

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ σ -РАЗРЕШИМОСТИ ГРУПП ПОСРЕДСТВОМ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ GAP

Е.А. Витько

Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Система компьютерной алгебры GAP содержит библиотеку групп малых порядков, что позволяет использовать эту систему в теории конечных групп. Применение GAP для исследования свойств конечных групп описано в работах Вдовина и Зенкова [1], Грицука [2], Залесской и Дрозд [3; 4], Меховича и Столяренко [5]. Цель настоящей работы – разработать функцию в системе компьютерной алгебры GAP для определения, является ли заданная конечная группа σ -разрешимой.

Материал и методы. В работе используются методы абстрактной теории групп, а также методы системы компьютерной алгебры GAP.

Результаты и их обсуждение.

В определениях и обозначениях мы следуем [6; 7].

Все рассматриваемые в работе группы конечны.

Обозначим $\pi(n)$ – множество всех простых делителей натурального числа n , $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых делителей порядка группы G .

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbf{P}$ такое, что $\mathbf{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Пусть $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$, $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Группу G называют σ -примарной, если $G = 1$ или $|\sigma(G)| = 1$.

Группу G называют σ -разрешимой, если каждый главный фактор группы G является σ -примарным.

Опишем функцию в системе GAP, которая проверяет является ли конечная группа G σ -разрешимой.

Будем использовать следующие функции системы GAP: FactorsInt(n) – разложение целого числа n на простые множители, SmallGroup(n, m) – группа порядка n с номером m в каталоге групп GAP, ChiefSeries(G) – главный ряд группы G , FactorGroup(G, N) – факторгруппа группы G по N . Приведем программный код функции isSigmaSoluble:=function(n, m, σ)

```
local i, j, ind, G, FG, cs, l;  
G:=SmallGroup(n,m);  
cs:=ChiefSeries(G);  
l:=Length(cs);  
for i in [1..l-1] do  
  FG:=FactorGroup(cs[i],cs[i+1]);  
  ind:=AsSet(FactorsInt(Size(FG)));  
  for j in [1..Size(sigma)] do  
    if (not Intersection(sigma[j], ind)=[]) and (not Intersection(sigma[j], ind)=ind) then  
      return false;  
    fi;  
  od;  
od;  
return true;  
end;
```

Применим описанную функцию для группы $G = Z_{77} \times A_5$. Рассмотрим следующие разбиения множества простых чисел:

- 1) $\sigma_1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ – наименьшее разбиение множества простых чисел;
- 2) $\sigma_2 = \{\{2, 3\}, \{5\}, \{7\}, \{11\}, \mathbf{P} \setminus \{2, 3, 5, 7, 11\}\}$;

3) $\sigma_3 = \{\{2, 3, 5\}, \{7\}, \{11\}, \mathbf{P} \setminus \{2, 3, 5, 7, 11\}\}.$

```
gap> sigma:=[[2],[3],[5],[7],[11]];
```

```
[[ 2 ], [ 3 ], [ 5 ], [ 7 ], [ 11 ]]
```

```
gap> isSigmaSoluble(4620,139,sigma);
```

```
false
```

```
gap> sigma:=[[2,3],[5],[7],[11]];
```

```
[[ 2, 3 ], [ 5 ], [ 7 ], [ 11 ]]
```

```
gap> isSigmaSoluble(4620,139,sigma);
```

```
false
```

Таким образом, для $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$ группа $G = Z_{77} \times A_5$ не является σ -разрешимой.

```
gap> sigma:=[[2,3,5],[7],[11]];
```

```
[[ 2, 3, 5 ], [ 7 ], [ 11 ]]
```

```
gap> isSigmaSoluble(4620,139,sigma);
```

```
true
```

Для $\sigma = \sigma_3$ группа $G = Z_{77} \times A_5$ является σ -разрешимой.

Заключение. Описана функция в системе GAP для проверки, является ли заданная группа σ -разрешимой.

1. Вдовин, Е.П. О пересечениях разрешимых холловых подгрупп в конечных группах / Е.П. Вдовин, В.И. Зенков // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 74–83.

2. Грицук, Д.В. Построение в системе компьютерной алгебры GAP групп фиксированной производной π -длины / Д.В. Грицук // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серія 4. Фізіка. Матэматыка. – 2020. – № 1. – С. 59–64.

3. Залеская, Е.Н. Применение системы компьютерной алгебры GAP в теории конечных групп / Е.Н. Залеская, Е.М. Дрозд // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 72-й Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, науч. сотрудников и аспирантов, Витебск, 20 февраля 2020 г. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2020. – С. 16–18. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/20789> (дата обращения: 10.01.2025).

4. Залеская, Е.Н. Использование системы компьютерной алгебры GAP при решении задач теории классов групп / Е.Н. Залеская, Е.М. Дрозд // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 73-й Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, науч. сотрудников и аспирантов, Витебск, 11 марта 2021 г. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2021. – С. 31–32. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/26860> (дата обращения: 10.01.2025).

5. Мехович, А.П. Об использовании системы компьютерной алгебры GAP при исследовании свойств решеток подгрупп / А.П. Мехович, А.Ю. Столяренко // Наука – образованию, производству, экономике [Электронный ресурс] : материалы 76-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 1 марта 2024 г. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2024. – С. 39–40. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/42144> (дата обращения: 10.01.2025).

6. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

7. Скиба, А.Н. О σ -свойствах конечных групп II / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3(24). – С. 70–83.

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ МОДУЛЯРНОСТИ СЕМЕЙСТВ КЛАССОВ ФИТТИНГА

*Е.Д. Волкова, Н.Т. Воробьев
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Все рассматриваемые группы в настоящей работе конечны. В определениях и обозначениях следуем [1]. *Классом групп* называют совокупность групп, которая наряду с каждой своей группой содержит и все изоморфные ей группы. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он обладает следующими свойствами: 1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathfrak{F}$; 2) если $M_1, M_2 \trianglelefteq G$ и $M_1, M_2 \in \mathfrak{F}$, то $M_1 M_2 \in \mathfrak{F}$. Из определения класса Фиттинга следует, что для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и для любой группы G можно определить подгруппу $G_{\mathfrak{F}}$ как максимальную нормальную $\mathfrak{F}$ -подгруппу G . Ее называют $\mathfrak{F}$ -*радикалом* G .

В теории формаций групп известен результат А.Н. Скибы о том, что решетка всех формаций модулярна и не является дистрибутивной (см. глава 4 монографии [2]). Однако