

3)  $\sigma_3 = \{\{2, 3, 5\}, \{7\}, \{11\}, \mathbf{P} \setminus \{2, 3, 5, 7, 11\}\}.$

```
gap> sigma:=[[2],[3],[5],[7],[11]];
[[ 2 ], [ 3 ], [ 5 ], [ 7 ], [ 11 ]]
gap> isSigmaSoluble(4620,139,sigma);
false
gap> sigma:=[[2,3],[5],[7],[11]];
[[ 2, 3 ], [ 5 ], [ 7 ], [ 11 ]]
gap> isSigmaSoluble(4620,139,sigma);
false
```

Таким образом, для  $\sigma = \sigma_1$  и  $\sigma = \sigma_2$  группа  $G = Z_{77} \times A_5$  не является  $\sigma$ -разрешимой.

```
gap> sigma:=[[2,3,5],[7],[11]];
[[ 2, 3, 5 ], [ 7 ], [ 11 ]]
gap> isSigmaSoluble(4620,139,sigma);
true
```

Для  $\sigma = \sigma_3$  группа  $G = Z_{77} \times A_5$  является  $\sigma$ -разрешимой.

**Заключение.** Описана функция в системе GAP для проверки, является ли заданная группа  $\sigma$ -разрешимой.

1. Вдовин, Е.П. О пересечениях разрешимых холловых подгрупп в конечных группах / Е.П. Вдовин, В.И. Зенков // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 74–83.
2. Грицук, Д.В. Построение в системе компьютерной алгебры GAP групп фиксированной производной  $\pi$ -длины / Д.В. Грицук // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серія 4. Фізіка. Матэматыка. – 2020. – № 1. – С. 59–64.
3. Залеская, Е.Н. Применение системы компьютерной алгебры GAP в теории конечных групп / Е.Н. Залеская, Е.М. Дрозд // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 72-й Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, науч. сотрудников и аспирантов, Витебск, 20 февраля 2020 г. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2020. – С. 16–18. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/20789> (дата обращения: 10.01.2025).
4. Залеская, Е.Н. Использование системы компьютерной алгебры GAP при решении задач теории классов групп / Е.Н. Залеская, Е.М. Дрозд // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 73-й Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, науч. сотрудников и аспирантов, Витебск, 11 марта 2021 г. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2021. – С. 31–32. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/26860> (дата обращения: 10.01.2025).
5. Мехович, А.П. Об использовании системы компьютерной алгебры GAP при исследовании свойств решеток подгрупп / А.П. Мехович, А.Ю. Столяренко // Наука – образованию, производству, экономике [Электронный ресурс] : материалы 76-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 1 марта 2024 г. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2024. – С. 39–40. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/42144> (дата обращения: 10.01.2025).
6. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
7. Скиба, А.Н. О  $\sigma$ -свойствах конечных групп II / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3(24). – С. 70–83.

## ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ МОДУЛЯРНОСТИ СЕМЕЙСТВ КЛАССОВ ФИТТИНГА

*Е.Д. Волкова, Н.Т. Воробьев  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Все рассматриваемые группы в настоящей работе конечны. В определениях и обозначениях следуем [1]. *Классом групп* называют совокупность групп, которая наряду с каждой своей группой содержит и все изоморфные ей группы. Класс групп  $\mathfrak{F}$  называется *классом Фиттинга*, если он обладает следующими свойствами: 1) если  $G \in \mathfrak{F}$  и  $N \trianglelefteq G$ , то  $N \in \mathfrak{F}$ ; 2) если  $M_1, M_2 \trianglelefteq G$  и  $M_1, M_2 \in \mathfrak{F}$ , то  $M_1 M_2 \in \mathfrak{F}$ . Из определения класса Фиттинга следует, что для любого непустого класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  и для любой группы  $G$  можно определить подгруппу  $G_{\mathfrak{F}}$  как максимальную нормальную  $\mathfrak{F}$ -подгруппу  $G$ . Ее называют  $\mathfrak{F}$ -*радикалом*  $G$ .

В теории формаций групп известен результат А.Н. Скибы о том, что решетка всех формаций модулярна и не является дистрибутивной (см. глава 4 монографии [2]). Однако

для классов Фиттинга остается открытым вопрос о том, является ли решетка всех классов Фиттинга разрешимых групп модулярной [3; вопрос 14.47]. Поиск решения указанной проблемы приводит к задаче описания семейств классов Фиттинга, для которых справедливо модулярное равенство. Реализации ее и посвящена настоящая работа.

**Материал и методы.** Материалом для исследования является решетка  $\sigma$ -локальных классов Фиттинга. При этом использованы терминология и методы абстрактной теории групп и теории классов групп, в частности, теории классов Фиттинга.

**Результаты и их обсуждение.** Пусть  $\mathbb{P}$  – множество всех простых чисел,  $\pi \subseteq \mathbb{P}$  и  $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ . Символом  $\pi(n)$  обозначим множество простых делителей числа  $n$ ,  $\pi(G) = \pi(|G|)$  – множество всех простых делителей порядка группы  $G$ . Пусть  $\sigma$  – некоторое разбиение  $\mathbb{P}$ , т.е.  $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$ , где  $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$  и  $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$  для всех  $i \neq j$ . Пусть  $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ ,  $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ .

Всякое отображение вида  $f : \sigma \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$  называется  $\sigma$ -функцией Хартли или просто  $H_\sigma$ -функцией [4]. Если  $f$  –  $H_\sigma$ -функция, то символом  $\text{Supp}(f)$  обозначают носитель  $f$ , т.е. множество всех  $\sigma_i \in \sigma$  таких, что  $f(\sigma_i) \neq \emptyset$ .

Если  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – классы Фиттинга, то их произведением является класс групп  $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ .

Пусть  $LR_\sigma(f) = (G : G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G))$ , где  $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$  и  $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$  – классы всех  $\sigma_i$ -групп и всех  $\sigma_i'$ -групп соответственно. Символом  $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}$  обозначен  $\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ -корадикал группы  $G$  – наименьшая нормальная подгруппа  $G$ , факторгруппа по которой  $\sigma_i$ -замкнута.

**Определение.** Класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  называется [4]  $\sigma$ -локальным, если  $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$  для некоторой  $H_\sigma$ -функции  $f$ . В частности, если  $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ , то  $\mathfrak{F}$  называют локальным классом Фиттинга.

Напомним, что класс групп называется  $Q$ -замкнутым (или гомоморфом), если каждый гомоморфный образ  $\mathfrak{F}$ -групп является  $\mathfrak{F}$ -группой.

Решеточные операции  $\wedge$  и  $\vee_\sigma$  для  $\sigma$ -локальных классов Фиттинга  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  определим следующим образом:

$$\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \text{ и } \mathfrak{F} \vee_\sigma \mathfrak{H} = l_\sigma \text{Fit}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}),$$

где  $l_\sigma \text{Fit}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})$  – наименьший из  $\sigma$ -локальных классов Фиттинга, содержащий объединение  $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$ .

Задачу определения семейства классов Фиттинга, для которых справедливо модулярное равенство, решает следующая

**Теорема.** Пусть  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$  –  $\sigma$ -локальные классы Фиттинга, причем  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$  –  $Q$ -замкнуты,  $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y} = 1$  и  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{Y}$ . Тогда если  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ , то справедливо модулярное равенство

$$(\mathfrak{F} \vee_\sigma \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{F} \vee_\sigma (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}).$$

**Заключение.** В настоящей работе определено семейство  $\sigma$ -локальных классов Фиттинга, для которых справедливо модулярное равенство.

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
3. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы по теории групп / Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН; сост.: В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. – 14-е изд. – Новосибирск: Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 1999. – 135 с.
4. Guo, W. On  $\sigma$ -local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N. T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542, № 15. – P. 116–129.