ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ НАЛИЧИИ ЧАСТНОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА

Ж.В. Иванова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = cx + dy + a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 = P(x, y), \\ \dot{y} = ax + by + a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 = Q(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ взаимно простые многочлены с действительными коэффициентами, имеющая частный алгебраический интеграл четвертого порядка

$$F(x, y) = x^3y + \alpha_1x^3 + \beta_1x^2y + \alpha_2x^2 + \beta_2xy + \gamma_2y^2 +$$

$$+ \alpha_3x + \beta_3y + \alpha_4 = 0. \quad (2)$$

К рассмотрению таких систем приводят многие вопросы естествознания. Однако нахождение их решений в виде элементарных функций в большинстве случаев невозможно. Для прикладных задач часто бывает важно знать, не конкретные решения, а развитие процессов во времени.

Целью исследования является выделение классов систем вида (1), имеющих интеграл вида (2), а также нахождение состояний равновесия таких систем и определение их типа, что позволит определить поведение их траекторий «в целом», т.е. в течение сколь угодно большого промежутка времени.

Материал и методы. В работе используются методы качественной теории дифференциальных уравнений.

Результаты и их обсуждение. Если (2) является частным интегралом системы (1), то имеет место соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial x}P + \frac{\partial F}{\partial y}Q = F \cdot L, \quad (3)$$

где $L(x, y) = rx + sy + k,\ r, s, k$ – действительные коэффициенты [1]. Кроме того в [1] доказывается, что состояния равновесия системы (1) лежат или на интеграле (1) или на прямой $L(x, y) = 0$. Предположим, что хотя бы одно состояние равновесия лежит на прямой. Не теряя общности, можно предположить, что это точка $O(0, 0)$. Тогда $L(x, y) = rx + sy.$ Пусть также $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$, этого всегда можно добиться, изменяя масштаб на осях координат. Тогда, на основании (3), находим соотношения, связывающие коэффициенты системы (1) и коэффициенты интеграла (2):

$$r = 1 + 3a_2, \quad s = 3 + c_1, \quad a_1 = c_2 = 0,$$

$$\alpha_1 = a, \quad \beta_1 = 3d,$$

$$3da_2 + ac_1 = b + 3c,$$

$$\alpha_2(a_2 + 1) = 3a(c + d), \qquad \alpha_2(1 + c_1) + 2\beta_2a_2 = 3d(b + 2c + a),$$

$$2\beta_2 + \gamma_2(3a_2 - 1) = 6d^2, \qquad \gamma_2(c_1 - 3) = 0,$$

$$\alpha_3(2a_2+1)=2\alpha_2 c+\beta_2 a, \qquad 3\beta_3=\beta_2 d+2\gamma_2 b,$$

$$\alpha_3(c_1+2)+3\beta_3 a_2=2\alpha_2 d+\beta_2(c+b)+2\gamma_2 a,$$

$$\alpha_4(c_1+3)=\alpha_3 d+\beta_3 b, \qquad \alpha_4(3a_2+1)=\alpha_3 c+\beta_3 a.$$

Из данных равенств, следует, что или $\gamma_2=0$, или $\gamma_2\neq 0,\ \ c_1=3$.

Пусть $\gamma_2\neq 0,\ c_1=3$. Будем рассматривать систему (1) при $a_2=1$. Тогда коэффициенты интеграла (2) выражаются через коэффициенты системы (1) следующим образом:

$$\alpha_1=a, \quad \beta_1=3d,$$

$$\alpha_2=\frac{3}{2}a(c+d), \qquad \beta_2=\frac{3}{2}(d(b+2c-a)-2ac)$$

$$\gamma_2=\frac{3}{2}(d(a-b-2c)+2d^2+2ac),$$

$$\alpha_3=\frac{1}{2}a(d(4c-a+b)+2c(c-a)),$$

$$\beta_3=\frac{1}{2}(d^2(5b+2c-a)-2d(b^2+ac+2bc-ab)+4abc),$$

$$\alpha_4=\frac{1}{8}a(d^2(5b+2c-a)+d(4c^2-2b^2-3ac-3bc+2ab)+2(c^3+2abc-ac^2)).$$

Для коэффициентов системы имеют место два случая:

1) $a=0,\ \ b=-\dfrac{3}{2}d,\ \ c=\dfrac{3}{2}d$;

2) $a=-\dfrac{2}{3}d,\ \ \ b=-3d,\ \ \ c=\dfrac{4}{3}d$.

Пусть $a=0,\ \ b=-\dfrac{3}{2}d,\ \ c=\dfrac{3}{2}d$, тогда система (1)

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{3}{2}dx+dy+x^2+xy=P(x,y),\\ \dot{y}=-\dfrac{3}{2}dy+xy+3y^2=Q(x,y)\end{cases}$$

имеет интеграл $y(x^3+3dx+\dfrac{3}{4}d^2y+\dfrac{9}{4}d^2x)=0$, который распадается на две интегральные кривые: $y=0$ и $x^3+3dx+\dfrac{3}{4}d^2y+\dfrac{9}{4}d^2x=0$.

В конечной части плоскости данная система имеет 4 состояния равновесия: точку $O(0,\ 0)$ – седло, точку $A_1(-\dfrac{3}{2},0)$ – устойчивый узел, точку $A_2(\dfrac{-5+\sqrt{13}}{4}d,\dfrac{11-\sqrt{13}}{12}d)$ – неустойчивый узел, $A_3(\dfrac{-5-\sqrt{13}}{4}d,\dfrac{11+\sqrt{13}}{12}d)$ – седло.

При $a=-\dfrac{2}{3}d,\ \ \ b=-3d,\ \ \ c=\dfrac{4}{3}d$ система (1)

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{4}{3}dx + dy + x^2 + xy = P\,(x,\,y), \\ \dot{y} = -\dfrac{3}{2}dx - 3dy + xy + 3y^2 = Q\,(x,\,y) \end{cases}$$

имеет интеграл

$$108x^3y + 324dx^2y - 72dx^3 - 18d^2y^2 + 324d^2xy - 252d^2x^2 + 822d^3y - 500d^3x - 85d^4 = 0$$

и следующие состояния равновесия в конечной части плоскости: $O\,(0,\ 0)$ – седло, точку $A_1(-2d,\ \frac{4}{3}d)$ – седло, точку $A_2(\frac{-6+\sqrt{6}}{6}d,\ \frac{4+\sqrt{6}}{6}d)$ – неустойчивый узел, точку $A_3(\frac{-6-\sqrt{6}}{6}d,\ \frac{4-\sqrt{6}}{6}d)$ – устойчивый узел.

Заключение. В данной работе получены условия существования у систем (1) частных интегралов (2), выделены классы таких систем, найдены состояния равновесия в конечной части плоскости и определен их тип.

1. Яблонский, А.И. Алгебраические интегралы одной системы дифференциальных уравнений / А.И. Яблонский // Дифференциальные уравнения. – 1970. – Т. 6. № 5. – С. 279–285.
2. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. — М.: Наука, 1990. – 484 с.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Ю.В. Исаченко
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Согласно современным тенденциям, искусственный интеллект (ИИ) находит всё более широкое применение в различных областях науки и техники. Одной из таких сфер является образование, где ИИ может существенно упростить и оптимизировать процесс обучения. В этом заключается актуальность использования ИИ в данной сфере. И это объясняется тем, что подрастающее поколение быстрее усваивает новые тенденции, возникающие в социальной действительности, нежели более взрослое. [1]

Цель заключается в анализе влияния искусственного интеллекта на процесс обучения программированию, особенно в контексте выполнения лабораторных работ.

Материал и методы. Методы, использованные в данной работе: теоретический и сравнительный анализ, метод обобщения полученных данных

Результаты и их обсуждение. Лабораторные работы по программированию являются важной частью учебного процесса, так как они позволяют студентам применять теоретические знания на практике. Однако многие студенты сталкиваются с трудностями при решении задач, что может негативно сказаться на их мотивации и успеваемости. В этом контексте использование ИИ может оказать помощь в различных аспектах выполнения лабораторных работ.

ИИ предоставляет разнообразные инструменты, которые могут быть использованы в процессе обучения программированию как для студентов, так и для преподавателей:

1. Обратная связь в реальном времени: современные платформы на базе ИИ могут анализировать код, написанный студентами, и предоставлять обратную связь по ошибкам и возможным улучшениям.