \begin{array}{l} a^{k_1} = b^{k_2} = c^{k_3} = (a^{\alpha}b^{\beta})^2 = \\ = (b^{\gamma}c^{\delta})^{k_4} = R_{13}(a,c)^n = 1 \end{array} \right\rangle,$$

для которого выполнено одно из условий:

1) $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_3} + \dfrac{1}{n} \ge 1, k_4 = 2;$

2) $R_{13} = a^{\eta}c^{\theta}$, $n = 3,4,5$, $k_4 = 3$,
$\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_3} + \dfrac{1}{n} \ge \dfrac{7}{6};$

3) $R_{13} = a^{\eta_1}c^{\theta_1}a^{\eta_2}c^{\theta_2}$, $k_4 = 3$, $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_3} \ge \dfrac{2}{3}.$

В данной работе мы рассмотрим группы вида $\Gamma = \left\langle a,b,c \,\middle|\, a^3 = b^8 = c^2 = R(a,b)^2 = (bc)^2 = (ac)^2 = 1 \right\rangle.$

Доказывается следующая

**Теорема.** *Пусть*

$$\Gamma = \left\langle a,b,c \,\middle|\, \begin{array}{l} a^3 = b^8 = c^2 = R(a,b)^2 = \\ = (bc)^2 = (ac)^2 = 1 \end{array} \right\rangle -$$

*обобщенная тетраэдральная группа, где* $R(a,b) = a^{k_1}b^{l_1}a^{k_2}b^{l_2}\ldots a^{k_s}b^{l_s}$, $1 \le k_i \le 2$, $1 \le l_i \le 7$. *Положим* $K = k_1 + \ldots + k_s$, $L = l_1 + \ldots + l_s$. *В следующих случаях* $\Gamma$ *содержит неабелеву сво-*

*бодную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса: 1) $s$ – нечетное; 2) $s$ – четное и либо $K \not\equiv 0 \pmod 3$, либо $L \not\equiv 4 \pmod 8$; 3) $s \le 6$.*

Рассмотрим подгруппу $\Gamma_1$ группы $\Gamma$, порожденную элементами $a, b.$ Тогда $\Gamma_1 \lhd \Gamma$, индекс $[\Gamma : \Gamma_1] = 2$ и $\Gamma_1$ имеет копредставление $\Gamma_1 = \langle a, b \,|\, a^3 = b^8 = R(a,b)^2 = R(a^{-1}, b^{-1})^2 = 1 \rangle$. Таким образом, если $\Gamma_1$ содержит свободную неабелеву подгруппу, то и $\Gamma$ содержит такую подгруппу.

Далее мы будем обозначать через $[A]$ образ матрицы $A \in SL_2(\mathbf{C})$ в $PSL_2(\mathbf{C})$, через $\operatorname{tr} A$ – след матрицы $A.$ Подгруппа $H \subset PSL_2(\mathbf{C})$ называется элементарной, если любые два элемента бесконечного порядка из $H$ имеют общий ненулевой собственный вектор. Неэлементарная подгруппа $H$ из $PSL_2(\mathbf{C})$ содержит неабелеву свободную подгруппу [3]. Там же доказано, что если $H$ порождена двумя элементами $[A], [B],$ то $H$ неэлементарна тогда и только тогда, когда $H$ неприводима, бесконечна и отлична от бесконечной группы диэдра. При этом $H$ является бесконечной группой диэдра в точности тогда, когда хотя бы два из трех чисел $\operatorname{tr} A,$ $\operatorname{tr} B,$ $\operatorname{tr} AB$ равны нулю. Конечными подгруппами в $PSL_2(\mathbf{C})$ являются циклические группы, группы диэдра $D_n$, а также $A_4, S_4, A_5$. Нетрудно показать, что элемент $[X] \in PSL_2(\mathbf{C})$ имеет порядок $n \ge 2$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} X = 2\cos\dfrac{\pi u}{n},$ где $(u,n) = 1.$ Гомоморфизм

$$\rho : \Gamma' = \left\langle a, b \,\middle|\, \begin{array}{l} a^k = b^l = R(a,b)^m = \\ = R(a^{-1}, b^{-1})^m = 1 \end{array} \right\rangle \to PSL_2(\mathbf{C})$$

будем называть существенным, если образы элементов $a,$ $b,$ $R(a,b),$ $R(a^{-1}, b^{-1})$ имеют порядки $k, l, m, m$ соответственно. Группу $\Gamma'$ будем называть псевдоконечной, если образ $\rho(\Gamma')$ конечен для любого существенного представления $\rho$. Идея доказательства теоремы состоит в том, чтобы построить представление $\rho : G \to PSL_2(\mathbf{C}),$ где $G$ – исследуемая группа, такое, что $\rho(G)$ – неэлементарная подгруппа. Мы используем стандартные факты и обозначения из теории характеров Фрике (см., например, [4–6]).

Отметим также следующий факт: пара матриц $A, B \in SL_2(\mathbf{C})$ порождает приводимую подгруппу тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} ABA^{-1}B^{-1} = 2,$ а это равносильно условию

$$(\operatorname{tr} A)^2 + (\operatorname{tr} B)^2 + (\operatorname{tr} AB)^2 - \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B \operatorname{tr} AB - 4 = 0. \quad (1)$$

Пусть $F_3$ – свободная группа с базисом $g_1, g_2, g_3$ и $w \in F_3$ – произвольный элемент. Обозначим $x_i = \tau_{g_i}$, $y_{ij} = \tau_{g_i g_j}$, $z_{ijk} = \tau_{g_i g_j g_k}$. В [5] доказано, что

$$\tau_w = A_w(x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23}) + \\ + B_w(x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23}) z_{123},$$

где $A_w(x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23}),$ $B_w(x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23})$ – многочлены от переменных $x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23}.$ Пусть

$$P = x_1 y_{23} + x_2 y_{13} + x_3 y_{12} - x_1 x_2 x_3,$$
$$Q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_{12}^2 + y_{13}^2 + y_{23}^2 + \\ + y_{12} y_{13} y_{23} - x_1 x_2 y_{12} - x_1 x_3 y_{13} - x_2 x_3 y_{23} - 4.$$

Тогда $z_{123}$ и $z_{132}$ – корни квадратного уравнения

$$z^2 - Pz + Q = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим группу

$$\Gamma_1 = \langle a, b \,|\, a^3 = b^8 = R(a,b)^2 = R(a^{-1}, b^{-1})^2 = 1 \rangle.$$

Пусть $Q_R(x, y, z)$ – полином Фрике элемента $R.$ Положим $g(z) = Q_R(1, 2\cos\dfrac{\pi}{8}, z).$ Если $z_0$ – корень $g(z),$ то существуют матрицы $A, B \in SL_2(\mathbf{C})$ такие, что $\operatorname{tr} A = 1,$ $\operatorname{tr} B = 2\cos\dfrac{\pi}{8},$ $\operatorname{tr} AB = z_0$ и $\operatorname{tr} R(AB) = 0$ (см. [7], лемма 2). Тогда $[A]^3 = [B]^8 = R^2([A],[B]) = 1$ и, так как $\operatorname{tr} R(A^{-1}, B^{-1}) = Q_R(\operatorname{tr} A^{-1}, \operatorname{tr} B^{-1}, \operatorname{tr} A^{-1}B^{-1}) =$ $= Q_R(\operatorname{tr} A, \operatorname{tr} B, \operatorname{tr} AB) = g(z_0) = 0$, то отображение $a \to [A],$ $\mathrm{b} \to [B]$ задает представление группы $\Gamma_1$. Пусть $z_0$ – некоторый корень полинома $g(z).$ Обозначим через $G(z_0)$ группу, порожденную $[A], [B].$ Так как $\operatorname{tr} A = 1$ и $\operatorname{tr} B = 2\cos\dfrac{\pi}{8},$ то $G(z_0)$ не является группой диэдра, а также отлична от групп $A_4, S_4, A_5$ [3]. Если $z_0$ не является корнем уравнения $z^2 - 2\cos\dfrac{\pi}{8} z - 3 + 4\cos^2\dfrac{\pi}{8} = 0,$ т.е. $z_0 \ne 2\cos\dfrac{11\pi}{24},$

$z_0 \neq 2\cos\frac{5\pi}{24}$, то из (1) следует, что группа $G(z_0)$ неприводима, а следовательно, неэлементарна. В этом случае группа $\Gamma_1$ содержит свободную неабелеву подгруппу.

**Лемма 1.** *Если $s$ – нечетное, то существует существенный гомоморфизм $\rho:\Gamma_1 \to PSL_2(\mathbf{C})$ с неэлементарным образом.*

Доказательство. Пусть не существует существенного гомоморфизма $\rho:\Gamma_1 \to PSL_2(\mathbf{C})$ с неэлементарным образом. В этом случае многочлен $g(z)$ имеет вид:

$$g(z) = A_0\left(z - 2\cos\frac{11\pi}{24}\right)^{s_1}\left(z - 2\cos\frac{5\pi}{24}\right)^{s_2},$$

где $s_1 + s_2 = s$. Пусть для определенности $s_1 > s_2$. Чтобы найти коэффициент $A_0$, рассмотрим полиномы $P_n(x)$, которые удовлетворяют начальным условиям $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$ и рекуррентному соотношению $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$. В [8] доказано, что если $w = g^{u_1}h^{v_1}\cdots g^{u_s}h^{v_s} \in F_2$, где $s \geq 1$, – циклически редуцированное слово, и $x = \tau_g$, $y = \tau_h$, $z = \tau_{gh}$, то полином Фрике $Q_w \in \mathbf{Z}[x, y, z]$ имеет вид $Q_w(x, y, z) = M_s(x, y)z^s + \cdots + M_0(x, y)$, где $M_s(x, y) = \prod_{i=1}^{s} P_{u_i-1}(x)P_{v_i-1}(y)$. Следовательно,

$$A_0 = \prod_{i=1}^{s} P_{k_i-1}\ 1\ P_{l_i-1}\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= \left(2\cos\frac{\pi}{8}\right)^{h_1}\ \sqrt{2}+1^{h_2}\ \sqrt{2}^{h_3},$$

где $h_1$ – количество двоек, четверок и шестерок среди $l_i$; $h_2$ – количество троек и пятерок среди $l_i$; $h_3$ – количество четверок среди $l_i$.

Имеем $g(z) = Q_R(1, 2\cos\frac{\pi}{8}, z) \in K[z]$, где $K = Q(2\cos\frac{\pi}{8})$. Запишем

$$g(z) = A_0\left(z - 2\cos\frac{11\pi}{24}\right)^{s_1-s_2}\left(z^2 - 2\cos\frac{\pi}{8}z - 1 + \sqrt{2}\right)^{s_2}.$$

Рассмотрим коэффициент $M_{s_1+s_2-1} = A_0\left(-2\cos\frac{11\pi}{24}(s_1 - s_2) - 2\cos\frac{\pi}{8}s_2\right)$ при $z^{s_1+s_2-1}$. Так как $2\cos\frac{11\pi}{24} \notin K$ и $s_1 - s_2 \neq 0$, то $M_{s_1+s_2-1} \notin K$. Получили противоречие. Аналогичный результат имеем при $s_1 < s_2$. Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Если*

$$g(z) = A_0\left(z - 2\cos\frac{11\pi}{24}\right)^{s_1}\left(z - 2\cos\frac{5\pi}{24}\right)^{s_2},$$

*то $s$ четно, $s_1 = s_2$ и $K \equiv 0 \pmod 3$, $L \equiv 4 \pmod 8$, где $K = k_1 + \ldots + k_s$, $L = l_1 + \ldots + l_s$.*

Доказательство. Если $s_1 \neq s_2$, то $g(z)$ не может иметь требуемый вид, как следует из доказательства леммы 1. Положим $A = \begin{pmatrix} \varepsilon^8 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-8} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 0 \\ t & \varepsilon^{-3} \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}$.

Тогда $\operatorname{tr} A = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$, $\operatorname{tr} B = 2\cos\frac{\pi}{8}$, $\operatorname{tr} AB = t + 2\cos\frac{11\pi}{24}$. Имеем равенство

$$\operatorname{tr} R(A, B) = g\left(t + 2\cos\frac{11\pi}{24}\right) =$$

$$= A_0 t^{s_1}\left(t + 2\cos\frac{11\pi}{24} - 2\cos\frac{5\pi}{24}\right)^{s_2}.$$

В этом случае свободный член в $g\left(t + 2\cos\frac{11\pi}{24}\right)$ равен нулю.

С другой стороны, свободный член полинома $\operatorname{tr} R(A, B)$ равен $2\cos\frac{8K + 3L}{24}\pi$. Следовательно, $K \equiv 0 \pmod 3$, $L \equiv 4 \pmod 8$.

**Следствие.** *Если $s$ – нечетное или $s$ – четное и существует существенный гомоморфизм $\rho:\Gamma_1 \to PSL_2(\mathbf{C})$ с неэлементарным образом, то группа $\Gamma_1$ содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Таким образом, в дальнейшем будем рассматривать группы, для которых $g(z) = A_0\left(z - 2\cos\frac{11\pi}{24}\right)^{\frac{s}{2}}\left(z - 2\cos\frac{5\pi}{24}\right)^{\frac{s}{2}}$ при любом существенном гомоморфизме $\rho:\Gamma_1 \to PSL_2(\mathbf{C})$.

Будем говорить, что два циклически редуцированных слова $w(a,b), w_1(a,b) \in \langle a, b \mid a^k = b^l = 1\rangle$ *эквивалентны*, если $w(a,b)$ может быть преобразовано в $w_1(a,b)$ последовательностью преобразований: 1) циклическая перестановка; 2) переход к обратному слову; 3) автоморфизм группы $\langle a \mid a^l = 1\rangle$ или $\langle b \mid b^k = 1\rangle$. Если два слова $w(a,b)$, $w_1(a,b)$ эквивалентны, то будем говорить, что соответствующие обобщенные тетраэдральные группы эквивалентны. Ясно, что эквивалентные группы изоморфны.

**Лемма 3.** *При $s \le 6$ с точностью до эквивалентности существует три обобщенные тетраэдральные группы*
$\Gamma_{1,i} = \langle a, b \mid a^3 = b^8 = R_i(a,b)^2 = R_i(a^{-1}, b^{-1})^2 = 1\rangle$,
*все образы которых приводимы для любого существенного представления. Соответствующие слова $R_i(a,b)$ перечислены в таблице*:

| | |
|---|---|
| $s = 2$ | $R_1 = aba^2b^3,\ R_2 = ab^2a^2b^2$ |
| $s = 4$ | $R_3 = aba^2bab^5a^2b^5$ |

Группы из леммы 3 найдены с использованием лемм 1, 2 и с помощью компьютерных вычислений с программой Maple.

Следующая лемма завершает доказательство теоремы.

**Лемма 4.** *Группы* $\Gamma_{1,i}$, $i = \overline{1,3}$, *содержат неабелеву свободную подгруппу.*

Доказательство. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм $\varphi : \Gamma_{1,i} \to C_4 : a \mapsto 1, b \mapsto c$, где $C_4 = \langle c \mid c^4 = 1\rangle$ – циклическая группа порядка 4. Пусть $T_i = \mathrm{Ker}\,\varphi$. Найдем копредставление групп $T_i$, используя переписывающий процесс Рейдемейстера–Шрейера:

$$T_1 = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid x_1^3 = x_2^3 = x_3^3 = x_4^3 = x_5^2 = \\ = (x_1x_2^2x_5)^2 = (x_2x_3^2x_5)^2 = (x_3x_4^2x_5)^2 = \\ = (x_4x_5x_1^2)^2 = (x_1^2x_5x_4)^2 = (x_2^2x_1x_5)^2 = \\ = (x_3^2x_4x_5)^2 = (x_4^2x_3x_5)^2 = 1\rangle,$$

$$T_2 = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid x_1^3 = x_2^3 = x_3^3 = x_4^3 = x_5^2 = \\ = (x_1x_3^2x_5)^2 = (x_2x_4^2x_5)^2 = \\ = (x_3x_5x_1^2)^2 = (x_4x_5x_2^2)^2 = (x_1^2x_5x_3)^2 = \\ = (x_2^2x_5x_4)^2 = (x_3^2x_1x_5)^2 = (x_4^2x_2x_5)^2 = 1\rangle,$$

$$T_3 = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid x_1^3 = x_2^3 = x_3^3 = x_4^3 = x_5^2 = \\ = (x_1x_2^2x_3x_5x_4^2)^2 = (x_2x_3^2x_4x_1^2x_5)^2 = \\ = (x_3x_4^2x_5x_1x_5x_2^2x_5)^2 = (x_4x_5x_1^2x_2x_5x_3^2x_5)^2 = \\ = (x_1^2x_5x_4x_3^2x_5x_2x_5)^2 = (x_2^2x_1x_5x_4^2x_5x_3x_5)^2 = \\ = (x_3^2x_2x_1^2x_4x_5)^2 = (x_4^2x_3x_2^2x_5x_1)^2 = 1\rangle.$$

Для каждой из групп $T_i$ рассмотрим ее факторгруппу $D_i$, получающуюся из $T_i$ добавлением соотношений $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Легко видеть, что $D_i \cong \langle c \mid c^3 = 1\rangle * \langle d \mid d^2 = 1\rangle$, т.е. $D_i$ является свободным произведением циклических групп порядка 2 и 3. Значит, $D_i$ содержит неабелеву свободную подгруппу. Следовательно, этим же свойством обладают группы $T_i$, а вместе с ними и группы $\Gamma_{1,i}$. Лемма 4 и теорема доказаны.

*ЛИТЕРАТУРА*


1. Fine B., Rosenberger G. // Algebraic generalizations of discrete groups. – N. Y., 1999. – P. 274.
2. Howie J., Kopteva N. // J. Group Theory. – 2006. – Vol. 9. – P. 173.
3. Majeed A., Masson A.W. // Glasgow Math. J. – 1978. – Vol. 19. – P. 45.
4. Horowitz R. // Comm. Pure Appl. Math. – 1972. – Vol. 25. – P. 635.
5. Magnus W. // Result. der Math. – 1981. – Vol. 4. – P. 171.
6. Culler M., Shalen P. // Ann. of Math. 1983. – Vol. 117. – P. 109.
7. Беняш-Кривец В.В., Хуа Сюин // Известия Гомельского госуниверситета. – 2008. – № 2(74). – С. 13.
8. Traina C. // Proc. Amer. Math. Soc. – 1980. – Vol. 79. – P. 369.
9. Vinberg E.B., Kaplinsky R. // Groups: topological, combinatorial and arithmetic aspects. Papers from the conference, Bielefeld, 1999. Cambridge, 2004. LMS Lecture Note Series 311. – P. 564.


*Поступила в редакцию 06.11.2011. Принята в печать 28.12.2011*
***Адрес для корреспонденции:*** 220018, г. Минск, ул. Якубовского, д. 78, кв. 264, e-mail: benyash@bsu.by – Беняш-Кривец В.В.