

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.925

Зенченко Александра Сергеевна

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Навукова-
бібліяграфічны
аддзел

Установа адукацыі
"Віцебскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя С. М. Махарава"
БІБЛІЯТЭКА

Минск, 2004

22.10.2004
3-56

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный руководитель – доктор физ.-мат. наук, профессор
Громак Валерий Иванович,
Белгосуниверситет, кафедра
дифференциальных уравнений

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук, профессор
Мартынов Иван Платонович,
Гродненский государственный
университет им. Я.Купалы,
кафедра математического анализа

доктор физ.-мат. наук, доцент
Цегельник Владимир Владимирович,
Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники,
кафедра высшей математики



20504081

Оппонирующая организация – Московский инженерно-физический
институт (государственный университет)

Защита состоится 24 декабря 2004 г. в 10⁰⁰ на заседании совета по защите
диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по
адресу: г. Минск, пр. Скорины 4, ауд. 206.

Телефон ученого секретаря: 209-55-58.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государ-
ственного университета

Автореферат разослан “22” ноября 2004 г.

Учёный секретарь совета
по защите диссертаций
доктор физ.-мат. наук, профессор

А.А.Килбас

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена исследованию дифференциальных систем, эквивалентных уравнениям Пенлеве и их высшим аналогам.

Актуальность темы диссертации. С тех пор как С.В. Ковалевская продемонстрировала тесную взаимосвязь между видом дифференциального уравнения, аналитическим характером его решений и интегрируемостью, свойство отсутствия подвижных критических особых точек, называемое в настоящее время свойством Пенлеве, является, в некотором смысле, критерием интегрируемости. В значительной мере этому также способствовали два современных фактора. С одной стороны, гипотеза М. Абловица (М. Ablowitz), А. Рамани (A. Ramani) и Х. Сигура (H. Segur)¹ о критерии интегрируемости методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) уравнений в частных производных, определяемом свойством Пенлеве полученных из них точной редукцией обыкновенных дифференциальных уравнений, и существование большого числа важных в физике уравнений², проинтегрированных методом обратной задачи и допускающих точные редукции, сводимые к уравнениям Пенлеве. С другой стороны, работы Дж. Вайса (J. Weiss), М. Табора (M. Tabor) и Г. Карневейла (G. Carnevale) открыли новое направление — прямой Пенлеве-анализ нелинейных уравнений в частных производных. Следующим мощным импульсом развития теории уравнений со свойством Пенлеве были исследования М. Сато (M. Sato), Т. Мива (T. Miwa), М. Дзимбо (M. Jimbo) и К. Уэно (K. Ueno) по теории голономных квантовых полей и общей теории изомонодромных деформаций линейных систем. Таким образом, практически любой успех в изучении уравнений Пенлеве оказывает существенное влияние на связанные с ними классические математические проблемы и прикладные задачи. В настоящее время изучение уравнений Пенлеве, являющихся каноническими уравнениями второго порядка со свойством Пенлеве, проводится по различным направлениям, среди которых можно выделить исследование асимптотических свойств решений, изучение группы преобразований Беклунда и ее приложений, построение дискретных и высших аналогов уравнений Пенлеве и изучение свойств их решений, изучение неванлинговских характеристик решений и построение специальных классов решений, изучение свойств решений на основе аффинных групп симметрий. Эти вопросы рассматривались в работах

¹ Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987. — 479 с.

² Ablowitz M.J., Clarkson P.A. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering (Lect. Notes Math. Vol. 149). — Cambridge: C.U.P., 1991. — 350 p.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

М. Абловица, В.И. Громака, Б. Дубровина, А.Р. Итса, А.А. Капаева, Х. Кимуры (H. Kimura), А.В. Китаева, П.А. Кларксона (P.A. Clarkson), Р. Конта (R. Conte), М. Крускала (M. Kruskal), Н.А. Кудряшова, И. Лайна (I. Laine), М. Мазоццо (M. Mazocco), М. Наоми (M. Noumi), В.Ю. Новокшенова, К. Окамото (K. Okamoto), И. Охты (Y. Ohta), А. Фокаса (A. Fokas), А. Хинкканена (A. Hinkkanen), Ш. Шимомуры (S. Shimomura), Х. Эроулт (H. Airault) и др. (см. цитируемые монографии и в них список литературы^{1,2,3,4,5,6,7})

В серии работ, начатых в конце 70-х г., К. Окамото⁸ ввел понятие τ - функций для уравнений Пенлеве на основании того факта, что каждое из шести уравнений Пенлеве может быть записано в виде гамильтоновой системы, а затем представил преобразования Беклунда, рассматриваемые также как симметрии уравнений Пенлеве, в виде дискретных систем относительно параметров (уравнений Тоды). С другой стороны, преобразования Беклунда можно рассматривать как системы уравнений, связывающих решение уравнения с другим решением того же уравнения, возможно, с другими значениями параметров. Этот подход был предложен и развит В.И. Громаком и Н.А. Лукашевичем⁹ для построения преобразований Беклунда. В этой связи оставался неисследованным вопрос о классификации систем, эквивалентных уравнениям Пенлеве.

Полная классификация уравнений третьего и, тем более, высших порядков, обладающих свойством Пенлеве, начатая в работах Ж. Шази (J. Chazy) и Р. Гарнье (R. Garnier) и продолженная в работах Н.П. Еругина, А.И. Яблонского, С.Г. Кондратени, И.П. Мартынова, Ф. Бюро (F. Bureau) и К. Косгрова (C. Cosgrove), еще далека от завершения. Однако в настоящее время исследуются высшие аналоги уравнений Пенлеве, полученные методами, отличными от прямого метода Пенлеве. Среди

¹ *Its A.R., Novokshenov V.Y.* The isomonodromic deformation method in the theory of Painlevé equations (Lect. Notes in Math. Vol. 1191). — Berlin — Heidelberg — New-York — Tokyo: Springer, 1986. — 313 p.

⁴ *Gromak V.I., Laine I., Shimomura S.* Painlevé differential equations in the complex plane (De Gruyter studies in Mathematics, Vol.28). — Berlin. — New-York: de Gruyter, 2002. — 300 p.

⁵ *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 360 с.

⁶ *Noumi M.* Painlevé equations through symmetry. — Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2004. — 158 p.

⁷ *From Gauss to Painlevé. A modern theory of special functions* (Aspects of Mathematics) / K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida. — Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1991. — 347 p.

⁸ *Okamoto K.* On the τ -function of the Painlevé equations // *Physica D.* — 1981. — Vol. 2. — P. 525 — 535.

⁹ *Громак В.И., Лукашевич Н.А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. — М.: Университетское, 1990. — 156 с.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

них можно выделить уравнения, полученные редукциями из нелинейных эволюционных уравнений, в частности, из иерархии уравнений Кортевега - де Фриза. Такие уравнения обладают свойствами, аналогичными свойствам уравнений Пенлеве, такими как преобразования Беклунда, существование специальных классов решений, фундаментальных областей параметров. Тем не менее, многие вопросы, и в первую очередь связанные со структурой решений высших аналогов уравнений Пенлеве, в частности, гамильтонова структура и алгебраическая структура, определяемая преобразованиями Беклунда, а также структура мероморфных и рациональных решений, оставались открытыми.

Исследованию указанных вопросов и посвящена настоящая диссертация.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Исследования проводились на кафедре дифференциальных уравнений Белорусского государственного университета в рамках госбюджетной научной темы "Разработка аналитических, качественных и компьютерных методов исследования нелинейных систем Р-типа, их анализ и приложения"(план НИР Белгосуниверситета №888/26 в 2003 году) и в рамках научного проекта Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований "Нелинейные дифференциальные уравнения Р-типа, их анализ и приложения"(проект № Ф04-087 в 2004 г.)

Цель и задачи исследования. Цель исследования — классификация дифференциальных систем в нормальной форме с рациональными правыми частями, эквивалентных уравнениям Пенлеве, изучение свойств решений высших аналогов четвертого порядка первого и второго уравнений Пенлеве. В ходе выполненной работы было выявлено, что для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- получить условия принадлежности дифференциальных систем к системам Р-типа и условия их эквивалентности уравнениям Пенлеве, найти канонические системы в исследуемых классах нормальных систем;
- установить гамильтонову структуру высших аналогов четвертого порядка первого и второго уравнений Пенлеве и алгебраическую структуру, определяемую преобразованиями Беклунда, высшего аналога четвертого порядка второго уравнения Пенлеве;
- получить представление мероморфных и, в частности, рациональных решений высшего аналога четвертого порядка второго уравнения Пенлеве.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются нелинейные системы дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве, а также высшие аналоги первого и второго уравнений Пенлеве. Предметом

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

исследования являются классы эквивалентных систем, преобразования Беклунда, гамильтонианы, τ - функции, мероморфные и рациональные решения высших аналогов уравнений Пенлеве.

Методология и методы проведенного исследования. В работе наряду с классическими методами комплексного анализа и дифференциальных уравнений используется метод малого параметра Пенлеве, метод эквивалентных систем, метод билинейного представления Хироты, а также метод редукции из уравнений с частными производными к обыкновенным дифференциальным уравнениям, основанный на теории симметрий.

Научная новизна и значимость полученных результатов. В диссертации получены следующие новые результаты:

- получены необходимые условия принадлежности дробно-линейной системы дифференциальных уравнений к системам Р-типа, построены канонические системы, эквивалентные уравнениям Пенлеве, в классах квазилинейных и дробно-линейных систем;
- построены преобразования Беклунда для высшего аналога четвертого порядка второго уравнения Пенлеве;
- для высших аналогов четвертого порядка первого и второго уравнений Пенлеве построены эквивалентные гамильтоновы системы с полиномиальными гамильтонианами;
- для высших аналогов четвертого порядка первого и второго уравнений Пенлеве введены τ -функции, и доказано, что для высшего аналога четвертого порядка второго уравнения Пенлеве группа преобразований Беклунда определяет на множестве решений и τ -функций и их производных алгебраическую структуру;
- получено представление мероморфных решений высшего аналога четвертого порядка второго уравнения Пенлеве через отношение целых функций, определяемых уравнениями с иррациональной правой частью, являющееся аналогом представления Яблонского для решений второго уравнения Пенлеве;
- получен аналог представления Яблонского-Воробьева рациональных решений высшего аналога четвертого порядка второго уравнения Пенлеве;
- получена билинейная форма Хироты для высшего аналога четвертого порядка второго уравнения Пенлеве;
- построено представление рациональных решений высшего аналога четвертого порядка второго уравнения Пенлеве функциями Шура.

Практическая значимость полученных результатов. Работа имеет теоретический характер, ее результаты могут быть использованы

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

в аналитической теории дифференциальных уравнений, при чтении спецкурсов по теории дифференциальных уравнений в Белорусском, Гродненском, Брестском университетах. Также они могут найти применение при решении задач теоретической и математической физики, при построении математических моделей в теории нелинейных колебаний и квантовой теории поля, изучаемых в Московском инженерно-физическом институте (государственном университете), Санкт-Петербургском отделении математического института им. В.А. Стеклова РАН, Институте математики Уфимского научного центра РАН.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту

На защиту выносятся:

1. Необходимые условия свойства Пенлеве для дробно-линейных систем и описание канонических систем, эквивалентных уравнениям Пенлеве, в классах квазилинейных и дробно-линейных систем.
2. Построение преобразований Беклунда и доказательство алгебраических свойств множества решений, порожденных преобразованиями Беклунда, высшего аналога четвертого порядка второго уравнения Пенлеве и гамильтоновой структуры высших аналогов четвертого порядка первого и второго уравнений Пенлеве.
3. Представление Яблонского-Воробьева и функциями Шура мероморфных и рациональных решений высшего аналога четвертого порядка второго уравнения Пенлеве.

Личный вклад соискателя. Результаты, приведенные в диссертации, получены лично соискателем. Научному руководителю, в соавторстве с которым написана часть работ, принадлежат общая постановка задачи, выбор направления исследования и анализ полученных результатов.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на VII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов Беларуси (Витебск, 2002); на международной математической конференции "Еругинские чтения IX" (Витебск, 2003), на 8-й международной конференции "Mathematical Modelling and Analysis" (Тракай (Литва), 2003); на международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE 2003)" (Минск, 2003); на научных семинарах кафедры дифференциальных уравнений Белорусского государственного университета.

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 научных работах, среди которых 5 статей в научных

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

журналах, одна из которых выполнена без соавторов, 1 статья в сборнике трудов конференции и 4 тезисов выступлений на математических конференциях. Общий объем опубликованных материалов — 59 страниц.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из общей характеристики работы, трех глав, заключения, списка использованных источников. Полный объем диссертации — 101 страница, из которых 10 страниц занимает список использованных источников, состоящий из 123 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе диссертации приведен обзор основных этапов развития теории уравнений Пенлеве, а также изложены основные методы исследования: метод малого параметра, метод эквивалентных систем, метод билинейного представления Хироты, метод редукции из нелинейных уравнений в частных производных. Обоснованы и сформулированы задачи исследования.

Высшие аналоги первого и второго уравнений Пенлеве получаются методом симметричных редукций из модифицированной иерархии Кортевега - де Фриза нелинейных уравнений в частных производных^{1,5}. Иерархия высших аналогов второго уравнения Пенлеве имеет вид

$${}_{2n}P_2 \equiv \left(\frac{d}{dz} + 2w \right) L_n[w' - w^2] - zw - \alpha = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

иерархия высших аналогов первого уравнения Пенлеве записывается в виде

$${}_{2n-2}P_1 \equiv L_n[y] - \frac{z}{2} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где оператор L_n определяется рекуррентными соотношениями

$$L_1[u] = u, \quad \frac{d}{dz} L_{n+1} = \left(\frac{d^3}{dz^3} + 4u \frac{d}{dz} + 2u' \right) L_n. \quad (3)$$

При $n = 1$ из (1) получаем уравнение ${}_2P_2$, которое совпадает со вторым уравнением Пенлеве, а при $n = 2$ уравнение имеет вид

$$w^{(4)} = 10 w^2 w'' + 10 w (w')^2 - 6 w^5 + zw + \alpha \quad ({}_4P_2)$$

и рассматривается как высший аналог четвертого порядка второго уравнения Пенлеве. В диссертации изучается уравнение

$$w^{(4)} = 10 w^2 w'' + 10 w (w')^2 + \beta (w'' - 2w^3) - 6 w^5 - zw - \alpha, \quad ({}_4\tilde{P}_2)$$

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

полученное прямым методом построения обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка со свойством Пенлеве. Уравнение $({}_4\tilde{P}_2)$ содержит дополнительные члены с дополнительным параметром β и обобщает уравнение $({}_4P_2)$, которое получается из него при $\beta = 0$, $z \rightarrow -z$, $\alpha \rightarrow -\alpha$.

При $n = 1$ из (2) получаем соотношение, определяющее посредством $w' - w^2 = y$ однопараметрическое семейство решений второго уравнения Пенлеве. При $n = 2$ получаем первое уравнение Пенлеве, которое масштабным преобразованием переписывается в стандартном виде, а при $n = 3$ получаем уравнение, которое можно переписать в виде

$$y^{(4)} = 20 y y'' + 10 (y')^2 - 40 y^3 + z, \quad ({}_4P_1)$$

рассматриваемое обычно в качестве высшего аналога четвертого порядка первого уравнения Пенлеве.

Известно, что преобразования Беклунда являются важным инструментом исследования свойств нелинейных уравнений как в частных производных, так и обыкновенных дифференциальных уравнений, и, в частности, уравнений Пенлеве¹⁰. Одним из методов построения преобразований Беклунда является метод эквивалентных систем⁹.

Метод билинейного представления Хироты основан на использовании билинейного дифференциального оператора, определяемого в общем виде для функций многих переменных $f(x_1, x_2, \dots)$, $g(x_1, x_2, \dots)$ следующим образом:

$$P(D)f \cdot g = P\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots\right) (f(x+y)g(x-y))|_{y_1=y_2=\dots=0},$$

где P — полином от $D = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots\right)$. Данный метод является эффективным при нахождении солитонных и рациональных решений нелинейных уравнений в частных производных.

Во второй главе диссертации рассматривается множество нормальных систем

$$w' = f(z, w, u), \quad u' = g(z, w, u), \quad (4)$$

где $f(z, w, u)$, $g(z, w, u)$ — рациональные функции переменных w , u , $f_u \neq 0$, с аналитическими по z в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ коэффициентами, эквивалентных по w уравнениям Пенлеве.

¹⁰ *Backlund transformations, the inverse scattering method, solitons, and their applications* (Lecture Notes in Math., Vol. 515) / Ed. R.Miura.— Berlin: Springer, 1976. — 296 p.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

Представление (24) является представлением рациональных решений уравнения $({}_4\tilde{P}_2)$ функциями Шура. Из этого представления, в частности, следует, что функция $Q_{\alpha+1}$ из (19) является полиномом, если P_α и Q_α полиномы.

Теорема 11. *Рациональное решение уравнения $({}_4\tilde{P}_2)$ существует тогда и только тогда, когда $\alpha = n \in \mathbb{Z}$. При каждом таком α рациональное решение единственно. При $\alpha = n \geq 1$ оно имеет вид*

$$w(z, n) = \frac{d}{dz} \ln \frac{Q_{n-1}(z)}{Q_n(z)}, \quad (25)$$

где полиномы $Q_n(z)$ удовлетворяют дискретно-дифференциальному соотношению

$$(2D_z^4 - 2\beta D_z^2 + z)Q_n \cdot Q_n = Q_{n+1}Q_{n-1}, \quad Q_0 = 1, \quad Q_1 = z, \quad (26)$$

а D_z — оператор Хироты. При $\alpha = 0$ рациональное решение $w(z, 0) = 0$, а при $\alpha = n \leq -1$ рациональное решение определяется соотношением $w(z, n) = -w(z, -n)$.

Теорема 11 содержит представление Яблонского-Воробьева рациональных решений уравнения $({}_4\tilde{P}_2)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование дифференциальных систем, эквивалентных уравнениям Пенлеве и их высшим аналогам. Получены следующие основные результаты.

1. Доказаны необходимые условия наличия у дробно-линейных и квазилинейных систем свойства Пенлеве, и найдены канонические системы, эквивалентные уравнениям Пенлеве, в классах квазилинейных и дробно-линейных систем [1, 3, 4, 6].
2. Построены преобразования Беклунда для высшего аналога четвертого порядка второго уравнения Пенлеве и доказаны алгебраические свойства множества решений, порождаемых преобразованиями Беклунда, для высшего аналога четвертого порядка второго уравнения Пенлеве, гамильтонова структура высших аналогов четвертого порядка первого и второго уравнений Пенлеве [2, 3, 5, 7, 8, 9].
3. Получено представление Яблонского-Воробьева и функциями Шура мероморфных и рациональных решений высшего аналога четвертого порядка второго уравнения Пенлеве [10].

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи

1. *Зенченко А.С.* О дифференциальных системах, эквивалентных первому уравнению Пенлеве // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. — 2003. — № 2. — С. 85 — 90.
2. *Громак В.И., Зенченко А.С.* К теории уравнений Пенлеве высших порядков // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 5. — С. 582 — 589.
3. *Gromak V.I., Zenchenko A.S.* On the systems equivalent to the Painlevé equations and their higher analogues // Univ. Joensuu. Dept. Math. Rep. Ser. — 2004. — № 6. — С. 31 — 56.
4. *Громак В.И., Зенченко А.С.* О дифференциальных системах со свойством Пенлеве // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2004. — № 4. — С. 5 — 10.
5. *Голубева Л.Л., Зенченко А.С.* Некоторые свойства решений уравнения $(\tilde{4}P_2)$ // Труды Инст. мат. НАН Беларусі. — 2004. — Т. 12, № 2. — С. 54 — 56.

Труды конференций

6. *Зенченко А.С.* О системах, эквивалентных уравнениям Пенлеве // VII Республиканская научная конференция студентов и аспирантов Беларуси (НИРС-2002): Материалы конф., Витебск, 22–23 окт. 2002 г. / ВГТУ. — Витебск, 2002. — С. 50 — 52.

Тезисы докладов

7. *Зенченко А.С.* Гамильтоновы системы, эквивалентные уравнениям Пенлеве // Еругинские чтения - IX: Тез. докл. междунар. матем. конф., Витебск, 20–22 мая 2003 г./ВГУ им. П. М. Машерова. — Витебск, 2003. — С. 65 — 66.
8. *Зенченко А.С.* Алгебраическая зависимость τ -функций второго уравнения Пенлеве // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE 2003): Тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 4–9 сент. 2003 г. / БГУ. — Минск, 2003. — С. 76 — 77.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

9. *Gromak V.I., Zenchenko A.S.* Hamiltonian systems equivalent to the higher Painlevé equations. // Mathematical modelling and analysis: Abstracts of the 8th International Conference MMA 2003, May 28–31, 2003, Trakai, Lithuania. / ECMI, Institute of Mathematics and Informatics, Vilnius, Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius University. — Trakai, 2003. — P. 25.
10. *Зенченко А.С.* О рациональных решениях уравнения $(_4\tilde{P}_2)$ // IX Белорусская математическая конференция: Тез. докл. матем. конф., Гродно, 3–6 ноября 2004 г. В 3 ч. / ГрГУ. — Гродно, 2004. — Ч.1. — С. 126 — 127.

A. Zenchenko

РЕЗЮМЕ

Зенченко Александра Сергеевна

Системы дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве

Ключевые слова: уравнения Пенлеве, преобразование Беклунда, гамильтонова система, τ -функция, оператор дифференцирования Хироты, рациональные и мероморфные решения.

Объект исследования — нелинейные системы дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве, а также высшие аналоги первого и второго уравнений Пенлеве. Предмет исследования — классы эквивалентных систем, преобразования Беклунда, гамильтонианы, τ -функции, мероморфные и рациональные решения высших аналогов уравнений Пенлеве.

Цель исследования — классификация дифференциальных систем в нормальной форме с рациональными правыми частями, эквивалентных уравнениям Пенлеве, изучение свойств решений высших аналогов четвертого порядка первого и второго уравнений Пенлеве.

В работе используются классические методы комплексного анализа и дифференциальных уравнений, метод малого параметра Пенлеве, метод эквивалентных систем, метод билинейного представления Хироты, а также метод редукции из уравнений с частными производными к обыкновенным дифференциальным уравнениям, основанный на теории симметрий.

В диссертации получены следующие новые результаты. Получены необходимые условия принадлежности дробно-линейной системы дифференциальных уравнений к системам Р-типа, найдены канонические системы, эквивалентные уравнениям Пенлеве, в классах квазилинейных и дробно-линейных систем. Построены преобразования Беклунда для высшего аналога четвертого порядка второго уравнения Пенлеве и доказаны алгебраические свойства множества решений, порождаемых преобразованиями Беклунда, для высшего аналога четвертого порядка второго уравнения Пенлеве, гамильтонова структура высших аналогов четвертого порядка первого и второго уравнений Пенлеве. Получено представление Яблонского-Воробьева и функциями Шура мероморфных и рациональных решений высшего аналога четвертого порядка второго уравнения Пенлеве.

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в аналитической теории дифференциальных уравнений, теоретической и математической физике.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

РЭЗЮМЕ

Зенчанка Аляксандра Сяргееўна

Сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў з ўласцівасцю Пенлеве

Ключавыя словы: раўнанні Пенлеве, пераўтварэнне Бэклунда, гамільтонава сістэма, τ -функцыя, аператар дыферэнцыравання Хіроты, рацыянальныя і мераморфныя рашэнні.

Аб'ект даследавання — нелінейныя сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў з уласцівасцю Пенлеве, а таксама вышэйшыя аналагі першага і другога раўнанняў Пенлеве. Прадмет даследавання — класы эквівалентных сістэм, пераўтварэнні Бэклунда, гамільтаніяны, τ -функцыі, мераморфныя і рацыянальныя рашэнні вышэйшых аналагаў раўнанняў Пенлеве.

Мэта даследавання — класіфікацыя дыферэнцыяльных сістэм ў нармальнай форме з рацыянальнымі правымі часткамі, эквівалентных раўнанням Пенлеве, вывучэнне ўласцівасцяў рашэнняў вышэйшых аналагаў чацвертага парадку першага і другога раўнанняў Пенлеве.

У дысертацыі выкарыстаны класічныя метады камплекснага аналізу і дыферэнцыяльных раўнанняў, метады малага параметру Пенлеве, метады эквівалентных сістэм, метады білінейнага прадстаўлення Хіроты, а таксама метады рэдукцыі з раўнанняў з частковымі вытворнымі да звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў, заснаваны на тэорыі сіметрыі.

У дысертацыі атрыманы наступныя новыя вынікі. Атрыманы неабходныя ўмовы прыналежнасці дробна-лінейнай сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў да сістэм Р-тыпа, знойдзены кананічныя сістэмы, эквівалентныя раўнанням Пенлеве, у класах квазілінейных і дробна-лінейных сістэм. Пабудаваны пераўтварэнні Бэклунда для вышэйшага аналогу чацвертага парадку другога раўнання Пенлеве, і даказаны алгебраічныя ўласцівасці мноства рашэнняў, пароджаных пераўтварэннямі Бэклунда, для вышэйшага аналогу чацвертага парадку другога раўнання Пенлеве, гамільтонава структура вышэйшых аналагаў чацвертага парадку першага і другога раўнанняў Пенлеве. Атрымана прадстаўленне Яблонскага-Вараб'ева і функцыямі Шура мераморфных і рацыянальных рашэнняў вышэйшага аналогу чацвертага парадку другога раўнання Пенлеве.

Атрыманыя ў дысертацыі вынікі могуць быць выкарыстаны ў аналітычнай тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў, тэарэтычнай і матэматычнай фізіцы.

RÉSUMÉ

Alexandra Zenchenko

The systems of differential equations with the Painlevé property

Key words: the Painlevé equations, the Bäcklund transformation, a Hamiltonian system, a τ -function, the Hirota differential operator, rational and meromorphic solutions.

The object of the research is the nonlinear systems of differential equations with the Painlevé property as well as the higher-order analogues of the first and the second Painlevé equations. The subject of the research is the classes of equivalent systems, Bäcklund transformations, Hamiltonians, τ -functions, meromorphic and rational solutions of higher-order analogues of the Painlevé equations.

The aim of the research is the classification of differential systems in the normal form with rational right-hand sides equivalent to the Painlevé equations and the study of the properties of the fourth-order analogues of the first and the second Painlevé equations.

The classical methods of complex analysis and differential equations, the Painlevé method of a small parameter, the method of equivalent systems, the method of the bilinear Hirota representation and the method of the reduction from the partial differential equations based on the symmetry theory are applied in the thesis.

The new results obtained in the thesis are as follows. The necessary conditions for the rational-linear differential system to be of P-type are derived, canonical systems equivalent to the Painlevé equations in the classes of quasi-linear and rational-linear systems are found. The Bäcklund transformations for the fourth-order analogue of the second Painlevé equation are constructed, and the algebraic properties of the set of solutions generated by the Bäcklund transformations and the polynomial Hamiltonian structure of the fourth-order analogues of the first and the second Painlevé equations are proved.

The Yablonski-Vorob'ev representation as well as by Schur functions representation of meromorphic and rational solutions of the fourth-order analogue of the second Painlevé equation are derived.

The results obtained in the thesis can be used in analytical theory of differential equations, in theoretical and mathematical physics.