

Этапы обучения математическому моделированию

О.И. Мельников*, И.П. Кунцевич**

*Белорусский государственный университет

**Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

Человек получает информацию, поступающую из внешнего мира, через органы чувств, после чего полученная информация рассматривается, анализируется, подвергается экспериментальной проверке. Но даже мощные вспомогательные средства, точнейшие измерительные устройства не могут дать полного знания об изучаемом объекте или явлении. М. Клейн отмечает [1]: «Решающий ... по своему значению шаг к расширению и приумножению нашего знания внешнего мира был сделан, когда для изучения его стали применять математику». В современном обществе, в котором происходит математизация наук, изучение математических моделей становится одним из методов улучшения математического образования. Основной процесс обучения охватывает дошкольное, среднее, среднеспециальное или высшее образование. В связи с этим авторами рассматривается проблема обучения математическому моделированию. На основе анализа математической и психолого-педагогической литературы, с учетом того, что в математическом образовании приоритетным направлением становится изучение математических моделей, предложены три этапа обучения математическому моделированию: этап неявного обучения, пропедевтический этап и этап целенаправленного обучения. В данной работе также сформулированы краткие характеристики каждого из этапов.

Ключевые слова: алгоритмическая культура, величина, геометрическая форма, дидактические функции, математика, математическая задача, математическая модель, сенсорный эталон, этапы обучения математическому моделированию, этапы построения математической модели.

Teaching stages of mathematical modeling

O.I. Melnikov*, I.P. Kuntsevich**

Belorussian State University

**Educational establishment «Polotsk State University»

Man receives information from the outer world through sense organs. After this the obtained information is considered, analyzed, experimentally tested. However, even powerful supplementary means, accurate measuring devices can't give complete knowledge of the studied object or phenomenon. M. Klein points out [1]: «Decisive ... in its meaning step to widening and multiplication of our knowledge of outer world was made when to study it people started using mathematics». In contemporary society, where mathematization of sciences takes place, studying mathematic models is becoming one of the methods of the improvement of mathematical education. The main process of teaching embraces pre-school, secondary, secondary special and higher education. In this connection, the authors consider the problem of teaching mathematical modelling. On the basis of the analysis of mathematical as well as psychological and pedagogical literature, considering that in mathematical education studying mathematic models becomes priority, three stages of teaching mathematical modelling are offered: the stage of non evident teaching, the propedeutic stage and the stage of purposeful teaching. The paper also formulates brief characteristics of every stage.

Key words: algorithmic culture, value, geometric shape, didactic functions, mathematics, mathematical problem, mathematical model, sensor model, stages in teaching mathematical modeling, stages in building mathematical model.

В современном обществе, которое входит в фазу информатизации, математика приобретает особый статус. В результате ее проникновения во все сферы человеческой деятельности (физика, химия, техника, экономика, биология, медицина, языкознание, социология и т.д.), происходит математизация наук. Это накладывает отпечаток на усовершенствование математического образования на всех ступенях образовательного процесса. Одной из форм улучшения математического образования является обучение учащихся математическому моделированию как методу познания окружающего мира.

Математическая энциклопедия определяет математическую модель как приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выражаемого с помощью математических символов и называет моделирование мощным

методом познания окружающего мира, а также прогнозирования и управления [1]. Совет Министров Республики Беларусь назвал в качестве одного из приоритетных направлений фундаментальных научных исследований «математические модели и их применение к анализу систем и процессов в природе и обществе [2]».

Широкое использование математического моделирования привело к тому, что с методами построения и изучения математических моделей идет ознакомление практически на всех факультетах технических и экономических вузов. Например, в образовательном стандарте для специальности 1-36 01 01 «Технология машиностроения» за 2007 год записано, что при изучении математики студент должен уметь строить математические модели физических процессов [3].

Однако существует нарушение преемственности при изучении математических моделей между высшей и средней школами. Так, в «Концепции по учебному предмету “Математика” для общеобразовательных учреждений с 11-летним сроком обучения» [4] есть ритуальная фраза об «увеличении роли и значения моделирования», которая не конкретизируется, а в «Учебной программе для общеобразовательных учреждений Республики Беларусь. Математика. V–XI классы» за 2009 год моделирование ограничивается умением решать текстовые задачи. Вызывает удивление отсутствие понятия «модель» в стандарте школьного предмета «Информатика».

Человек основное обучение проходит, начиная с момента рождения до получения среднего специального или высшего образования. Изучение математики происходит на каждом этапе образовательного процесса, что включает и изучение определенных математических моделей.

Нами были поставлены следующие *цели исследования*: 1) на основе изучения и анализа математической и психолого-педагогической литературы, охватывающей дошкольное, среднее и высшее образование, выделить этапы обучения математическому моделированию; 2) сформулировать краткие характеристики каждого этапа обучения математическому моделированию.

Материал и методы. С учетом сформулированных целей нами был определен *объект исследования*: обучение математическому моделированию в процессе математической подготовки обучающихся. *Методика исследования* включает изучение и анализ математической и психолого-педагогической литературы, охватывающей дошкольное, среднее и высшее образование. *Средствами исследования* послужили математическая [1, 9] и психолого-педагогическая [5–8] литература.

Результаты и их обсуждение. В связи с этим, учитывая психологические (возрастные), педагогические особенности учащегося, можно выделить *три* этапа обучения математическому моделированию.

I. Этап неявного обучения

Данный этап характеризуется неявной заменой моделируемых объектов или отношений их условными обозначениями. Этап неявного обучения разбивается на отдельные периоды:

- 1) неявно-сенсорный;
- 2) неявно-конструктивный;
- 3) неявно-пропедевтический.

1. Неявно-сенсорный

От момента рождения до 3–4 лет в познании окружающего мира огромную роль играет *сенсорное* развитие. «Сенсорное развитие ребенка – это развитие его восприятия и формирования

представлений о внешних свойствах предметов: их форме, цвете, величине, положении в пространстве, а также запахе, вкусе и т.п.» [5, с. 3]. На данном этапе происходит изучение простейших математических объектов как *сенсорных эталонов* (термин был введен А.В. Запорожцем) – общепринятых образцов внешних свойств предметов. В качестве эталонов формы выступают геометрические фигуры (квадраты, круги, овалы, треугольники и др.), изготовленные из дерева, картона, бумаги или другого материала. В качестве эталона величины выступает метрическая система мер, позволяющая сравнивать предметы [5, с. 5]. Формирование элементарных математических представлений происходит в процессе развития хватательных движений, деятельного оперирования (в виде игры) с предметами определенных форм.

2. Неявно-конструктивный

От 3–4 лет и до 6 ребенок в детском саду продолжает изучение тех же математических объектов. Но задания, которые ставятся перед ним, значительно усложняются.

Так, дети шестого года жизни должны овладеть способами анализировать предметы сложной формы, научиться давать последовательное словесное описание объектов, узнавать по словесному описанию объекты. В этот период дошкольники выполняют действия, требующие умения различать на глаз довольно сложные разновидности одной и той же геометрической формы.

Задания на анализ сложной формы, расчленение ее на составные элементы усложняются за счет перехода от анализа изображений, состоящих из элементов различной формы, к анализу изображений, включающих элементы одинаковой формы и величины. На рис. 1 показаны отдельные геометрические фигуры и изображения реальных объектов (дом, человек), составленных из фигур. В предложенном задании ребенок начинает конструировать модель из элементов [6, с. 117–118, 126–127].

В старшей группе расширяется знание детей о величине предмета. Воспитанники выполняют задания на построение рядов из элементов, расположенных по степени убывания (или возрастания) одного из параметров величины [5, с. 127]. Особо уделяется внимание творческим заданиям, пробуждающим фантазию, воображение ребят. Эти задания рассчитаны на придумывание и складывание по собственному замыслу фигурок из элементов мозаики. На занятиях по рисованию в детском саду воспитанники изображают других детей точками, кружками, квадратиками, а отношения между ними (дружбу, знакомство) – линиями.

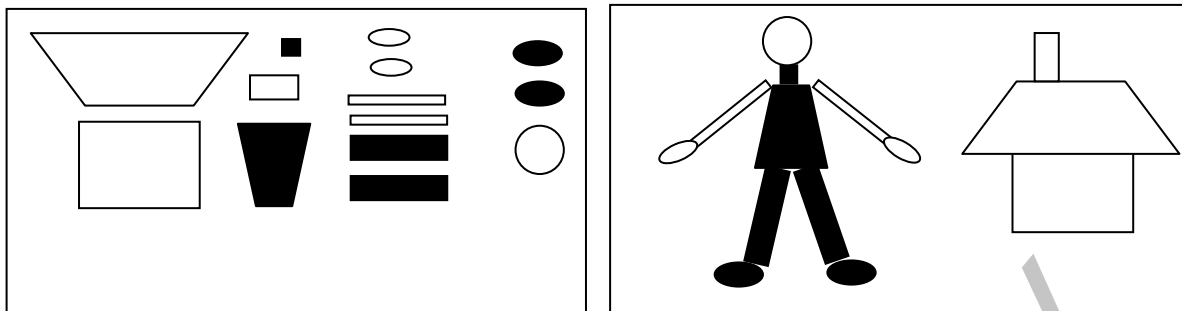


Рис. 1. Изображения реальных объектов, составленных из отдельных геометрических фигур.

3. Неявно-пропедевтический

В начальной школе продолжается знакомство с математическими объектами, величинами. Устанавливаются связи между величинами, вводятся математические операции: сложение, вычитание, умножение, деление. Здесь впервые школьники сталкиваются с простейшими текстовыми задачами, для которых в процессе решения строится математическая модель: числовое (решение по действиям) или буквенное выражение, используются геометрические фигуры. Само понятие «математическая модель» не употребляется. Школьники сталкиваются только с понятием «задача». Приведем пример.

Задача. *Женщина купила в магазине 2 кг сахара по 3 ден. ед. за килограмм и 1 кг яблок по 2 ден. ед. за килограмм. Сколько ден. ед. было израсходовано?*

Сформулированную задачу можно решить двумя способами: аналитически или геометрически.

В результате аналитического решения составляется числовое выражение или задача решается по действиям, что в неявном виде представляет собой математическую модель. Для данной задачи числовое выражение имеет вид: $2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 8$. Результат «8» говорит о том, что женщина заплатила 8 ден. ед. за покупку.

Геометрически эту задачу можно решить с помощью отрезков, которые тоже в своей совокупности в неявном виде представляют математическую модель. Так, 1 ден. ед. ставится в соответствие единичный отрезок. Тогда решение задачи примет следующий вид (рис. 2).

В результате получаем 8 отрезков, что соответствует 8 ден. ед., которые заплатили за покупку. Геометрический способ является наглядным способом решения задачи. Используя этот прием, школьники узнают, как алгебраическую величину можно изобразить геометрическим объектом. А это означает, что для одной и той же задачи можно строить различные математические модели.

Как отмечает профессор А.Н. Сендер: «Метод моделирования – неотъемлемый компонент каждого урока в начальных классах... Из урока в урок, работая с предметными, условными, знаковыми или воображаемыми моделями, оценивая их роль в познании или практике, учащиеся постепенно начинают овладевать методом моделирования и самостоятельно применять его для решения новых учебных и познавательных задач» [6, с. 126–127].

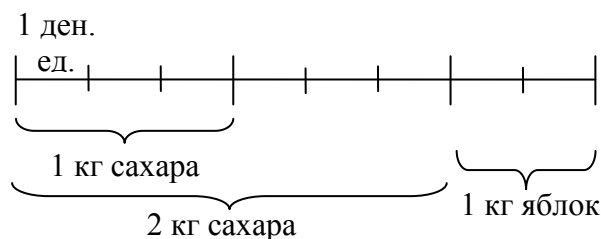


Рис. 2. Геометрическое решение сформулированной задачи.

II. Пропедевтический этап

На пропедевтическом этапе происходит знакомство с допущениями и соглашениями, используемыми при переходе от словесного описания объекта или ситуации к его математическому описанию.

Как уже отмечалось выше, одним из умений, которым должен владеть обучающийся в средней школе, – это умение решать текстовые задачи с использованием математических моделей: уравнений, неравенств, их систем. В процессе обучения математике в средней школе вводятся понятия «математическая модель», «математическое моделирование» без научной формулировки определений.

Учитель должен неявно знакомить учеников с теми допущениями и упрощениями, которые происходят при переходе от задачи, заданной словами, к задаче, определяемой математическими соотношениями. Например, тела мгновенно меняют скорость и направление движения, производительность выполнения работы постоянна во время работы, объемы получающихся смесей растворов равны сумме объемов составляющих частей и т.д.

Методике решения прикладных (текстовых) задач школьного курса математики уделялось большое внимание в работах К.О. Ананченко, Л.М. Фридмана, А.А. Столяр, Н.А. Терешина, В.А. Далингера, И.М. Шапиро и др. Так, профессор К.О. Ананченко писал: «В учебнике “Алгебра. 8 класс” на конкретных примерах иллюстрируется схема применения аппарата алгебры к изучению действительности. Она состоит из трех этапов:

1-й этап. Перевод реальной ситуации на математический язык (составление уравнения, неравенства, системы).

2-й этап. Решение задачи внутри построенной математической модели (решение уравнения, неравенства, системы).

3-й этап. Интерпретация полученного решения (сопоставление полученного решения с условием задачи)» [7, с. 227].

На пропедевтическом этапе происходит расширение по изучению новых математических объектов и новых математических задач. В этот период вводят понятие «прикладная задача» и интерпретацию результатов с учетом условия прикладной задачи.

При поиске решения задачи, исследовании математической модели любого процесса происходит формирование умений построения алгоритма решения, удобного для программиро-

вания. У учащихся вырабатываются знания и умения, определяющие *алгоритмическую культуру*: «а) владение средствами и методами описания алгоритмов; б) умение алгоритмически подойти к решению задач школьного типа; в) знакомство с элементами программирования для ЭВМ» [8, с. 8].

Можно отметить, что Н.А. Терешин выделяет следующие дидактические функции математического моделирования в школьном курсе математики: *познавательная функция* – формирование познавательного образа изучаемого объекта, что происходит постоянно при переходе от простого к сложному; *функция управления деятельностью учащихся* – формирование ориентировочных, контрольных и коммуникационных действий; *интерпретационная функция* – ознакомление с тем, что один и тот же объект можно выразить с помощью различных моделей, а также можно выделить *эстетическую функцию моделирования*, *функции обеспечения целенаправленного внимания учащихся, запоминания и повторения учащимися учебного материала* и т.д.

Использование различных функций математической модели способствует наиболее плодотворному мышлению учащегося, так как его внимание легко и своевременно переключается с модели на полученную с ее помощью информацию об объекте и обратно [8, с. 19–20].

В процессе формирования умений решать текстовые задачи с помощью математических моделей устанавливаются межпредметные связи с различными дисциплинами, такими, как физика, химия, экономика, информатика и др.

III. Этап целенаправленного обучения

На этом этапе происходит обучение построению и исследованию универсальных учебных математических моделей с учетом специализации учащегося. Этап целенаправленного обучения разбивается на следующие периоды:

- 1) учебно-универсальный;
- 2) учебно-специализированный;
- 3) учебно-практический.

1. Учебно-универсальный

Учебно-универсальный этап можно начинать с обучающимися старших классов (X–XI классы) средней школы, поскольку учащиеся осознанно готовятся к выбору будущей профессии, и поэтому приступают к более глубокому изучению отдельных дисциплин.

Так, например, к учебно-универсальному этапу можно переходить уже на уроках инфор-

матики. К сожалению, в школьной программе по информатике на моделирование отведено только 4 часа, а понятие «модель» исключено из стандарта дисциплины. Этот недостаток можно частично исправить, проводя факультативы по моделированию [9].

При обучении математике в высшей школе происходит расширение знаний внутри самой математики, поэтому учебно-универсальный этап еще остается на младших курсах (I и II курсы). Изучение математике приобретает следующий характер: а) ознакомление с новыми математическими объектами, их классификациями; б) ознакомление с основными видами математических задач, их классификациями, методами решения.

На данном этапе частично прослеживаются общие положения с пропедевтическим этапом при формировании умений математическому моделированию. Но есть и различия. В учебно-ознакомительном периоде в высшей школе применяются несколько иные формы обучения математике, чем в пропедевтическом периоде. Так, например, изучение определенных разделов математики можно проводить по схеме (рис. 3).

Начиная изучение определенного раздела математики с формулировки прикладной задачи, мы тем самым отвечаем студентам на вопрос «Зачем это изучается?» В отличие от старших классов обучение построению математических моделей на младших курсах высшей школы носит профессиональную направленность.

Методике обучению математике в высшей школе с учетом профессиональной направленности, элементам математического моделирования уделялось внимание в работах В.Г. Скатецкого, А.Д. Мышкиса, Г.М. Булдык, А.Н. Колмогорова, Л.Д. Кудрявцева, О.И. Мельникова и др.

2. Учебно-специализированный

Студенты средних курсов (III, IV курсы) приступают к изучению специальных дисциплин, в основу которых положено математическое

моделирование: а) дисциплины, которые относятся к математическому циклу (это дискретная математика, экономико-математические методы и модели, исследование операций и др.); б) ряд общепрофессиональных и специальных дисциплин. Так, например, для машиностроительных специальностей – это нормирование точности и технические измерения (вероятностные модели), теория механизмов и машин (математические модели движения машин и механизмов с жесткими связями), теория автоматического управления технологическими системами (математическое описание линейных систем автоматического управления), теория резания (задачи оптимизации процесса резания) и др.

В этот период происходит введение научного определения понятий «математическая модель», «математическое моделирование».

Любая дисциплина, где используются математические модели, опирается на основные четыре этапа в процессе построения математической модели: *первый этап* – формирование законов, связывающих основные объекты модели; *второй этап* – исследование математических задач, к которым приводят математические модели; *третий этап* – выяснение того, удовлетворяет ли принятая (гипотетическая) модель критерию практики, т.е. выяснение вопроса о том, согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений; *четвертый этап* – последующий анализ модели в связи с накоплением данных изучаемых явлений и модернизацией модели [2, с. 574–575].

В рамках этого этапа студенты все же обучаются готовым специализированным математическим моделям, опираясь на знания, полученные в ходе обучения математике. Поскольку происходит обучение исследованию уже построенных моделей, то одновременно идет знакомство с универсальными математическими методами исследования.

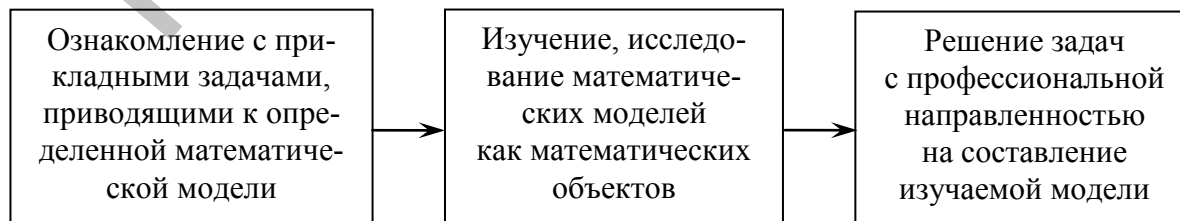


Рис. 3. Примерная последовательность изучения определенных разделов математики.

3. Учебно-практический

На старшем курсе (V курс) и отчасти на средних курсах (III и IV курсы) студентам приходится выполнять проектно-конструкторские, научно-исследовательские работы (НИР), на последнем курсе – проводить дипломное проектирование. В это время студенты начинают применять полученные знания построения математических моделей в частично-исследовательских работах. И, тем не менее, свои проектные работы студенты выполняют под руководством преподавателей.

Высшей ступени достигает человек, если он начинает самостоятельно заниматься научно-исследовательской деятельностью (магистранты, аспиранты, научные работники) с применением математического моделирования. Здесь охватываются все этапы математического моделирования: от «объекта» реальности до интерпретации результатов с последующей модернизацией математической модели.

Опираясь на проведенный анализ математической и психолого-педагогической литературы, нами предлагаются следующие этапы обучения математическому моделированию.

I. *Этап неявного обучения* характеризуется неявной заменой моделируемых объектов или отношений их условными обозначениями:

- *неявно-сенсорный этап* (от рождения до 3–4 лет) состоит в изучении простейших математических объектов как сенсорных эталонов;

- *неявно-конструктивный этап* (от 3–4 лет до 6 лет) предусматривает продолжение изучения простейших математических объектов (геометрических форм и величин) на уровне конструирования;

- *неявно-пропедевтический этап* (начальная школа) состоит в изучении новых математических объектов; установлении связей между отдельными объектами в контексте с простейшей математической задачей.

II. *Пропедевтический этап* (V–IX классы средней школы) заключается в знакомстве с простейшими допущениями и соглашениями, используемыми при переходе от словесного описания объекта, явления или ситуации к его математическому описанию. Этап, в основном, опирается на обучение решению текстовых задач.

III. *Этап целенаправленного обучения* заключается в конкретном обучении построению и исследованию универсальных и специализированных учебных математических моделей с учетом последующей специализации обучающегося:

- *учебно-универсальный этап* (старшие классы средней школы, младшие курсы высшей школы) включает введение понятия «*математическая модель*»; знакомство с принципами построения и исследования математических моделей; знакомство с наиболее распространенными универсальными математическими моделями и методами их исследования;

- *учебно-специализированный этап* (средние курсы высшей школы) состоит в изучении построения готовых математических моделей, используемых в профессиональной деятельности выпускника; знакомство с методами исследования;

- *учебно-практический этап* (старшие курсы высшей школы, магистратура, аспирантура) заключается в применении знаний по построению и исследованию новых математических моделей в учебной и исследовательской работе, а также при самостоятельной научной деятельности.

Заключение. На основе анализа математической и психолого-педагогической литературы были предложены три этапа обучения математическому моделированию: *этап неявного обучения, пропедевтический этап и этап целенаправленного обучения.* Особый интерес для авторов статьи представляет третий этап, поскольку в высшей школе недостаточно уделено внимания разработке методики обучения математическому моделированию в процессе преподавания математики в вузе, что на данный момент является одной из актуальных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. – М.: «Советская энциклопедия», 1982. – Т. 3. – С. 47.
2. Об утверждении перечня приоритетных направлений фундаментальных научных исследований Республики Беларусь на 2006–2010 годы // Постановление Совета Министров Республики Беларусь, 17 мая 2005 г., № 512.
3. Руководящий документ Республики Беларусь. Образовательный стандарт. Специальность 1-360101. Технология машиностроения, 2007. – 31 с.
4. Концепция по учебному предмету «Математика» для общеобразовательных учреждений с 11-летним сроком обучения // Матэматыка: праблемы выкладання. – 2009. – № 4. – С. 3–7.
5. Венгер, Л.А. Воспитание сенсорной культуры ребенка от рождения до 6 лет: кн. для воспитателя дет. сада / Л.А. Венгер [и др.]. – М.: Просвещение, 1988. – 144 с.
6. Сендер, А.Н. История и методология начального курса математики / А.Н. Сендер. – Брест: Брест. гос. ун-т, 2003. – 156 с.
7. Ананченко, К.О. Теоретические основы обучения алгебре в школах с углубленным обучением математике / К.О. Ананченко. – Минск: Белорус. гос. пед. ун-т, 2000. – 308 с.
8. Терешин, Н.А. Прикладная направленность школьного курса математики: кн. для учителя / Н.А. Терешин. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.
9. Мельников, О.И. Математическое моделирование в системе MAPLE / О.И. Мельников, А.А. Морозов. – Минск: НИО, 2009.

Поступила в редакцию 23.09.2011. Принята в печать 28.10.2011

Адрес для корреспонденции: 211401, г. Полоцк, ул. Ф. Скорины, д. 31, кв. 30, e-mail: irinakunc@yandex.ru – Кунцевич И.П.