

ОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ АДАМАРА

С.А. Шлапаков

Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе объектом исследования является однородная задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка. В качестве производной выступает дробная производная Адамара [2]. Естественно возникает проблема построения аналитического решения такой задачи в пространстве суммируемых функций. Цель данного исследования – получить такое решение дифференциальной задачи, условия существования и единственности решения которой приведены в [6].

Материал и методы. Материалом исследования служат операции дробного интегрирования и дифференцирования Адамара, являющиеся модификациями классических операций дробного интегрирования и дифференцирования Римана-Лиувилля [1]. В работе используется аппарат функционального анализа в сочетании с методами дифференциального и интегрального исчисления.

Результаты и их обсуждение. Ранее нами рассматривались дифференциальные задачи с дробными производными Адамара в иной постановке [2], [3], [4]. Задача типа Коши для линейного дифференциального уравнения дробного порядка [6] состоит в отыскании функции $y(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющей уравнению

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = p(x)y(x) + g(x), \quad \alpha > 0 \quad (1)$$

и начальным условиям

$$(D_{a+}^{\alpha-k} y)(a+) = b_k, \quad b_k \in R, \quad k = 1, 2, \dots, n = [-\alpha]. \quad (2)$$

Левую часть в начальных условиях (2) следует рассматривать как предел в правосторонней окрестности $(a, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ точки a :

$$(D_{a+}^{\alpha-k} y)(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} (D_{a+, \mu}^{\alpha-k} y)(x), \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$(D_{a+}^{\alpha-n} y)(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} (\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} y)(x), \quad \alpha \neq n,$$

$$(D_{a+, \mu}^0 y)(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} y(x), \quad \alpha = n.$$

Здесь $(D_{a+}^{\alpha} g)(x) = \delta^n (\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} g)(x)$, $\delta = x \frac{d}{dx}$, $n = [\alpha] + 1$, что можно понимать и так

$$(D_{a+}^{\alpha} g)(x) = \delta^n (\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} g)(x) = \delta^n (D_{a+}^{\alpha-n} g)(x),$$

где конструкция

$$(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} g(t) \frac{dt}{t}, \quad \alpha > 0, \quad 0 \leq a < x. \quad (3)$$

является дробным интегралом Адамара, а $(D_{a+}^{\alpha} g)(x)$ – дробная производная Адамара.

Обращаясь к [4] и [5], замечаем, что в правой части уравнения (1) $f(x, y(x)) = p(x)y(x) + g(x)$. Гарантирует же существование единственного решения задачи (1)-(2) в пространстве регулярных функций

$$L_{\delta}^{\alpha}(a, b) = \{y \in L(a, b) \mid D_{a+}^{\alpha} y \in L(a, b)\}, \quad 0 < a < b < +\infty, \quad (4)$$

где

$$L(a, b) = \left\{ z(t) \left| \int_a^b |z(t)| dt < +\infty \right. \right\}, \quad \|z_1 - z_2\|_{L(a, b)} = \int_a^b |z_1(t) - z_2(t)| dt,$$

выполнение условия [5]:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad y_1, y_2 \in R.$$

В нашем случае

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |p(x)(y_1(x) - y_2(x))| = |p(x)||y_1(x) - y_2(x)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad y_1, y_2 \in R,$$

если $|p(x)| \leq L, x \in [a, b]$. Предположим далее $p(x) \equiv \theta \in R, g(x) = 0$. Тогда решаемая нами задача (1)–(2) будет иметь вид:

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \theta y(x), \quad \alpha > 0, a > 0, \theta \in R, \quad (5)$$

$$(D_{a+}^{\alpha-k} y)(a+) = b_k, \quad b_k \in R, \quad k = 1, 2, \dots, n = [-\alpha]. \quad (6)$$

В работе [2] показана равносильность задачи типа Коши для дифференциального уравнения общего вида с дробной производной Адамара и интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} f(t, y(t)) \frac{dt}{t}, \quad x > a.$$

В случае же дифференциальной задачи (4)–(5) имеем:

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \theta y(t) \frac{dt}{t}, \quad x > a, \theta \in R.$$

Последнее соотношение можно переписать в виде, удобном для итерационного процесса, учитывая (3):

$$\begin{aligned} y_i(x) &= y_0(x) + \theta (\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} y_{i-1})(x), \quad \alpha > 0, i = 1, 2, 3, \dots \\ y_0(x) &= \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha-j}. \end{aligned} \quad (7)$$

Реализуем итерационный процесс (7), принимая во внимание равенство

$$\int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{\mu} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\nu} \frac{dt}{t} = \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\mu+\nu+1} B(\mu+1, \nu+1), \quad \mu > -1, \nu > -1, 0 < a < b < \infty,$$

получаемое заменой переменного интегрирования

$$\tau = \ln \left(\frac{t}{a} \right) / \ln \left(\frac{x}{a} \right),$$

что позволяет получить бета-функцию:

$$B(\gamma, \beta) = \int_0^1 \tau^{\gamma-1} (1-\tau)^{\beta-1} d\tau = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma+\beta)}, \quad \gamma > 0, \beta > 0.$$

$$\begin{aligned} i = 1: \quad y_1(x) &= y_0(x) + \theta \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\alpha-j} \frac{dt}{t} = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha-j} + \theta \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha - j + 1)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\alpha-j} \frac{dt}{t} = \\ &= \sum_{j=1}^n b_j \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha-j} + \frac{\theta}{\Gamma(2\alpha - j + 1)} \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{2\alpha-j} \right], \end{aligned}$$

$$i = 2: \quad y_2(x) = y_0(x) + \theta \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \sum_{j=1}^n b_j \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\alpha-j} + \frac{\theta}{\Gamma(2\alpha-j+1)} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{2\alpha-j} \right] \frac{dt}{t} =$$

$$= \sum_{j=1}^n b_j \sum_{k=0}^2 \frac{\theta^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha - j + 1)} \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha k + \alpha - j}.$$

Индуктивно приходим к общей формуле:

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^n b_j \sum_{k=0}^i \frac{\theta^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha - j + 1)} \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha k + \alpha - j}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

В силу сходимости итерационного процесса будем иметь:

$$y(x) = \sum_{j=1}^n b_j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha - j + 1)} \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha k + \alpha - j} =$$

$$= \sum_{j=1}^n b_j \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1} \left(\theta \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha} \right),$$

где $E_{\alpha, \beta}(z)$ – функция Миттаг-Лефлера [1]:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z, \alpha, \beta \in C, \operatorname{Re} \alpha > 0.$$

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема. Задача (5)–(6) имеет единственное решение $y(x) \in L(a, b)$ в пространстве (4), определяемое равенством:

$$y(x) = \sum_{j=1}^n b_j \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1} \left(\theta \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha} \right).$$

Заключение. В приложениях часто возникает необходимость решать аналоги задач Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. К тому же при интегрировании некоторых классов дифференциальных уравнений целого порядка приходится руководствоваться положениями теории дробного дифференцирования и интегрирования. В работе получено аналитическое решение дифференциальной задачи типа Коши для линейного однородного дифференциального уравнения с дробными производными Адамара в пространстве регулярных функций.

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Шлапаков, С.А. Задача типа Коши для дифференциального уравнения общего вида дробного порядка / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 73-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 11 марта 2021 г. Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2021. С. 71–72.

3. Шлапаков, С.А. О разрешимости задачи типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка / С.А. Шлапаков, О.В. Скоромник // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 74-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 18 февраля 2022 г. – Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2022. – с. 52–53.

4. Шлапаков, С.А. Об одной дифференциальной задаче с дробными производными Адамара / С.А. Шлапаков, О.В. Скоромник // Наука – образованию, производству, экономике: Материалы 75-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 03 марта 2023 г. / Витебский гос. ун-т; ред. кол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2023. – с. 66–68.

5. Шлапаков, С.А. Задача типа Коши для уравнения с дробной производной Адамара / О.В. Скоромник, С.А. Шлапаков // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта – 2023. – № 3, С. 10–14.

6. Шлапаков, С.А. О задаче типа Коши для линейного дифференциального уравнения с дробной производной Адамара / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: Материалы 76-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 01 марта 2024 г. / Витебский гос. ун-т; ред. кол.: Е.Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2024. – с. 53–54.