

О ПРЕДСТАВИМОСТИ ПОЛИНОМА ДВЕНАДЦАТОЙ СТЕПЕНИ В ВИДЕ КОМПОЗИЦИИ ТРЕХ ПОЛИНОМОВ МЕНЬШИХ СТЕПЕНЕЙ

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Задача о представлении алгебраического полинома в виде композиции полиномов меньших степеней является классической и встречается в приложениях. В настоящее время известны некоторые разработанные машинные алгоритмы декомпозиции полиномов [1; 2]. Несмотря на это, доказательство факта наличия какой-либо композиции у полинома само по себе является трудной задачей, поэтому практическую ценность представляет получение аналитических условий связи между коэффициентами полинома, при выполнении которых полином имеет заданную композиционную структуру. Получение таких условий требует большого числа преобразований в символьном виде и не поддается ручным вычислениям уже для полиномов относительно невысоких степеней, например, восьмой. Применение современных систем компьютерной математики позволяет преодолеть данную трудность. Так, например, Ю.В. Трубниковым и В.В. Юргеласом получены явные условия наличия композиции у полиномов шестой степени [3].

Цель работы – получить необходимые и достаточные условия, при которых произвольный полином двенадцатой степени представим в виде композиции трех полиномов меньших степеней. Настоящее исследование является естественным продолжением работ [4] и [5].

Материал и методы. Материалом исследования являются алгебраические полиномы комплексного аргумента двенадцатой степени, являющиеся композицией полиномов меньших степеней. Методы исследования – методы алгебры с использованием системы компьютерной математики *Maple 2023*.

Результаты и их обсуждение. Доказаны теоремы следующего вида.

Теорема 1. Для представления полинома двенадцатой степени

$$P_{12}(z) = z^{12} + a_1 z^{11} + a_2 z^{10} + a_3 z^9 + a_4 z^8 + a_5 z^7 + a_6 z^6 + a_7 z^5 + a_8 z^4 + a_9 z^3 + a_{10} z^2 + a_{11} z + a_{12}$$

в виде композиции $P_{12}(z) = f(g(h(z)))$, где $f(z) = z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3$, $g(z) = z^2 + c_1 z + c_2$, $h(z) = z^2 + d_1 z + d_2$ необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия связей между его коэффициентами:

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{5a_1(11a_1^2 - 36a_2)}{216}; & a_5 &= \frac{a_1(11a_1^4 - 30a_1^2 a_2 + 144a_4)}{216}; \\ a_6 &= \frac{11}{46656} a_1^6 + \frac{5}{648} a_1^4 a_2 + \frac{5}{108} a_1^2 a_2^2 + \frac{1}{9} a_1^2 a_4 - \frac{5}{27} a_2^3 + \frac{2}{3} a_2 a_4; \\ a_7 &= -\frac{a_1(275a_1^6 - 936a_1^4 a_2 - 1080a_1^2 a_2^2 + 5616a_1^2 a_4 + 4320a_2^3 - 15552a_2 a_4)}{46656}; \\ a_9 &= \frac{a_1(3355a_1^8 - 10980a_1^6 a_2 - 10800a_1^4 a_2^2 + 62208a_1^4 a_4 + 43200a_1^2 a_2^3 - 155520a_1^2 a_2 a_4 + 3359232a_8)}{10077696}; \\ a_{10} &= -\frac{55}{5038848} a_1^{10} - \frac{5}{104976} a_1^8 a_2 + \frac{1}{5184} a_1^6 a_4 + \frac{25}{69984} a_1^6 a_2^2 - \frac{11}{1944} a_1^4 a_2 a_4 + \frac{5}{2916} a_1^4 a_2^3 - \\ &\quad - \frac{1}{9} a_1^2 a_8 + \frac{1}{36} a_1^2 a_4 a_2^2 - \frac{5}{486} a_1^2 a_2^4 + \frac{1}{3} a_2 a_8 - \frac{1}{27} a_2^3 a_4 + \frac{1}{81} a_2^5; \end{aligned}$$

$$a_{11} = \frac{a_1(12a_2 - 5a_1^2)(5a_1^8 + 5a_1^6a_2 - 40a_1^4a_2^2 + 48a_1^4a_4 - 240a_1^2a_2^3 + 576a_1^2a_2a_4 + 576a_2^4 - 1728a_4a_2^2 + 15552a_8)}{3359232}.$$

$$\text{При этом } d_1 = \frac{a_1}{6}; \quad d_2 = \frac{a_2}{6} - \frac{5a_1^2}{72} - \frac{c_1}{2}; \quad c_2 = \frac{55}{5184}a_1^4 + \frac{5}{216}a_1^2a_2 - \frac{5}{36}a_2^2 + \frac{1}{3}a_4 - \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{4}c_1^2;$$

$$b_2 = -\frac{55}{139968}a_1^8 + \frac{5}{15552}a_1^6a_2 - \frac{1}{36}a_1^4a_4 + \frac{5}{648}a_1^4a_2^2 + \frac{1}{27}a_1^2a_2a_4 - \frac{5}{324}a_1^2a_2^3 + \frac{1}{9}a_2^2a_4 - \frac{1}{3}a_4^2 + a_8 + \frac{1}{3}b_1^2;$$

$$b_3 = \frac{325}{136048896}a_1^{12} - \frac{25}{5038848}a_1^{10}a_2 + \frac{5}{15552}a_1^8a_4 - \frac{35}{419904}a_1^8a_2^2 - \frac{95}{139968}a_1^6a_2a_4 + \frac{115}{419904}a_1^6a_2^3 - \\ - \frac{23}{5832}a_1^4a_2^2a_4 + \frac{1}{108}a_1^4a_4^2 + \frac{5}{17496}a_1^4a_2^4 - \frac{5}{324}a_1^4a_8 + \frac{1}{108}a_1^2a_2^3a_4 - \frac{1}{81}a_1^2a_2a_4^2 - \frac{5}{2916}a_1^2a_2^5 + \frac{1}{729}a_2^6 - \\ - \frac{1}{27}a_2^2a_4^2 + \frac{1}{9}a_2^2a_8 + \frac{2}{27}a_4^3 - \frac{1}{3}a_4a_8 + a_{12} + \left(-\frac{55}{419904}a_1^8 + \frac{5}{46656}a_1^6a_2 + \frac{5}{1944}a_1^4a_2^2 - \frac{1}{108}a_1^4a_4 - \right. \\ \left. - \frac{5}{972}a_1^2a_2^3 + \frac{1}{81}a_1^2a_2a_4 + \frac{1}{27}a_2^2a_4 - \frac{1}{9}a_4^2 + \frac{1}{3}a_8 \right) b_1 + \frac{1}{27}b_1^3;$$

параметры b_1 и c_1 остаются свободными.

Теорема 2. Для представления полинома двенадцатой степени

$$P_{12}(z) = z^{12} + a_1z^{11} + a_2z^{10} + a_3z^9 + a_4z^8 + a_5z^7 + a_6z^6 + a_7z^5 + a_8z^4 + a_9z^3 + a_{10}z^2 + a_{11}z + a_{12}$$

в виде композиции $P_{12}(z) = f(g(h(z)))$, где $f(z) = z^2 + b_1z + b_2$, $g(z) = z^3 + c_1z^2 + c_2z + c_3$, $h(z) = z^2 + d_1z + d_2$ необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия связей между его коэффициентами:

$$a_3 = -\frac{5a_1(11a_1^2 - 36a_2)}{216}; \quad a_5 = \frac{a_1(11a_1^4 - 30a_1^2a_2 + 144a_4)}{216};$$

$$a_7 = -\frac{a_1(187a_1^6 - 504a_1^4a_2 + 2016a_1^2a_4 - 15552a_6)}{31104};$$

$$a_8 = \frac{4037}{11943936}a_1^8 + \frac{13}{82944}a_1^6a_2 - \frac{55}{13824}a_1^4a_2^2 + \frac{89}{10368}a_1^4a_4 - \frac{5}{192}a_1^2a_2^3 + \frac{13}{144}a_1^2a_2a_4 - \\ - \frac{1}{8}a_1^2a_6 + \frac{5}{64}a_2^4 - \frac{3}{8}a_2^2a_4 + \frac{1}{2}a_2a_6 + \frac{1}{4}a_4^2;$$

$$a_9 = \frac{a_1}{322486272}(145453a_1^8 - 276912a_1^6a_2 - 427680a_1^4a_2^2 + 2083968a_1^4a_4 - 2799360a_1^2a_2^3 + \\ + 9704448a_1^2a_2a_4 - 20901888a_1^2a_6 + 8398080a_2^4 - 40310784a_2^2a_4 + 53747712a_2a_6 + 26873856a_4^2);$$

$$a_{10} = -\frac{16445}{322486272}a_1^{10} - \frac{211}{3981312}a_1^8a_2 + \frac{29}{93312}a_1^6a_4 - \frac{53}{3456}a_1^4a_2a_4 + \frac{85}{3456}a_1^4a_6 + \\ + \frac{1}{48}a_1^2a_2a_6 - \frac{1}{144}a_1^2a_2^2a_4 + \frac{1}{36}a_1^2a_4^2 - \frac{1}{64}a_2^5 + \frac{1}{8}a_2^3a_4 - \frac{1}{4}a_2a_4^2 - \frac{1}{8}a_2^2a_6 + \frac{1}{2}a_4a_6;$$

$$a_{11} = -\frac{a_1(35a_1^4 - 40a_1^2a_2 - 144a_2^2 + 576a_4)}{2579890176} \cdot (1163a_1^6 + 900a_1^4a_2 + 6480a_1^2a_2^2 - \\ - 15552a_1^2a_4 - 46656a_2^3 + 186624a_2a_4 - 373248a_6).$$

$$\text{При этом } d_1 = \frac{a_1}{6}; \quad d_2 = -\frac{5a_1^2}{72} + \frac{a_2}{6} - \frac{c_1}{3}; \quad c_2 = \frac{55}{3456}a_1^4 + \frac{5}{144}a_1^2a_2 - \frac{5}{24}a_2^2 + \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{3}c_1^2; \\ c_3 = -\frac{11}{93312}a_1^6 - \frac{5}{1296}a_1^4a_2 - \frac{5}{216}a_1^2a_2^2 + \frac{1}{18}a_1^2a_4 - \frac{1}{3}a_2a_4 + \frac{5}{54}a_2^3 + \frac{1}{2}a_6 -; \\ -\frac{1}{2}b_1 + \left(\frac{1}{6}a_4 + \frac{55}{10368}a_1^4 + \frac{5}{432}a_1^2a_2 - \frac{5}{72}a_2^2\right)c_1 + \frac{1}{27}c_1^3;$$

$$b_2 = -\frac{1352569}{557256278016}a_1^{12} - \frac{29075}{7739670528}a_1^{10}a_2 + \left(\frac{1163}{17915904}a_4 - \frac{4085}{143327232}a_2^2\right)a_1^8 + \left(\frac{173}{995328}a_2^3 - \right. \\ \left. - \frac{17}{23328}a_2a_4 + \frac{1163}{746496}a_6\right)a_1^6 + \left(\frac{25}{331776}a_2^4 - \frac{5}{20736}a_2^2a_4 + \frac{25}{20736}a_2a_6 - \frac{1}{2304}a_4^2\right)a_1^4 + \left(\frac{5}{4608}a_2^5 - \right. \\ \left. - \frac{1}{144}a_2^3a_4 + \frac{5}{576}a_2^2a_6 + \frac{1}{96}a_2a_4^2 - \frac{1}{48}a_4a_6\right)a_1^2 - \frac{1}{256}a_2^6 + \frac{1}{32}a_2^4a_4 - \frac{1}{16}a_2^3a_6 - \\ \left. - \frac{1}{16}a_2^2a_4^2 + \frac{1}{4}a_2a_4a_6 - \frac{1}{4}a_6^2 + a_{12} + \frac{1}{4}b_1^2;$$

параметры b_1 и c_1 остаются свободными.

Удобно выбирать $b_1 = c_1 = 0$. Заметим, что выполнения условий теорем 1 и 2 достаточно для разрешимости исходного полинома двенадцатой степени в радикалах.

Заключение. Таким образом, в работе получены необходимые и достаточные условия представления произвольного полинома двенадцатой степени комплексного аргумента в виде композиции двух полиномов второй степени и одного полинома третьей степени. Также получены формулы прямого перехода от коэффициентов исходного полинома к коэффициентам полиномов, составляющих композицию.

Исследование выполнено при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф23М-003, рег. № 20231184), а также в рамках ГПНИ Республики Беларусь «Конвергенция – 2025» (рег. № 20210494).

1. Kozen, D. Polynomial Decomposition Algorithms / D. Kozen, S. Landau // Journal of Symbolic Computation. – 1989. – Vol. 7, № 5. – P. 445–456.

2. Перминова, М.Ю. Алгоритм декомпозиции полиномов, основанный на разбиениях / М. Ю. Перминова, В. В. Кручинин, Д.В. Кручинин // Доклады ТУСУРа. – 2015. – № 4(38). – С. 102–107.

3. Трубников, Ю.В. Об условиях представимости полиномов четвертой и шестой степени в виде суперпозиции полиномов второй и третьей степени / Ю.В. Трубников, В.В. Юргелас // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2019. – № 1(102). – С. 17–24. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/18080> (дата обращения: 20.01.2025).

4. Чернявский, М.М. Аналитические условия представимости полинома восьмой степени в виде композиции полиномов меньших степеней / М.М. Чернявский, Н.С. Грицкевич // XVI Машеровские чтения : материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 21 окт. 2022 г.: в 2 т. / ВГУ имени П.М. Машерова. – Витебск, 2021. – Т. 1. – С. 48–51. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/34660> (дата обращения: 20.01.2025).

5. Чернявский, М.М. Условия декомпозиции полинома двенадцатой степени на полиномы четвертой и третьей степеней / М.М. Чернявский, Д.А. Китаров // XVIII Машеровские чтения: материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 25 окт. 2024 г.: в 2 т. / ВГУ имени П.М. Машерова ; редкол.: Е.Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2024. – Т. 1. – С. 60–62. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/44696> (дата обращения: 20.01.2025).