УДК 517.926+517.977

# Об управлении характеристическими показателями трехмерных линейных дифференциальных систем с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами

**А.А. Козлов, А.Д. Бурак**
*Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»*

*В данной работе рассмотрена задача глобального управления характеристическими показателями Ляпунова трехмерных линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами и доказано, что если трехмерная линейная нестационарная управляемая система с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то полный спектр показателей Ляпунова соответствующей ей замкнутой линейной дифференциальной системы с измеримой и ограниченной обратной связью, линейной по фазовым переменным, глобально управляем.*

*Предложенный метод, несмотря на свою достаточную сложность и объемность уже в случае размерности фазового пространства* $n = 3,$ *рассмотренном в работе, указывает на возможность в дальнейшем своего распространения на линейные дифференциальные системы с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами более высоких размерностей.*

***Ключевые слова:*** *линейная нестационарная система, равномерная полная управляемость, глобальное управление показателями Ляпунова, характеристические показатели, матричная задача управления.*

# About the control exponent characteristics of the three-dimensional linear differential systems with non-continuous and fast oscillated coefficients

**A.A. Kozlov, A.D. Burak**
*Educational establishment «Polotsk State University»*

*The problem of global control characteristic exponents of Lyapunov three-dimensional linear non-stationary systems of ordinary differential equations with non-continuous and fast oscillated coefficients is considered in the paper and it is proved that if three-dimensional linear non-stationary controllable system with locally integrate and integrally bounded coefficients is uniformly globally controllable, then full spectrum of the exponents of Lyapunov respective to its closed linear differential system with measurable and bounded feedback linear on phases variables is globally controllable.*

*The offered method, in spite of its sufficient difficulty and big volume already in the event of dimensionality of the phase space* $n = 3,$ *considered in work, indicates the possibility of its spreading on linear differential systems with non-continuous and fast oscillated coefficients of higher dimensionality in the future.*

***Key words:*** *linear non-stationary system, uniformly global controllability, global control of the exponents of Lyapunov, characteristic exponents, matrix problem of control.*

Рассмотрим линейную управляемую нестационарную систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \; x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \qquad (1)$$

с локально интегрируемыми по Лебегу [1, с. 359] и интегрально ограниченными [2, с. 252] матрицами коэффициентов $A$ и $B$. Замыкая систему (1) при помощи линейной обратной связи $u = U(t)x,$ где $U$ – некоторая измеримая [1, с. 50] и ограниченная $(m \times n)$ -матрица, получим однородную систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \qquad (2)$$

коэффициенты которой также локально интегрируемы и интегрально ограничены. Это значит, что система (2) имеет конечные характеристические показатели Ляпунова [2, с. 245; 3, с. 72] $\lambda_1(A+BU) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+BU).$

Задача о построении для системы (1) обратной связи $u = U(t)x,$ обеспечивающей выполнение равенств $\lambda_i(A+BU)=\mu_i$, $i=\overline{1,n}$, для произвольных заранее заданных вещественных чисел $\mu_1\leqslant\ldots\leqslant\mu_n$, называется задачей глобального управления характеристическими показателями Ляпунова [4].

В [5] приведен краткий перечень работ, содержащих фундаментальные результаты, относящиеся к задаче глобального управления показателями Ляпунова и другими асимптотическими инвариантами [6, с. 61–71] линейных нестационарных систем (2), а также указана монография [6], являющаяся на сегодняшний день наиболее полным собранием работ по данной тематике исследований. Основным же содержанием статьи [5] были формулировка и доказательство теоремы 1 и лемм 1–8, необходимых для установления глобальной управляемости показателей Ляпунова трехмерных линейных систем (2), которое является главными целью и результатом данной работы. Таким образом, в представленном исследовании предложено доказательство глобальной управляемости характеристических показателей Ляпунова трехмерных линейных нестационарных систем (2) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами в случае равномерной полной управляемости соответствующей системы (1).

**Материал и методы.** Исходя из поставленной цели исследования, всюду в дальнейшем будем считать, что система (1) обладает свойством равномерной полной управляемости [4], а размерность этой системы $n=3$. Также, поскольку представленная работа является продолжением статьи [5], для краткости изложения материала будем утверждать, что формулировки вспомогательных лемм 1–8 и теоремы 1, определения всех объектов, свойств, величин, используемых далее в работе и считаемых как изначально данными, содержатся в [5], и, в случае необходимости, отсылать читателя к этой статье. Кроме того, стоит заметить, что нумерация замечаний, лемм и теорем данной работы продолжает нумерацию исследования [5].

**Результаты и их обсуждение.** Прежде чем перейти к формулировке и доказательству основного результата работы, покажем, что имеет место следующая, аналогичная лемме 4 работы [5], необходимая нам в дальнейшем

**Лемма 9.** *При любых числах* $0<\delta,\beta\leqslant 1$ *и произвольных единичных векторах* $\xi_i\in\mathbb{R}^3$, $i=\overline{1,3}$, *таких, что имеет место оценка* $|\det[\xi_1,\xi_2,\xi_3]|\geqslant\delta$, *среди векторов* $\nu_i\in\mathbb{R}^3$, $\|\nu_i\|=1$, $i=\overline{1,3}$, *удовлетворяющих неравенству* $|\det[\nu_1,\nu_2,\nu_3]|\geqslant\beta$, *найдется хотя бы один такой вектор* $\nu$, *при котором справедливо соотношение* $|\det[\xi_1,\xi_2,\nu]|\geqslant\delta\beta/3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольные числа $0<\delta,\beta\leqslant 1$ и векторы $\xi_i\in\mathbb{R}^3$, $i=\overline{1,3}$, удовлетворяющие условиям данной леммы, и предположим противное, т.е. что для всех векторов $\nu_i\in\mathbb{R}^3$, $i=\overline{1,3}$, определенных в лемме 9, выполняется обратное неравенство

$$|\det[\xi_1,\xi_2,\nu_i]|<\delta\beta/3. \tag{3}$$

Из определения векторов $\nu_i\in\mathbb{R}^3$, $i=\overline{1,3}$, вытекает их линейная независимость, а, ввиду равенства $\dim\mathbb{R}^3=3$, эти векторы образуют базис. Возьмем единичный вектор $\xi^\perp\in\mathbb{R}^3$ такой, что $\xi^\perp\perp L(\xi_1,\xi_2)$, где $L(\xi_1,\xi_2)\subset\mathbb{R}^3$, как и всюду далее, будет обозначать линейную оболочку, натянутую на векторы $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}^3$. Поскольку векторы $\nu_i$, $i=\overline{1,3}$, составляют базис, то справедливо разложение $\xi^\perp=\sum_{i=1}^3\alpha_i\nu_i$ с некоторыми коэффициентами $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,3}$. Найдем оценки сверху на модули этих коэффициентов. Ввиду определения векторов $\nu_i$, $i=\overline{1,3}$, неравенства Адамара [7, с. 565] и простейших свойств определителя выполняются соотношения

$$\begin{gathered}1=\|\xi^\perp\|\,\|\nu_1\|\,\|\nu_2\|\geqslant|\det[\xi^\perp,\nu_1,\nu_2]|=\\=|\det[\alpha_1\nu_1+\alpha_2\nu_2+\alpha_3\nu_3,\nu_1,\nu_2]|=\\=|\alpha_1\det[\nu_1,\nu_1,\nu_2]+\alpha_2\det[\nu_2,\nu_1,\nu_2]+\\+\alpha_3\det[\nu_3,\nu_1,\nu_2]|=|\alpha_3|\cdot|\det[\nu_3,\nu_1,\nu_2]|=\\=|\alpha_3|\cdot|\det[\nu_1,\nu_2,\nu_3]|\geqslant|\alpha_3|\cdot\beta,\end{gathered}$$

из которых следует неравенство $|\alpha_3|\leqslant 1/\beta$. Аналогичным образом находятся оценки и для остальных коэффициентов $\alpha_i$, $i=1,2$: $|\alpha_i|\leqslant 1/\beta$. Поэтому справедливо неравенство $\sum_{i=1}^3|\alpha_i|\leqslant 3/\beta$, из которого ввиду определения векторов $\xi_1,\xi_2,\xi^\perp$, оценки (3), а также простейших алгебраических и геометрических свойств определителя следуют соотношения

$$|\det[\xi_1,\xi_2,\xi_3]| = \|\xi_1\|\,\|\xi_2\|\,\|\xi_3\|\cdot$$
$$\cdot\,|\sin\sphericalangle(\xi_1,\xi_2)|\,|\sin\sphericalangle(\xi_3,L(\xi_1,\xi_2))| \leqslant$$
$$\leqslant \|\xi_1\|\,\|\xi_2\|\cdot 1\cdot 1\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_1,\xi_2)| =$$
$$= \|\xi_1\|\,\|\xi_2\|\,\|\xi^{\perp}\|\cdot\sin(\pi/2)\cdot|\sin\sphericalangle(\xi_1,\xi_2)| =$$
$$= \|\xi_1\|\,\|\xi_2\|\,\|\xi^{\perp}\|\,|\sin\sphericalangle(\xi_1,\xi_2)|\cdot|\sin\sphericalangle(\xi^{\perp},L(\xi_1,\xi_2))| =$$
$$= |\det[\xi_1,\xi_2,\xi^{\perp}]| = |\det[\xi_1,\xi_2,\textstyle\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\nu_i]| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{3}|\alpha_i|\cdot|\det[\xi_1,\xi_2,\nu_i]| < \sum_{i=1}^{3}|\alpha_i|\cdot(\delta\beta/3) \leqslant$$
$$\leqslant (3/\beta)\cdot(\delta\beta/3) = \delta,$$

которые приводят к противоречащему условиям леммы 9 неравенству $|\det[\xi_1,\xi_2,\xi_3]| < \delta.$ Следовательно, для некоторого вектора $\nu\in\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$ справедливо обратное оценке (3) соотношение, т.е. неравенство $|\det[\xi_1,\xi_2,\nu]| \geqslant \delta\beta/3.$ Лемма 9 доказана.

Помимо леммы 9 далее нам также потребуется нижеприведенная

**Лемма 10.** *При любых числах* $0<\delta\leqslant 1$ *и* $0<\varphi<\delta,$ *произвольных единичных векторах* $\xi_i\in\mathbb{R}^3,$ $i=\overline{1,3},$ *таких, что имеет место оценка* $|\det[\xi_1,\xi_2,\xi_3]|\geqslant\delta,$ *если для единичного вектора* $\xi\in\mathbb{R}^3$ *выполняется неравенство* $\sphericalangle(\xi,\xi_k)\leqslant\varphi$ *при некотором* $k\in\{1,2,3\},$ *то справедливо соотношение*

$$|\det[\xi,\xi_i,\xi_j]| \geqslant \delta-\varphi,\ \ i,j\in\{1,2,3\},$$
$$i\neq j\neq k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольные числа $\delta,\varphi$ и векторы $\xi_i\in\mathbb{R}^3,$ $i=\overline{1,3},$ удовлетворяющие условиям леммы 10. Возьмем такой единичный вектор $\xi\in\mathbb{R}^3,$ что для некоторого $k\in\{1,2,3\}$ выполняется неравенство $\sphericalangle(\xi,\xi_k)\leqslant\varphi.$ Не ограничивая общности рассуждений будем считать, что $k=1$. Тогда имеет место оценка $\sphericalangle(\xi,\xi_1)\leqslant\varphi,$ пользуясь которой докажем справедливость соотношения $|\det[\xi,\xi_2,\xi_3]|\geqslant\delta-\varphi$ (неравенство $|\det[\xi,\xi_3,\xi_2]|\geqslant\delta-\varphi$ в этом случае будет следовать из последнего соотношения и очевидного равенства $|\det[\xi,\xi_3,\xi_2]| = |\det[\xi,\xi_2,\xi_3]|$). Пусть $\omega:=\xi_1-\xi.$ Из последней оценки, неравенства $\sin\psi\leqslant\psi,$ верного для любого $0<\psi\leqslant\pi/2$, убывания функции $\cos$ на промежутке $[0,\pi/2],$ определений величины $\varphi,$ векторов $\omega,$ $\xi,$ $\xi_1,$ а также скалярного произведения векторов следуют соотношения

$$\|\omega\|^2 = \|\xi_1-\xi\|^2 = \|\xi_1\|^2 +$$
$$+\|\xi\|^2 - 2\cdot\|\xi_1\|\,\|\xi\|\cdot\cos\sphericalangle(\xi_1,\xi) = 1^2 +$$
$$+1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos\sphericalangle(\xi_1,\xi) \leqslant 2-2\cos\varphi = 4\sin^2(\varphi/2) \leqslant$$
$$\leqslant 4(\varphi/2)^2 = \varphi^2,\ \text{ т.е. } \|\omega\|\leqslant\varphi.$$

Отсюда с учетом определения векторов $\omega$ и $\xi_i,$ $i=\overline{1,3},$ неравенства Адамара [7, с. 565], а также геометрического смысла и простейших свойств определителя вытекают соотношения

$$\delta \leqslant |\det[\xi_1,\xi_2,\xi_3]| = |\det[\xi,\xi_2,\xi_3] +$$
$$+\det[\omega,\xi_2,\xi_3]| \leqslant$$
$$\leqslant |\det[\xi,\xi_2,\xi_3]| + |\det[\omega,\xi_2,\xi_3]| \leqslant$$
$$\leqslant |\det[\xi,\xi_2,\xi_3]| + \|\omega\|\|\xi_2\|\|\xi_3\| \leqslant$$
$$\leqslant |\det[\xi,\xi_2,\xi_3]| + \varphi,$$

из которых следует требуемое неравенство. Лемма 10 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о основной теоремы. Перейдем теперь к формулировке и нахождению основного результата данной работы – достаточных условий глобальной управляемости характеристических показателей Ляпунова трехмерных линейных систем, а именно

**Теорема 3.** *Пусть* $n=3,$ $m\in\{1,2,3\}.$ *Если система* (1) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то показатели Ляпунова соответствующей замкнутой системы* (2) *глобально управляемы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3 разобьем на два этапа. На первом этапе докажем следующее утверждение, сформулированное в виде теоремы.

**Теорема 2.** *Если система* (1) $\sigma$*-равномерно вполне управляема и матрица* $A$ *этой системы является нижнетреугольной, то для любых вещественных чисел* $\lambda_{ii}>0,$ $i=\overline{1,3},$ *найдется такая величина* $\delta=\delta(\lambda_{11},\lambda_{22},\lambda_{33})>0,$ *что при всяком* $t_0\geqslant 0$ *на отрезке* $[t_0,t_0+5\sigma]$ *существует измеримое и ограниченное матричное управление* $U=U(t),$ *удовлетворяющее для всех* $t\in[t_0,t_0+5\sigma]$ *оценке* $\|U(t)\|\leqslant\delta$ *и обеспечивающее для матрицы Коши* $X_U(t,s),$ $t,s\geqslant 0,$ *системы* (2) *с этим управлением выполнение равенства* $X_U(t_0+5\sigma,t_0)=\Lambda,$ *в котором матрица* $\Lambda:=\{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^{3}\in\mathrm{M}_3$ *– нижнетреугольная и для всех ее поддиагональных элементов* $\lambda_{ij},$ $j=1,2,$ $j<i\leqslant 3,$ *имеют место неравенства* $|\lambda_{ij}|\leqslant\delta.$

На втором этапе обратимся непосредственно к доказательству само́й основной теоремы 3.

**Первый этап.** Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Пусть $T=5\sigma$. Зафиксируем произвольное $t_0 \geqslant 0$. Поскольку для всех $t \geqslant 0$ матрица $A(t):=\{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^3$ нижнетреугольная, матрица Коши $X(t,\tau)$ системы (1) с нулевым управлением также является нижнетреугольной при всех $t,\tau \geqslant 0$. Тогда диагональные элементы $x_{ii}(t,\tau)$, $i=\overline{1,3}$, матрицы $X(t,\tau)$ являются ее собственными значениями и поэтому в силу [7, с. 359] и замечания 2 работы [5] для любых $i=\overline{1,3}$ и $|t-s|\leqslant T$ справедливы соотношения

$$\exp(-5a)\leqslant |x_{ii}(t,s)|\leqslant \exp(5a). \qquad (4)$$

Возьмем произвольные числа $\lambda_{ii}>0$, $i=\overline{1,3}$, и образуем нижнетреугольную матрицу $H=\{h_{ij}\}_{i,j=1}^3\in \mathrm{M}_3$, диагональные элементы которой положим равными $h_{ii}:=x_{ii}(t_0,t_0+T)\lambda_{ii}$, а поддиагональные элементы $h_{ij}$ (т.е. элементы с индексами $j=1,2$ и $j<i\leqslant 3$) определим позже. Рассмотрим на отрезке $[t_0,t_0+T]$ матричную задачу управления

$$\dot{Y}=A(t)Y+B(t)V, \quad Y\in \mathrm{M}_3, \qquad (5)$$

$$Y(t_0)=E, \quad Y(t_0+T)=X(t_0+T,t_0)H, \qquad (6)$$

и найдем такое измеримое и ограниченное управление $V(t)$, решающее задачу (5), (6), чтобы матрица $Y(t)$ была обратимой при всех $t\in[t_0,t_0+T]$. Известно, что в этом случае управление $U(t)=V(t)Y^{-1}(t)$ будет являться измеримой и ограниченной для любого $t\in[t_0,t_0+T]$ матричной функцией и обеспечивать для матрицы Коши $X_U(t,s)$, $t,s\geqslant 0$, системы (2) с этим управлением равенство $X_U(t_0+T,t_0)=X(t_0+T,t_0)H$. Покажем, что управление $V$, обладающее всеми указанными свойствами, существует.

Обозначим так же, как и в [5], через $\theta$ величину, равную $\theta:=2\arcsin(4\gamma_1 b\exp a)^{-1}$, где числа $a,b\geqslant 1$ суть равномерные по $t\geqslant 0$ оценки на интегралы от норм матричных коэффициентов $A$ и $B$ системы (1) по отрезкам длины $\sigma$, т.е.

$$\int_t^{t+\sigma}\|A(\tau)\|\,d\tau\leqslant a, \qquad \int_t^{t+\sigma}\|B(\tau)\|\,d\tau\leqslant b,$$

$\gamma_1:=\max\{\gamma,\sqrt{3}\}$, $\gamma>0$ – фиксированное число, вытекающее из определения равномерной полной управляемости [4–5] системы (1). Тогда из [5] следует включение $\theta\in(0,\pi/18]$. Возьмем некоторые числа $\varphi\in(0,\theta/16]$ и $p\geqslant 2$, $p\in\mathbb{N}$, выбор которых уточним ниже. Поскольку система (1) $\sigma$-равномерно вполне управляема, то, пользуясь теоремой 1 работы [5], для каждого $k=\overline{0,4}$ на отрезках $I^k:=[t_0+k\sigma,t_0+(k+1)\sigma]$ найдем допустимые векторные управления $u_j^k=u_j^k(t)$, $t\in I^k$, $j=\overline{1,3}$, удовлетворяющие при всех $t\in I^k$ оценке $\|u_j^k(t)\|\leqslant\gamma_1$, отыщем множества $M_j^k\subset\{1,\dots,p\}$ и выпуклые круговые конусы $\Phi_j^k\subset\mathbb{R}^3$, $j=\overline{1,3}$, меры, не превосходящей $4\varphi=:\varphi_1\leqslant\theta/4$, а также построим векторы

$$w_s(t_0+k\sigma,u_j^k):=\int_{t_{s-1}}^{t_s}Q(t_0+k\sigma,\tau)u_j^k(\tau)\,d\tau,$$

$[t_{s-1},t_s]\subset[t_0+k\sigma,t_0+(k+1)\sigma]$, $s\in M_j^k$, и

$$\zeta_j^k:=\sum_{s\in M_j^k}w_s(t_0+k\sigma,u_j^k), \qquad j=\overline{1,3},$$

принадлежащие соответствующим круговым выпуклым конусам $\Phi_j^k$, такие, что выполняются неравенства $\|\zeta_j^k\|\geqslant\ell(\varphi):=\varphi^2/(4\pi^2\gamma_1)$. При этом единичные векторы $\xi_j^k:=\zeta_j^k/\|\zeta_j^k\|$, $k=\overline{0,4}$, $j=\overline{1,3}$, также лежат в конусах $\Phi_j^k$, ввиду выпуклости последних, и для всех $k=\overline{0,4}$ удовлетворяют оценке

$$|\det[\xi_1^k,\xi_2^k,\xi_3^k]|\geqslant\sin(15\theta/16)/2,$$

из которой в силу включения $\theta\in(0,\pi/18]$ и соотношения $\sin\psi\geqslant 2\psi/\pi$, верного для углов $\psi\in[0,\pi/2]$, получим неравенства

$$|\det[\xi_1^k,\xi_2^k,\xi_3^k]|\geqslant\sin(15\theta/16)/2\geqslant$$
$$\geqslant 15\theta/(16\pi)\geqslant\theta/6=:\theta_1, \quad k=\overline{0,4}. \qquad (7)$$

**Замечание 5.** Здесь и всюду далее верхний индекс означает номер отрезка длины $\sigma$, нижний индекс – номер объекта (управления, множества, вектора), найденного на этом отрезке на основании теоремы 1 работы [5].

При всех $k=\overline{0,4}$ и $j=\overline{1,3}$ определим множества $\Phi_j(k):=X(t_0,t_0+k\sigma)\cdot\Phi_j^k\subset\mathbb{R}^3$ и векторы $\nu_j(k):=X(t_0,t_0+k\sigma)\xi_j^k\in\mathbb{R}^3$. Тогда для любого $k\in\{0,\dots,4\}$ и $j\in\{1,2,3\}$, ввиду определения векторов $w_s(t_0+k\sigma,u_j^k)$ и включений $w_s(t_0+k\sigma,u_j^k)\in\Phi_j^k$, $s\in M_j^k$, с учетом равенств $Q(t,s)=X(t,s)B(s)$ и $X(t,\tau)X(\tau,s)=X(t,s)$, $t,\tau,s\geqslant 0$, верных для матрицы Коши системы (1) с нулевым управлением, справедливы соотношения

$$\Phi_j(k)=X(t_0,t_0+k\sigma)\Phi_j^k \ni$$
$$\ni X(t_0,t_0+k\sigma)w_s(t_0+k\sigma,u_j^k)=$$
$$=X(t_0,t_0+k\sigma)\int_{t_{s-1}}^{t_s}Q(t_0+k\sigma,\tau)u_j^k(\tau)\,d\tau=$$
$$=\int_{t_{s-1}}^{t_s}X(t_0,t_0+k\sigma)X(t_0+k\sigma,\tau)\ B(\tau)u_j^k(\tau)d\tau=$$
$$=\int_{t_{s-1}}^{t_s}Q(t_0,\tau)u_j^k(\tau)\,d\tau\ =w_s(t_0,u_j^k)$$

(здесь $t_{s-1},t_s\in I^k$), т.е. для любых $k=\overline{0,4}$, $j=\overline{1,3}$ и $s\in M_j^k$ справедлива формула

$$w_s(t_0,u_j^k)=X(t_0,t_0+k\sigma)w_s(t_0+k\sigma,u_j^k)\in\Phi_j(k). \qquad (8)$$

Поэтому при всех $k=\overline{0,4}$ и $j=\overline{1,3}$ для векторов $\nu_j(k)$ ввиду определения $\xi_j^k$, $\zeta_j^k$ и $\nu_j(k)$ справедливы равенства

$$\nu_j(k)=X(t_0,t_0+k\sigma)\xi_j^k=$$
$$=X(t_0,t_0+k\sigma)\zeta_j^k/\|\zeta_j^k\|=\ X(t_0,t_0+k\sigma)$$
$$\cdot\sum_{s\in M_j^k}w_s(t_0+k\sigma,u_j^k)/\|\zeta_j^k\|=$$
$$=\sum_{s\in M_j^k}w_s(t_0,u_j^k)/\|\zeta_j^k\|,$$
$$\text{т.е. }\nu_j(k)=\sum_{s\in M_j^k}w_s(t_0,u_j^k)/\|\zeta_j^k\|.$$

Кроме того, поскольку выполняются включения $\xi_j^k\in\Phi_j^k$, $k=\overline{0,4}$, $j=\overline{1,3}$, при каждом $k=\overline{0,4}$ и $j=\overline{1,3}$ имеют место соотношения $\nu_j(k)=X(t_0,t_0+k\sigma)\xi_j^k\in X(t_0,t_0+k\sigma)\Phi_j^k=\Phi_j(k)$ и, следовательно, $\nu_j(k)\in\Phi_j(k)$.

Пусть величина $\varphi_1$ удовлетворяет неравенству $\varphi_1\cdot\exp(16a)\leqslant 1$. Тогда, согласно лемме 2 работы [5], для всех $k=\overline{0,4}$ и $j=\overline{1,3}$ множества $\Phi_j(k)$, являются выпуклыми конусами, угловая мера которых, ввиду оценок $\sphericalangle\Phi_j^k\leqslant\varphi_1=4\varphi$, не превосходит величины $\arcsin(\varphi_1\cdot\exp(4ak))\leqslant\arcsin(4\varphi\exp(16a))=:\varphi_2$. Кроме того, в силу определения векторов $\xi_j^k$ и $\nu_j(k)$, $k=\overline{0,4}$, $j=\overline{1,3}$, неравенств (7), на основании леммы 3′ статьи [5] для векторов $\nu_j(k)$ получим оценки

$$\exp(-ak)\leqslant\|\nu_j(k)\|\leqslant\exp(ak), \qquad (9)$$
$$k=\overline{0,4},\quad j=\overline{1,3},$$
$$|\det[\nu_1(k),\nu_2(k),\nu_3(k)]|\geqslant\exp(-3ak)\theta_1, \quad (10)$$
$$k=\overline{0,4}.$$

Для всех $k=\overline{0,4}$ и $j=\overline{1,3}$ обозначим нормированные векторы

$$\nu_j^{\text{н}}(k):=\nu_j(k)/\|\nu_j(k)\|,$$

тогда для этих векторов из последних двух оценок, равенств

$$\nu_j(k)=\sum_{s\in M_j^k}w_s(t_0,u_j^k)/\|\zeta_j^k\|,$$

элементарных свойств определителя матрицы и нормы вектора [7, с. 313] вытекают верные при всяком $k=\overline{0,4}$ неравенства

$$|\det[\nu_1^{\text{н}}(k),\,\nu_2^{\text{н}}(k),\,\nu_3^{\text{н}}(k)]|\geqslant$$
$$\geqslant\theta_1\exp(-3ak)/\exp(3ak)=\theta_1\exp(-6ak), \quad (11)$$
$$\nu_j^{\text{н}}(k)=\nu_j(k)/\|\nu_j(k)\|=$$
$$=\left(\sum_{s\in M_j^k}w_s(t_0,u_j^k)/\|\zeta_j^k\|\right):$$
$$:\left\|\sum_{s\in M_j^k}w_s(t_0,u_j^k)/\|\zeta_j^k\|\right\|=$$
$$=\sum_{s\in M_j^k}w_s(t_0,u_j^k)/\left\|\sum_{s\in M_j^k}w_s(t_0,u_j^k)\right\|, \quad (12)$$
$$j=\overline{1,3}.$$

Помимо этого, из леммы 3′ следует также, что для каждого $k=\overline{0,4}$ среди векторов $\nu_j(k)$, $j=\overline{1,3}$, найдется такой вектор $\nu_q(k)$, $q\in\{1,2,3\}$, при котором выполняются неравенства

$$|\det[\nu_q(k),e_2,e_3]|\geqslant\theta_1\exp(-3ak)/6. \qquad (13)$$

**Замечание 6.** Не ограничивая общности рассуждений будем считать, что при любом $k=\overline{0,4}$ неравенства (13) выполняются для векторов $\nu_1(k)$ (в противном случае этого можно добиться перенумерацией найденных векторов $\nu_j(k)$, $j=\overline{1,3}$, и связанных с ними объектов (множеств, управлений, выпуклых конусов)).

**Нахождение векторных управлений и направлений движения системы**[1]**.** Возьмем вектор $\nu_1(0)$, тогда ввиду определения векторов $\nu_j(k)$ и замечания 6 для него справедливы равенства $\nu_1(0) = X(t_0,t_0)\xi_1^0 = \xi_1^0$ и оценка $|\det[\nu_1(0), e_2, e_3]| \geqslant \theta_1/6$. Поэтому, положив

$$\kappa_1' := \operatorname{sign}(\det[\nu_1(0), e_2, e_3]),$$
$$\nu_1' := \kappa_1' \cdot \nu_1(0) = \kappa_1' \cdot \xi_1^0,$$
$$\Psi_1' := \kappa_1' \cdot \Phi_1(0) = \kappa_1' \cdot X(t_0,t_0)\Phi_1^0 = \kappa_1' \cdot \Phi_1^0,$$

в силу включения $\xi_1^0 \in \Phi_1^0$ и неравенства $\sphericalangle\Phi_1^0 \leqslant \varphi_1$, вытекающих из определений векторов $\xi_j^k$ и конусов $\Phi_j^k$, имеем соотношения

$$|\det[\nu_1', e_2, e_3]| = \det[\nu_1', e_2, e_3] \geqslant \theta_1/6,$$
$$\nu_1' \in \Psi_1', \quad \sphericalangle\Psi_1' \leqslant \varphi_1. \qquad (14)$$

Обозначим через $\mathfrak{v}_1(t)$, $t \in I^0 = [t_0, t_0 + \sigma]$, то управление, а через $\mathfrak{M}_1'$ – то множество индексов, которые определяют вектор $\xi_1^0$, а значит, и вектор $\nu_1'$. Тогда из определения вектора $\nu_1'$ получим равенства $\mathfrak{v}_1(t) \equiv u_1^0(t)$, $t \in I^0$, и $\mathfrak{M}_1' = M_1^0$.

**Замечание 7.** Множества индексов, определяющих векторы $\nu_1'$, $\nu_1(0)$, $\xi_1^0$ и $\zeta_1^0$, совпадают ввиду того, что первые три из этих векторов образованы из $\zeta_1^0$ в результате операции умножения их на ненулевое число, не изменяющей совокупности тех векторов $w_s(t_0,u_1^0)$, сумма которых образует вектор $\zeta_1^0$, а следовательно, не изменяющей и множества индексов $M_1^0$. В дальнейшем для других, найденных нами аналогичным образом, векторов сходные с данным замечанием утверждения мы не будем дополнительно оговаривать.

Теперь, в отличие от доказательства теоремы 2 работы [8], разобьем множество $\mathfrak{M}_1' = M_1^0$ на три непересекающиеся части $\mathfrak{M}_i$, $i = \overline{1,3}$, так, чтобы выполнялись неравенства

$$\max_{s\in\mathfrak{M}_1} s < \min_{s\in\mathfrak{M}_2} s < \min_{s\in\mathfrak{M}_3} s,$$
$$\left\|\sum\nolimits_{j\in\mathfrak{M}_i} w_j(t_0,\mathfrak{v}_1)\right\| : \left\|\sum\nolimits_{j\in\mathfrak{M}'_1} w_j(t_0,\mathfrak{v}_1)\right\| \geqslant$$
$$\geqslant 1/4, \quad i = \overline{1,3}. \qquad (15)$$

Докажем, что такое разбиение возможно. Пусть $\mathfrak{q} \in \{1,\ldots,p\}$ – мощность множества $\mathfrak{M}_1'$. Обозначим тогда через $\mathfrak{m}_j$, $j = \overline{1,\mathfrak{q}}$, элементы множества $\mathfrak{M}_1'$, упорядоченные по возрастанию, а через $\mathfrak{N}_j$ – множество $\{i \in \mathfrak{M}_1' : i \leqslant \mathfrak{m}_j\}$. Для любого $J \subset \{1,\ldots,p\}$ положим $S(J) := \sum_{s\in J} w_s(t_0,\mathfrak{v}_1) / \|\sum_{j\in\mathfrak{M}'_1} w_j(t_0,\mathfrak{v}_1)\|$.

Поскольку $\|S(\mathfrak{N}_\mathfrak{q})\| = \|S(\mathfrak{M}_1')\| = 1 > 1/4$, то множество индексов $\tilde J := \{j : \|S(\mathfrak{N}_j)\| > 1/4\}$ непусто, и, следовательно, существует $\tilde j := \min \tilde J$. Пусть $\mathfrak{M}_1 := \mathfrak{N}_{\tilde j}$, $\mathfrak{M}_2' := \mathfrak{M}_1' \setminus \mathfrak{M}_1$. Из леммы 1 работы [5] вытекает, что найдется натуральное $p \geqslant 2$, при котором выполняются неравенства $\|w_j(t_0,\mathfrak{v}_1)\| \leqslant \ell(\varphi)/8 \leqslant \|\sum_{s\in\mathfrak{M}'_1} w_s(t_0,\mathfrak{v}_1)\|/8$ для всех $j = \overline{1,p}$. Тогда по определению $\tilde j$ имеют место соотношения $1/4 < \|S(\mathfrak{M}_1)\| \leqslant \|S(\mathfrak{N}_{\tilde j -1})\| + {}$ $+ \|w_{\mathfrak{m}_{\tilde j}}(t_0,\mathfrak{v}_1)\| / \|\sum_{j\in\mathfrak{M}_1'} w_j(t_0,\mathfrak{v}_1)\| \leqslant 1/4 + 1/8 = 3/8.$ Отсюда следует оценка $\|S(\mathfrak{M}_2')\| \geqslant \|S(\mathfrak{M}_1')\| - \|S(\mathfrak{M}_1)\| \geqslant 1 - 3/8 = 5/8.$ Разбивая теперь множество $\mathfrak{M}_2'$ на множества $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_3$ таким же образом, как разбивалось множество $\mathfrak{M}_1'$ на $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2'$ с учетом неравенств $\|S(\mathfrak{M}_2')\| > 5/8 > 1/4$, получим множества $\mathfrak{M}_i$, $i = 2, 3$, для которых так же, как и для $\mathfrak{M}_1$, выполняется второе неравенство в (15). Первое неравенство в (15) следует из определения величины $\tilde j$ и множеств $\mathfrak{M}_i$, $i = \overline{1,3}$.

**Замечание 8.** В дальнейшем, при необходимости разбиения множества индексов $M_j^k$, $j \in \{1,2,3\}$, $k \in \{1,\ldots,5\}$, на несколько непересекающихся частей, которые удовлетворяют неравенствам, схожим с формулами (15), мы не будем заострять внимание на возможности такого разбиения, поскольку доказательство его возможности будет проводиться аналогично представленному выше.

При каждом $i = \overline{1,3}$ определим управления $\mathfrak{u}_i(t)$, полагая $\mathfrak{u}_i(t) := \mathfrak{v}_1(t)$ для всех $t \in I^0$. Пусть $\Psi_i := \Psi_1'$, $\kappa_i := \kappa_1'$ и

[1] Здесь и всюду далее до конца первого этапа полужирным шрифтом выделены основные этапы доказательства теоремы 2.

$v_i := \kappa_i \cdot \sum_{j\in\mathfrak{M}_i} w_j(t_0, \mathfrak{u}_i) / \|\sum_{j\in\mathfrak{M}_i} w_j(t_0, \mathfrak{u}_i)\|$, $i=\overline{1,3}$. Тогда справедливы соотношения $\|v_i\|=1$, $i=\overline{1,3}$. Поскольку для всех $j\in\mathfrak{M}_1'$ имеют место включения $w_j(t_0,u_1^0)\in\Phi_1^0$, то ввиду определений конуса $\Psi_1'$ и управления $\mathfrak{v}_1$ выполняются соотношения $\kappa_1'\cdot w_j(t_0,\mathfrak{v}_1)=\kappa_1'\cdot w_j(t_0,u_1^0)\ \in\kappa_1'\cdot\Phi_1^0=\Psi_1'$, $j\in\mathfrak{M}_1'$. Отсюда, используя свойство выпуклости конуса $\Phi_1^0$, а следовательно, и конусов $\Psi_i$, $i=\overline{1,3}$, определение векторов $v_i$, $i=\overline{1,3}$, и включения $\mathfrak{M}_i\subset\mathfrak{M}_1'$, $i=\overline{1,3}$, получим соотношения $v_i\in\Psi_1'=\Psi_i$, $i=\overline{1,3}$, из которых ввиду (14) следуют оценки

$$\sphericalangle(v_i,v_j)\leqslant\varphi_1,\quad \sphericalangle(v_1',v_i)\leqslant\varphi_1,$$
$$i,j\in\{1,2,3\},\quad i\neq j. \qquad (16)$$

**Замечание 9.** Разбиение вектора $v_1'$ на векторы $v_i$, $i=\overline{1,3}$, производится для того, чтобы иметь для угловых мер $\sphericalangle(v_1,v_2)$, $\sphericalangle(v_2,v_3)$ и $\sphericalangle(v_1,v_3)$ неравенство (16). Если бы векторы $v_i$, $i=\overline{1,3}$, в отличие от предложенного здесь способа, строились на разных отрезках длины $\sigma$, то для угловой меры между этими векторами мы могли бы получить только оценку снизу, а получение оценки сверху, подобной формуле (16), было бы невозможным.

Положим $\varphi_1\leqslant\theta_1/12$. Тогда в силу формул (14) и (16), равенств $\|v_1'\|=\|v_i\|=\|e_2\|=\|e_3\|=1$ для векторов $v_1', e_2, e_3$ и $v_i$, $i=\overline{1,3}$, справедлива лемма 10, согласно которой, учитывая последнее неравенство, имеем соотношения

$$|\det[v_i,e_2,e_3]|\geqslant\theta_1/6-\varphi_1\geqslant$$
$$\geqslant\theta_1/6-\theta_1/12=\theta_1/12=:\theta_0,\quad i=\overline{1,3}. \qquad (17)$$

При этом для величины $\theta_0$ в силу определений $\theta_1$ и $\theta$ выполняется двусторонняя оценка $0<\theta_0<1$.

Рассмотрим векторы $v_j^{\text{н}}(1)\in\Phi_j(1)$, $j=\overline{1,3}$. Тогда ввиду неравенств (17) и (11) для $k=1$, равенств $\|v_3\|=\|e_2\|=\|e_3\|=1$, на основании леммы 9 среди единичных векторов $v_j^{\text{н}}(1)$, $j=\overline{1,3}$, найдется такой (пользуясь соглашением, аналогичным замечанию 6, будем считать, что этот вектор $v_1^{\text{н}}(1)$ ), при котором верны оценки

$$|\det[v_3, v_1^{\text{н}}(1), e_3]|\geqslant(\theta_1/12)\cdot(\theta_1\exp(-6a))/3=$$
$$=(\theta_1/(6\exp(3a)))^2=:\theta_2.$$

В силу определения $a$, $\theta$ и $\theta_1$ очевидно, что имеет место неравенство $0<\theta_2<1$. Определим $\kappa_4'\in\{-1,1\}$ таким образом, чтобы выполнялось соотношение $\det[v_3,\kappa_4'\cdot v_1^{\text{н}}(1),e_3]>0$. Положим $v_4':=\kappa_4'\cdot v_1^{\text{н}}(1)$, тогда справедлива оценка

$$|\det[v_3,v_4',e_3]|=\det[v_3,v_4',e_3]\geqslant\theta_2. \qquad (18)$$

Обозначим через $\mathfrak{v}_4=\mathfrak{v}_4(t)$, $t\in I^1$, и $\mathfrak{M}_4'$ соответственно управление и множество, задающие вектор $v_1^{\text{н}}(1)$. Тогда в силу определения векторов $v_1^{\text{н}}(1)$ и $v_1(1)$ очевидно, что $\mathfrak{v}_4(t)\equiv u_1^1(t)$, $t\in I^1$, и $\mathfrak{M}_4'=M_1^1$. Пусть $\Psi_4':=\kappa_4'\cdot\Phi_1(1)$. Ввиду включений $v_j(k)\in\Phi_j(k)$, выпуклости конусов $\Phi_j(k)$, а также оценки на угловую меру этих конусов выполняются соотношения $v_4'\in\Psi_4'$ и $\sphericalangle\Psi_4'\leqslant\varphi_2$. Разобьем множество $\mathfrak{M}_4'$ на две непересекающиеся части $\mathfrak{M}_4$ и $\mathfrak{M}_5$, таким же образом, как ранее разбивалось множество $\mathfrak{M}_1'$ на две части $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2'$. Тогда с учетом равенств (12) будут справедливы соотношения, аналогичные формулам (15):

$$\max_{s\in\mathfrak{M}_4} s<\min_{s\in\mathfrak{M}_5} s,$$
$$\left\|\sum_{j\in\mathfrak{M}_i} w_j(t_0,\mathfrak{v}_4)\right\|:\left\|\sum_{j\in\mathfrak{M}_4'} w_j(t_0,\mathfrak{v}_4)\right\|\geqslant$$
$$\geqslant 1/4,\quad i=4,5. \qquad (19)$$

Определим управления $\mathfrak{u}_4(t)$ и $\mathfrak{u}_5(t)$, полагая их равными $\mathfrak{v}_4(t)$ для всех $t\in I^1=[t_0+\sigma,t_0+2\sigma]$. Пусть

$$\Psi_4=\Psi_5:=\Psi_4',\ \ \kappa_4=\kappa_5:=\kappa_4',$$
$$v_i:=\kappa_i\cdot\sum_{s\in\mathfrak{M}_i} w_s(t_0,\mathfrak{u}_i)/\|\sum_{s\in\mathfrak{M}_i} w_s(t_0,\mathfrak{u}_i)\|,$$
$$i=4,5.$$

Тогда справедливы соотношения $\|v_i\|=1$, $i=4,5$. Поскольку для всех $s\in\mathfrak{M}_4'=M_1^1$ имеют место включения $w_s(t_0,\mathfrak{v}_4)=w_s(t_0,u_1^1)\in\Phi_1(1)$, то $\kappa_4'\cdot w_s(t_0,\mathfrak{v}_4)\in\kappa_4'\cdot\Phi_1(1)=\Psi_4'$, $s\in\mathfrak{M}_4'$. Поэтому, используя выпуклость конуса $\Psi_4'$, а следовательно, и $\Psi_i$, $i=4,5$, определение векторов $v_i$, $i=4,5$, и включений $\mathfrak{M}_i\subset\mathfrak{M}_4'$, $i=4,5$, получим соотношения $v_i\in\Psi_4'=\Psi_i$, $i=4,5$, из которых ввиду неравенства $\sphericalangle\Psi_4'\leqslant\varphi_2$ следуют оценки

$$\sphericalangle(v_4, v_5) \leqslant \varphi_2, \quad \sphericalangle(v_4', v_i) \leqslant \varphi_2, \quad i = 4, 5. \quad (20)$$

Тогда, положив $\varphi_2 \leqslant \theta_2/4 = (\theta_1/(12\exp(3a)))^2$, ввиду формул (18) и (20), определения векторов $v_5, v_4', v_3, e_3$ установим, что эти векторы удовлетворяют условиям леммы 10, согласно которой справедливы оценки

$$|\det[v_3, v_5, e_3]| \geqslant \theta_2 - \varphi_2 \geqslant \theta_2 - \theta_2/4 = 3\theta_2/4. \quad (21)$$

Аналогичным образом доказывается оценка $|\det[v_3, v_4, e_3]| \geqslant 3\theta_2/4,$ из которой, полагая $\varphi_1 \leqslant \theta_2/4 = (\theta_1/(12\exp(3a)))^2$, ввиду формулы (16) и равенств $\|v_1\| = \|v_3\| = \|v_4\| = \|e_3\| = 1,$ следуя лемме 10, получим неравенства

$$|\det[v_1, v_4, e_3]| \geqslant 3\theta_2/4 - \varphi_1 \geqslant$$
$$\geqslant 3\theta_2/4 - \theta_2/4 = \theta_2/2. \quad (22)$$

Из неравенств (21), оценки (11) для векторов $v_j^{\text{н}}(2),$ $j = \overline{1,3},$ а также равенств $\|v_3\| = \|v_5\| = \|v_j^{\text{н}}(2)\| = \|e_3\| = 1$ вытекает, что указанные векторы удовлетворяют условиям леммы 9, по которой найдется такой вектор (пользуясь соглашением, аналогичным замечанию 6, будем считать, что этот вектор $v_1^{\text{н}}(2)$ ), для которого с учетом определения $\theta_2$ справедливы соотношения $|\det[v_3, v_5, v_1^{\text{н}}(2)]| \geqslant$ $\geqslant (\theta_1\exp(-12a)\cdot\theta_2/2)/3 = \left(\theta_1/(6\exp(6a))\right)^3 =: \theta_3.$ Возьмем такое $\kappa_6 \in \{-1,1\},$ что выполняется неравенство $\det[v_3, v_5, \kappa_6 \cdot v_1^{\text{н}}(2)] \geqslant \theta_3,$ и положим $v_6 := \kappa_6 \cdot v_1^{\text{н}}(2).$ Обозначим через $u_6 = u_6(t),$ $t \in I^2 := [t_0 + 2\sigma, t_0 + 3\sigma],$ и $\mathfrak{M}_6$ соответственно управление и множество, задающие вектор $v_1^{\text{н}}(2).$ Тогда в силу определения векторов $v_1^{\text{н}}(2)$ и $v_1(2)$ очевидно, что $u_6(t) \equiv u_1^2(t),$ $t \in I^2,$ и $\mathfrak{M}_6 = M_1^2.$ Пусть $\Psi_6 := \kappa_6 \cdot \Phi_1(2).$ Ввиду включений $v_j(k) \in \Phi_j(k),$ выпуклости конусов $\Phi_j(k),$ а также оценки на угловую меру $\Phi_j(k)$ верны соотношения $v_6 \in \Psi_6$ и $\sphericalangle\Psi_6 \leqslant \varphi_2.$

**Замечание 10.** Для найденных таким образом векторов $v_3, v_5, v_6 \in \mathbb{R}^3$ справедлива оценка $\det[v_3, v_5, v_6] \geqslant \theta_3 > 0,$ означающая, что эти векторы образуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ базис, причем в силу равенств $\|v_3\| = \|v_5\| = \|v_6\| = 1$ этот базис является нормированным.

Обозначим через $F_1$ матрицу $F_1 := [v_3, v_5, v_6],$ тогда верны соотношения

$$\det F_1 = \det[v_3, v_5, v_6] \geqslant \theta_3, \quad (23)$$

из которых вытекает, что найдутся такие числа $\alpha_3, \alpha_5, \alpha_6 \in \mathbb{R},$ при которых выполняется равенство $\alpha_3 v_3 + \alpha_5 v_5 + \alpha_6 v_6 = h_3 - e_3,$ где $h_3 := (0, 0, h_{33})^T \in \mathbb{R}^3$ (разложение вектора $(h_3 - e_3) \in \mathbb{R}^3$ по базису, состоящему из векторов $v_3, v_5, v_6$). Коэффициенты $\alpha_i,$ $i \in \{3, 5, 6\},$ при этом легко вычисляются по формулам Крамера

$$\alpha_3 = \det[h_3 - e_3, v_5, v_6]/\det F_1,$$
$$\alpha_5 = \det[v_3, h_3 - e_3, v_6]/\det F_1,$$
$$\alpha_6 = \det[v_3, v_5, h_3 - e_3]/\det F_1.$$

Положим $\chi_1 := \exp(-5a)\cdot\min\{\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}\},$ $\chi_2 := \exp(5a)\cdot\max\{\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}\},$ тогда из равенств $h_{ii} := x_{ii}(t_0, t_0 + T)\lambda_{ii},$ $i = \overline{1,3},$ и соотношений (4) следуют оценки

$$\chi_1 \leqslant |h_{ii}| \leqslant \chi_2, \quad i = \overline{1,3}. \quad (24)$$

Отсюда, из неравенств (23) и Адамара [7, с. 565], а также определений величин $\alpha_3, \theta_3, \theta_1$ и векторов $v_5, v_6, e_3$ вытекают соотношения

$$|\alpha_3| = |\det[h_3 - e_3, v_5, v_6]|\cdot|\det F_1|^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant \|h_3 - e_3\|\,\|v_5\|\,\|v_6\|/\theta_3 \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \chi_2)\cdot(6\exp(6a)/\theta_1)^3 =$$
$$= (1 + \chi_2)\cdot(36\exp(6a)/\theta)^3 =: \beta_1.$$

Аналогичным образом доказываются оценки и на остальные коэффициенты $|\alpha_5|, |\alpha_6| \leqslant \beta_1.$ Причем ввиду определения $\theta, a, \chi_2$ очевидно, что $\beta_1 \geqslant 1.$

Рассмотрим векторы $v_j^{\text{н}}(3),$ $j = \overline{1,3}.$ Тогда в силу определения этих векторов, равенств $\|v_2\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1,$ а также оценок (17) для $i = 2$ и (11) для $k = 3$, на основании леммы 9 среди единичных векторов $v_j^{\text{н}}(3),$ $j = \overline{1,3},$ найдется такой (пользуясь соглашением, аналогичным замечанию 6, будем считать, что этот вектор $v_1^{\text{н}}(3)$ ), для которого справедливы оценки

$$|\det[v_2, v_1^{\text{н}}(3), e_3]| \geqslant (\theta_1/12)\cdot(\theta_1\exp(-18a))/3 =$$
$$= \left(\theta_1/(6\exp(9a))\right)^2 =: \theta_4.$$

При этом, используя определения $\theta_1$ и $\theta$, легко показать, что $0 < \theta_4 < 1.$ Пусть $\kappa_7 = \operatorname{sign}(\det[v_2, v_1^{\text{н}}(3), e_3]).$ Положим $v_7 := \kappa_7 \cdot v_1^{\text{н}}(3),$ тогда, обозначая через $F_2$ матрицу $[v_7, v_8, e_3],$ получим неравенство

$$\det F_2 = \det[v_2, v_7, e_3] \geqslant \theta_4. \quad (25)$$

**Замечание 11.** Геометрически выполнение оценки (25) и равенств $\|v_2\| = \|v_7\| = 1$ для векторов $v_2, v_7 \in \mathbb{R}^3$ означает то, что эти векторы образуют в подпространстве $L(v_2, v_7) \subset \mathbb{R}^3$ нормированный базис, причем имеет место представление $\mathbb{R}^3 = L(v_2, v_7) \oplus L(e_3)$, где символ $\oplus$ означает знак прямой суммы подпространств [9, с. 400].

Обозначим через $\mathfrak{u}_7 = \mathfrak{u}_7(t)$, $t \in I^3 := [t_0 + 3\sigma, t_0 + 4\sigma]$, и $\mathfrak{M}_7$ соответственно управление и множество, задающие вектор $v_1^{\text{н}}(3)$, а следовательно, и вектор $v_7$. Тогда, как легко видеть, в силу определения векторов $v_1^{\text{н}}(3)$ и $v_1(3)$ выполняются равенства $\mathfrak{u}_7(t) \equiv u_1^3(t)$, $t \in I^3$, и $\mathfrak{M}_7 = M_1^3$. Положим $\Psi_7 := \kappa_7 \cdot \Phi_1(3)$. Из верных для всех $k = \overline{0, 4}$ и $j = \overline{1, 3}$ включений $v_j(k) \in \Phi_j(k)$, выпуклости конусов $\Phi_j(k)$, а также оценок $\sphericalangle \Phi_j(k) \leqslant \varphi_2$ вытекают соотношения $v_7 \in \Psi_7$ и $\sphericalangle \Psi_7 \leqslant \varphi_2$.

Так как справедливо неравенство (25), то при любом фиксированном $\alpha_4 \in \mathbb{R}$ найдутся такие $\alpha_2, \alpha_7 \in \mathbb{R}$, при которых выполняются равенства $e_i^T \cdot (\alpha_2 v_2 + \alpha_7 v_7) = e_i^T \cdot (h_2 - e_2 - \alpha_4 v_4)$, $\quad i = 1, 2$, где вектор $h_2 := (0, h_{22}, h_{32})^T \in \mathbb{R}^3$ (в этом векторе компонента $h_{22}$ равна, как и ранее, $h_{22} = x_{22}(t_0, t_0 + T)\lambda_{22}$, компонента $h_{23}$ пока не определена). Коэффициенты $\alpha_i$, $i = 2, 7$, легко вычисляются по формулам Крамера

$$\alpha_2 = \det[h_2 - e_2 - \alpha_4 v_4, v_7, e_3] / \det F_2,$$
$$\alpha_7 = \det[v_2, h_2 - e_2 - \alpha_4 v_4, e_3] / \det F_2.$$

Очевидно, что эти коэффициенты зависят от неопределенной пока величины $\alpha_4$. Положим $|\alpha_4| := 2\beta_1/\theta_2$ (выбор знака для этого коэффициента укажем в дальнейшем). Тогда, раскрывая вышеуказанные определители, с учетом определений величины $\theta_4$, векторов $e_2$ и $h_2$, оценок (24), (25), равенств $\|v_2\| = \|v_7\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$, неравенства Адамара [7, с. 565], а также поскольку модуль компоненты вектора не превосходит его нормы, получим соотношения

$$|\alpha_2| = |\det[h_2 - e_2 - \alpha_4 v_4, v_7, e_3]| \cdot |\det F_2|^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant \big( |\det[h_2, v_7, e_3]| + |\det[e_2, v_7, e_3]| +$$
$$+ |\det[\alpha_4 v_4, v_7, e_3]| \big) \cdot |\det F_2|^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant ( |\det[h_2, v_7, e_3]| + \|e_2\| \, \|v_7\| \, \|e_3\| +$$
$$+ \|\alpha_4 v_4\| \, \|v_7\| \, \|e_3\| ) \cdot \theta_4^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant ( |-h_{22} v_{71}| + 1 + |\alpha_4| ) \cdot \theta_4^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant ( |h_{22}| \, \|v_7\| + 1 + 2\beta_1/\theta_2 ) \cdot \theta_4^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant ( \chi_2 + 1 + 2\beta_1/\theta_2 ) \cdot \theta_4^{-1} =: \beta_2$$

(здесь и всюду далее для произвольного вектора $d_i \in \mathbb{R}^3$, $i \in \mathbb{N}$, через $d_{is}$, $s = \overline{1,3}$, обозначаются компоненты этого вектора, т.е. $d_i = (d_{i1}, d_{i2}, d_{i3})^T$ ). Аналогичным образом устанавливается оценка сверху и на коэффициент $\alpha_7$: $|\alpha_7| \leqslant \beta_2$. Отсюда с учетом неравенства $|\alpha_4| \leqslant \beta_2$, вытекающего из определения $\beta_2$, равенства $|\alpha_4| := 2\beta_1/\theta_2$ и соотношения $0 < \theta_4 < 1$, для элемента $h_{32} := e_3^T \cdot (\alpha_2 v_2 + \alpha_4 v_4 + \alpha_7 v_7)$ получим оценку

$$|h_{32}| \leqslant \|e_3\| \cdot \|\alpha_2 v_2 + \alpha_4 v_4 + \alpha_7 v_7\| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha_4| \, \|v_4\| + |\alpha_2| \, \|v_2\| + |\alpha_7| \, \|v_7\| \leqslant 3\beta_2.$$

Здесь же стоит заметить, что, ввиду определения $\beta_2$ и $\chi_2$, а также неравенств $\beta_1 > 1$, $0 < \theta_2 < 1$ и $0 < \theta_4 < 1$ для величины $\beta_2$ выполняются оценки $\beta_2 > \beta_1 > 1$.

В силу формул (9) и (13) при $k = 4$, с учетом замечания 6 для вектора $v_1^{\text{н}}(4) \in \Phi_1(4)$ выполняются соотношения

$$|\det[v_1^{\text{н}}(4), e_2, e_3]| =$$
$$= |\det[v_1(4) / \|v_1(4)\|, e_2, e_3]| \geqslant$$
$$\geqslant \theta_1 \cdot \exp(-12a) \cdot (6\|v_1(4)\|)^{-1} \geqslant$$
$$\geqslant \theta_1 \exp(-12a) / \quad (6\exp(4a)) =$$
$$= \theta_1 \exp(-16a) / 6 =: \theta_5.$$

Пользуясь определениями $\theta$ и $\theta_1$, легко показать, что имеют место неравенства $0 < \theta_5 < 1$. Обозначим управление и множество, определяющие вектор $v_1(4)$ (а следовательно, и вектор $v_1^{\text{н}}(4)$ ) соответственно $\mathfrak{u}_8 = \mathfrak{u}_8(t)$, $t \in I^4 := [t_0 + 4\sigma, t_0 + 5\sigma] \ = [t_0 + 4\sigma, t_0 + T]$, и $\mathfrak{M}_8$. Ввиду замечания 7 очевидно, что $\mathfrak{u}_8(t) \equiv u_1^4(t)$, $t \in I^4$, и $\mathfrak{M}_8 = M_1^4$. Положим $\kappa_8 := \operatorname{sign}(\det[v_1^{\text{н}}(4), e_2, e_3])$, $\quad v_8 := \kappa_8 \cdot v_1^{\text{н}}(4)$, $\Psi_8 := \kappa_8 \cdot \Phi_1(4)$, тогда имеют место неравенство $\det F_3 := \det[v_8, e_2, e_3] \geqslant \theta_5$ и ввиду определения и выпуклости конусов $\Phi_j(k)$, $k = \overline{0, 4}$, $j = \overline{1, 3}$, соотношения $v_8 \in \Psi_8$, $\sphericalangle \Psi_8 \leqslant \varphi_2$.

Положив $\qquad \alpha_8 := e_1^T (h_1 - e_1 - \alpha_1 v_1) / \det F_3$, получим равенство $\alpha_1 v_{11} + \alpha_8 v_{81} = h_{11} - 1$ и, с учетом формулы (24) и соотношений $\|e_1\| = \|v_1\| = 1$, оценку

$$|\alpha_8| = |e_1^T (h_1 - e_1 - \alpha_1 v_1)| / |\det F_3| \leqslant$$
$$\leqslant (|h_{11}| + 1 + |\alpha_1| \|e_1^T v_1\|) / \theta_5 \leqslant (\chi_2 + 1 + |\alpha_1|) / \theta_5,$$

зависящую от $\alpha_1$. Определим элементы $h_{21}$ и $h_{31}$ равенствами $h_{i1} := \alpha_1 v_{1i} + \alpha_8 v_{8i}$, $i = 2, 3$. Тогда ввиду последнего неравенства для этих элементов также имеют место зависящие от $\alpha_1$ оценки

$$|h_{i1}| \leqslant |\alpha_1| |v_{1i}| + |\alpha_8| |v_{8i}| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha_1| \|v_1\| + |\alpha_8| \|v_8\| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_8| =$$
$$= |\alpha_1| + (\chi_2 + 1 + |\alpha_1|)/\theta_5 =: \beta_3(\alpha_1) = \beta_3, \ i = 2, 3.$$

Таким образом, для выбранных элементов $h_{ij} \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,3}$, $1 \leqslant i \leqslant j$, и коэффициентов $\alpha_k \in \mathbb{R}$, а также найденных векторов $v_k \in \mathbb{R}^3$, $k = \overline{1,8}$, справедливы равенства

$$e_1 + \alpha_1 v_1 + \alpha_8 v_8 = (h_{11}, h_{21}, h_{31})^T = He_1,$$
$$e_2 + \alpha_2 v_2 + \alpha_4 v_4 + \alpha_7 v_7 = (0, h_{22}, h_{32})^T = He_2, \quad (26)$$
$$e_3 + \alpha_3 v_3 + \alpha_5 v_5 + \alpha_6 v_6 = (0, 0, h_{33})^T = He_3.$$

Определим элементы $\lambda_{ij} := e_i^T X(t_0 + T, t_0) He_j$, $i, j = \overline{1, 3}$. Тогда ввиду того, что матрицы $X(t_0 + T, t_0)$ и $H$ – нижнетреугольные, матрица $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^3$ также нижнетреугольная, причем, очевидно, элементы $h_{ii}$ удовлетворяют определенным ранее соотношениям $h_{ii} = x_{ii}(t_0, t_0 + T)\lambda_{ii}$, $i = \overline{1,3}$. Кроме того, для полученной матрицы выполняется равенство

$$\Lambda = X(t_0 + T, t_0) H. \quad (27)$$

При этом поддиагональные элементы $\lambda_{ij}$, $j = 1, 2$, $j < i \leqslant 3$, этой матрицы удовлетворяют не зависящим от $t_0 \geqslant 0$ оценкам

$$|\lambda_{ij}| = |e_i^T X(t_0 + T, t_0) He_j| \leqslant \|e_i^T\| \|X(t_0 + T, t_0)\| \cdot \|H\| \cdot$$
$$\cdot \|e_j\| \leqslant \exp(5a) \cdot \|H\| \leqslant \sqrt{3} \exp(5a) \cdot$$
$$\max \left\{ \|He_j\|, \ j = \overline{1,3} \right\} \leqslant \sqrt{3} \exp(5a) \cdot$$
$$\cdot \max \left\{ \left( \sum_{i=1}^3 h_{ij}^2 \right)^{1/2}, \ j = \overline{1,3} \right\} \leqslant \sqrt{3} \exp(5a) \cdot$$
$$\cdot \max \left\{ \sqrt{\chi_2^2 + \beta_3^2 + \beta_3^2}, \sqrt{\chi_2^2 + (3\beta_2)^2}, \chi_2 \right\} =$$
$$= \sqrt{3} \exp(5a) \cdot \max \left\{ \sqrt{\chi_2^2 + 2\beta_3^2}, \sqrt{\chi_2^2 + 9\beta_2^2} \right\} =$$
$$=: \delta_1(\alpha_1),$$

которые следуют из оценок сверху для всех поддиагональных элементов $h_{ij}$ матрицы $H$, формулы (24), а также соотношений между столбцевой и спектральной нормами матриц [7, с. 336] и замечания 2 работы [5].

**Построение необходимых матричного управления и матричной траектории движения (решения матричной задачи управления).** Вводя на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ замену переменных $Z(t) = X(t_0, t)Y(t)$, от задачи (5), (6) перейдем к следующей матричной задаче управления

$$\dot{Z} = Q(t_0, t)V, \quad Z \in \mathrm{M}_3, \quad t \in [t_0, t_0 + T], \quad (28)$$
$$Z(t_0) = E, \quad Z(t_0 + T) = H, \quad (29)$$

в которой матричный коэффициент $Q(t_0, t) = X(t_0, t)B(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$, является, очевидно, локально интегрируемым и интегрально ограниченным и удовлетворяет ввиду замечания 2 статьи [5] не зависящей от $t_0$ оценке

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \|Q(t_0, \tau)\| \, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \exp(5a) \cdot \sum_{i=1}^5 \int_{t_0+(i-1)\sigma}^{t_0+i\sigma} \|B(\tau)\| \, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant 5b \exp(5a). \quad (30)$$

Пусть $\Delta_i := \bigcup_{s \in \mathfrak{M}_i} [t_{s-1}, t_s]$, $i = \overline{1, 8}$, тогда в силу соотношений (15), (19) найдутся такие точки $t^{(1)} \in (t_0, \ t_0 + \sigma)$, $t^{(2)} \in (t^{(1)}, \ t_0 + \sigma)$, $t^{(3)} \in (t_0 + \sigma, \ t_0 + 2\sigma)$, что выполняются включения $\Delta_1 \subseteq [t_0, \ t^{(1)}]$, $\Delta_2 \subseteq [t^{(1)}, \ t^{(2)}]$, $\Delta_3 \subseteq [t^{(2)}, \ t_0 + \sigma]$, $\Delta_4 \subseteq [t_0 + \sigma, \ t^{(3)}]$, $\Delta_5 \subseteq [t^{(3)}, \ t_0 + 2\sigma]$. Положив

$$c_i := \alpha_i \cdot \kappa_i \cdot \left\| \sum_{j \in \mathfrak{M}_i} w_j(t_0, u_i) \right\|^{-1}, \quad i = \overline{1, 8},$$

определим матричное управление $V$ следующим равенством:

$$V(t) := \begin{cases} [c_1 u_1(t), \ 0, \ 0], & t \in \Delta_1 \subseteq [t_0, \ t^{(1)}], \\ [0, \ c_2 u_2(t), \ 0], & t \in \Delta_2 \subseteq [t^{(1)}, \ t^{(2)}], \\ [0, \ 0, \ c_3 u_3(t)], & t \in \Delta_3 \subseteq [t^{(2)}, \ t_0 + \sigma], \\ [0, \ c_4 u_4(t), \ 0], & t \in \Delta_4 \subseteq [t_0 + \sigma, \ t^{(3)}], \\ [0, \ 0, \ c_5 u_5(t)], & t \in \Delta_5 \subseteq [t^{(3)}, \ t_0 + 2\sigma], \\ [0, \ 0, \ c_6 u_6(t)], & t \in \Delta_6 \subseteq [t_0 + 2\sigma, \ t_0 + 3\sigma], \\ [0, \ c_7 u_7(t), \ 0], & t \in \Delta_7 \subseteq [t_0 + 3\sigma, \ t_0 + 4\sigma], \\ [c_8 u_8(t), \ 0, \ 0], & t \in \Delta_8 \subseteq [t_0 + 4\sigma, \ t_0 + 5\sigma], \\ 0, & t \in [t_0, t_0 + 5\sigma], \ t \notin \Delta_i, \ i = \overline{1, 8}. \end{cases} \quad (31)$$

**Замечание 12.** Множества $\Delta_i$, $i = \overline{1, 8}$, расположены на отрезке $[t_0, t_0 + 5\sigma]$ последовательно по возрастанию своих номеров, и на каждом из них действует только одно, соответствующее этому множеству управление, стоящее под фигурной скобкой в (31).

Подставив матричное управление (31) в уравнение (28), с помощью равенств (26) найдем значения решения этого уравнения с начальным условием (29) в точках $t^{(1)}$, $t^{(2)}$, $t^{(3)}$ и $t_0+i\sigma$, $i=\overline{1,5}$. Действуя таким образом и используя при этом определения коэффициентов $c_i$ и векторов $v_i$, $i=\overline{1,8}$, а также соотношения (8) и $w_s(t_0+k\sigma,\mathrm{u}_i)=\int_{t_{s-1}}^{t_s} Q(t_0+k\sigma,\tau)\mathrm{u}_i(\tau)\,d\tau$, $k=\overline{0,4}$, $i=\overline{1,8}$, $s\in\mathfrak{M}_i$, получим равенства

$$Z(t^{(1)})=[e_1+c_1\cdot\sum\nolimits_{j\in\mathfrak{M}_1} w_j(t_0,\mathrm{u}_1),$$
$$e_2,e_3]=[e_1+\alpha_1v_1,e_2,e_3]=:P_1,$$
$$Z(t^{(2)})=[e_1+\alpha_1v_1,\ e_2+$$
$$+c_2\cdot\sum\nolimits_{j\in\mathfrak{M}_2} w_j(t_0,\mathrm{u}_2),e_3]=$$
$$=[e_1+\alpha_1v_1,e_2+\alpha_2v_2,e_3]=:P_2,$$
$$Z(t_0+\sigma)=[e_1+\alpha_1v_1,e_2+\alpha_2v_2,$$
$$e_3+c_3\cdot\sum\nolimits_{j\in\mathfrak{M}_3} w_j(t_0,\mathrm{u}_3)]=$$
$$=[e_1+\alpha_1v_1,e_2+\alpha_2v_2,\ e_3+\alpha_3v_3]=:P_3,$$
$$Z(t^{(3)})=[e_1+\alpha_1v_1,e_2+\alpha_2v_2+$$
$$+c_4\cdot X(t_0,t_0+\sigma)\cdot\sum\nolimits_{j\in\mathfrak{M}_4} w_j(t_0+\sigma,\mathrm{u}_4),$$
$$e_3+\alpha_3v_3]=$$
$$=[e_1+\alpha_1v_1,e_2+\alpha_2v_2+$$
$$+c_4\cdot\sum\nolimits_{j\in\mathfrak{M}_4} w_j(t_0,\mathrm{u}_4),e_3+\alpha_3v_3]=$$
$$=[e_1+\alpha_1v_1,e_2+\alpha_2v_2+\alpha_4v_4,\ e_3+\alpha_3v_3]=:P_4,$$
$$Z(t_0+2\sigma)=[e_1+\alpha_1v_1,$$
$$e_2+\alpha_2v_2+\alpha_4v_4,e_3+\alpha_3v_3+$$
$$+c_5\cdot X(t_0,t_0+\sigma)\cdot\sum\nolimits_{j\in\mathfrak{M}_5} w_j(t_0+\sigma,\mathrm{u}_5)]=$$
$$=[e_1+\alpha_1v_1,e_2+\alpha_2v_2+\alpha_4v_4,e_3+$$
$$+\alpha_3v_3+c_5\cdot\sum\nolimits_{j\in\mathfrak{M}_5} w_j(t_0,\mathrm{u}_5)]=$$
$$=[e_1+\alpha_1v_1,e_2+\alpha_2v_2+$$
$$+\alpha_4v_4,e_3+\alpha_3v_3+\alpha_5v_5]=:P_5,$$
$$Z(t_0+3\sigma)=[e_1+\alpha_1v_1,\ e_2+\alpha_2v_2+\alpha_4v_4,e_3+\alpha_3v_3+$$
$$+\alpha_5v_5+c_6\cdot X(t_0,t_0+2\sigma)\cdot$$
$$\cdot\sum\nolimits_{j\in\mathfrak{M}_6} w_j(t_0+2\sigma,\mathrm{u}_6)]=$$
$$=[e_1+\alpha_1v_1,e_2+\alpha_2v_2+$$
$$+\alpha_4v_4,e_3+\alpha_3v_3+\alpha_5v_5+$$
$$+c_6\cdot\sum\nolimits_{j\in\mathfrak{M}_6} w_j(t_0,\mathrm{u}_6)]=$$
$$=[e_1+\alpha_1v_1,e_2+\alpha_2v_2+\alpha_4v_4,$$
$$e_3+\alpha_3v_3+\alpha_5v_5+\alpha_6v_6]=$$
$$=[e_1+\alpha_1v_1,e_2+\alpha_2v_2+\alpha_4v_4,He_3]=:P_6,$$
$$Z(t_0+4\sigma)=[e_1+\alpha_1v_1,e_2+$$
$$+\alpha_2v_2+\alpha_4v_4+c_7\cdot X(t_0,t_0+3\sigma)\cdot$$
$$\cdot\sum\nolimits_{j\in\mathfrak{M}_7} w_j(t_0+3\sigma,\mathrm{u}_7),He_3]=$$
$$=[e_1+\alpha_1v_1,e_2+\alpha_2v_2+\alpha_4v_4+$$
$$+c_7\cdot\sum\nolimits_{j\in\mathfrak{M}_7} w_j(t_0,\mathrm{u}_7),He_3]=$$
$$=[e_1+\alpha_1v_1,e_2+\alpha_2v_2+\alpha_4v_4+\alpha_7v_7,He_3]=$$
$$=[e_1+\alpha_1v_1,He_2,He_3]=:P_7,$$
$$Z(t_0+5\sigma)=[e_1+\alpha_1v_1+c_8\cdot X(t_0,t_0+4\sigma)\cdot$$
$$\cdot\sum\nolimits_{j\in\mathfrak{M}_8} w_j(t_0+4\sigma,\mathrm{u}_8),He_2,He_3]=$$
$$=[e_1+\alpha_1v_1+c_8\cdot\sum\nolimits_{j\in\mathfrak{M}_8} w_j(t_0,\mathrm{u}_8),He_2,He_3]=$$
$$=[e_1+\alpha_1v_1+\alpha_8v_8,\ He_2,He_3]=$$
$$=[He_1,He_2,He_3]=H.$$

Так как выполняются соотношения $Z(t_0)=E$ и $Z(t_0+T)=H$, то найденное управление $V$ является решением матричной задачи управления (28), (29), а следовательно, и задачи управления (5), (6). Для доказательства теоремы 2 остается обеспечить выбор угловой меры $\varphi$, коэффициента $\alpha_1$ и знака у коэффициента $\alpha_4$ (и, тем самым, установить ограниченность найденного матричного управления $V$), а также показать, что матрица-решение $Z(t)$ с выбранным управлением $V$ обратима при всех $t\in[t_0,t_0+T]$ и имеет не зависящую от $t_0\geqslant 0$ оценку сверху на норму матрицы $Z^{-1}(t)$.

**Доказательство легальности [10] (невырожденности) построенного маршрута.** На основании замечания 2 работы [5] последнее требование в случае равномерной по $t_0\geqslant 0$ ограниченности при всех $t\in[t_0,t_0+5\sigma]$ нормы матрицы-решения $\|Z(t)\|$ уравнения (28) с выбранным управлением $V$ эквивалентно тому, что при некотором фиксированном $\rho>0$ для этого решения $Z(t)$ и любого $t\in[t_0,t_0+5\sigma]$ имеет место равномерная по $t_0$ оценка

$$\det Z(t)\geqslant\rho, \tag{32}$$

которую и будем устанавливать в дальнейшем. Для этого покажем вначале, что найдется такое число $\rho_1>0$, при котором для каждой из матриц $P_i$, $i=\overline{1,8}$, определенных на предыдущем этапе, верно соотношение $\det P_i\geqslant\rho_1$.

Прежде чем переходить к нахождению таких соотношений, введем необходимые далее обозначения и определения. При каждом $i=\overline{1,8}$ для коэффициента $\alpha_i \in \mathbb{R}$ обозначим через $\alpha_i^+$ число, равное $\alpha_i^+ := |\alpha_i|$. Возьмем $\rho_1 := \min\{1,\ \chi_1,\ \chi_1^2, \det H\}$. Зададим ранее не определенный коэффициент $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ как величину, удовлетворяющую соотношениям $\det[\alpha_1 v_1, e_2, e_3] \geqslant 0$ и $\alpha_1^+ := \max\{1,\ 17\beta_2^2/\theta_2\}/\theta_0$. Тогда в силу верных оценок $\beta_2 > 1$, $0 < \theta_k < 1$, $k = 0, 2$, имеем равенство $\alpha_1^+ = 17\beta_2^2/(\theta_2\theta_0)$. Теперь, введя используемые в дальнейшем обозначения и определения, и, кроме того, считая выполненной для величины $\varphi_1$ оценку $\varphi_1 \leqslant 1/\alpha_1^+$, перейдем непосредственно к рассмотрению каждого из вышеуказанных определителей.

**Замечание 13.** Для доказательства неравенств $\det P_i \geqslant \rho_1$ всюду на этом этапе будем пользоваться определениями величин $\alpha_1^+$ и $\rho_1$, оценкой $\sin\psi \leqslant \psi$, справедливой для малых углов $\psi \in [0, \pi/2]$, простейшими свойствами определителя, неравенством Адамара [7, с. 565], верным для произвольных векторов $\omega_j \in \mathbb{R}^3$, $j=\overline{1,3}$, соотношением $|\det[\omega_1, \omega_2, \omega_3]| \leqslant \leqslant \|\omega_1\|\,\|\omega_2\|\,\|\omega_3\|\,|\sin\sphericalangle(\omega_k, \omega_l)|$, которое следует из геометрического смысла определителя, а также вытекающими из определений векторов $e_j$ и $v_i$ равенствами $\|e_j\| = \|v_i\| = 1$, $j=\overline{1,3}$, $i=\overline{1,8}$. Здесь же заметим, что оценки и соотношения, связанные с коэффициентами $\alpha_i$, $i=\overline{2,8}$, а также величины $\theta_k$, $k=\overline{0,4}$, и $\beta_j$, $j=\overline{1,3}$, получены на этапе «Нахождение векторных управлений...» представленного доказательства.

Рассмотрим определитель $\det P_1$. Поскольку имеет место верная в силу определения величины $\alpha_1$ и формулы (17) оценка $\det[\alpha_1 v_1, e_2, e_3] \geqslant \alpha_1^+\theta_0$, то ввиду замечания 13 для этого определителя справедливы соотношения

$$\det P_1 := \det[e_1+\alpha_1 v_1, e_2, e_3] = \det[e_1, e_2, e_3] + \\ + \det[\alpha_1 v_1, e_2, e_3] \geqslant 1 + \alpha_1^+\theta_0 \geqslant 1 \geqslant \rho_1.$$

Пользуясь далее тем же замечанием 13, неравенствами (16) и $\varphi_1 \leqslant 1/\alpha_1^+$, а также оценкой $\alpha_2^+ = |\alpha_2| \leqslant \beta_2 = (\chi_2 + 1 + 2\beta_1/\theta_2)/\theta_4$, с учетом определения $\det P_1$ для определителя $\det P_2$ получим соотношения

$$\det P_2 = \det[e_1+\alpha_1 v_1, e_2+\alpha_2 v_2, e_3] = \\ = \det P_1 + \det[e_1+\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, e_3] \geqslant \det P_1 - \\ - |\det[\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, e_3]| - |\det[e_1, \alpha_2 v_2, e_3]| \geqslant \\ \geqslant \det P_1 - \alpha_1^+\alpha_2^+\,\|v_1\|\,\|v_2\|\,\|e_3\|\,|\sin\sphericalangle(v_1, v_2)| - \\ - \|e_1\|\,\|\alpha_2 v_2\|\,\|e_3\| \geqslant \det P_1 - \alpha_1^+\alpha_2^+\,|\sin\varphi_1| - \alpha_2^+ \geqslant \\ \geqslant \det P_1 - \alpha_1^+\alpha_2^+\varphi_1 - \alpha_2^+ \geqslant 1 + \alpha_1^+\theta_0 - 2\beta_2,$$

из которых ввиду неравенств $0 < \theta_2 < 1$ и $\beta_2^2 \geqslant \beta_2$, вытекающего из оценки $\beta_2 > 1$, а также определения $\alpha_1^+$ следует цепочка соотношений

$$\det P_2 \geqslant 1 + 17\beta_2^2/\theta_2 - 2\beta_2 \geqslant \\ \geqslant 1 + 17\beta_2^2/\theta_2 - 2\beta_2^2/\theta_2 \geqslant 1 + 15\beta_2^2/\theta_2 \geqslant 1 \geqslant \rho_1.$$

Теперь на основании определения и оценки $\det P_2$, замечания 13, неравенств (16) и $\varphi_1 \leqslant 1/\alpha_1^+$, а также соотношений $\alpha_2^+ \leqslant \beta_2$, $\alpha_3^+ = |\alpha_3| \leqslant \beta_1 = (1+\chi_2)(36\exp(6a)/\theta)^3$, $1 < \beta_1 < \beta_2$ и $0 < \theta_2 < 1$ оценим снизу определитель $\det P_3$:

$$\det P_3 := \det[e_1+\alpha_1 v_1, e_2+\alpha_2 v_2, e_3+\alpha_3 v_3] = \\ = \det[e_1+\alpha_1 v_1, e_2+\alpha_2 v_2, e_3] + \\ + \det[e_1+\alpha_1 v_1, e_2+\alpha_2 v_2, \alpha_3 v_3] = \\ = \det P_2 + \det[e_1, e_2+\alpha_2 v_2, \alpha_3 v_3] + \\ + \det[\alpha_1 v_1, e_2+\alpha_2 v_2, \alpha_3 v_3] \geqslant \\ \geqslant \det P_2 - |\det[e_1, e_2+\alpha_2 v_2, \alpha_3 v_3]| - \\ - |\det[\alpha_1 v_1, e_2+\alpha_2 v_2, \alpha_3 v_3]| \geqslant \\ \geqslant \det P_2 - \|e_1\|\,\|e_2+\alpha_2 v_2\|\,\|\alpha_3 v_3\| - \\ - |\det[\alpha_1 v_1, \alpha_3 v_3, e_2+\alpha_2 v_2]| \geqslant \\ \geqslant \det P_2 - (1+\alpha_2^+)\alpha_3^+ - \\ - \alpha_1^+\alpha_3^+\,\|v_1\|\,\|v_3\|\,\|e_2+\alpha_2 v_2\|\,|\sin\sphericalangle(v_1, v_3)| \geqslant \\ \geqslant \det P_2 - (1+\alpha_2^+)\alpha_3^+ - \alpha_1^+\alpha_3^+(1+\alpha_2^+)\,|\sin\varphi_1| \geqslant \\ \geqslant 1 + 15\beta_2^2/\theta_2 - (1+\beta_2)\beta_1 - \alpha_1^+\beta_1(1+\beta_2)\varphi_1 \geqslant \\ \geqslant 1 + 15\beta_2^2/\theta_2 - 2(1+\beta_2)\beta_1 \geqslant \\ \geqslant 1 + 15\beta_2{}^2/\theta_2 - 4\beta_2^2/\theta_2 = 1 + 11\beta_2^2/\theta_2 \geqslant \rho_1.$$

Прежде чем перейти к рассмотрению определителя $\det P_4$, установим знак коэффициента $\alpha_4$ (ранее был определен модуль этой величины, который равен $\alpha_4^+ = |\alpha_4| := 2\beta_1/\theta_2$). Положим $\operatorname{sign}\alpha_4 = \operatorname{sign}(\det[\alpha_1 v_1, \alpha_4 v_4, e_3])$. Тогда в силу

формулы (22), определения $\alpha_4^+$ и неравенства

$\alpha_5^+ = |\alpha_5| \leqslant \beta_1$ выполняются соотношения

$$\det[\alpha_1 v_1, \alpha_4 v_4, e_3] = |\alpha_1\alpha_4||\det[v_1, v_4, e_3]| \geqslant$$
$$\geqslant \alpha_1^+\alpha_4^+\theta_2/2 = \beta_1\alpha_1^+ \geqslant \alpha_1^+\alpha_5^+,$$

используя которые вместе с определением и оценкой на $\det P_3$, замечанием 13, неравенствами (16), $\varphi_1 \leqslant 1/\alpha_1^+$, $\alpha_3^+ \leqslant \beta_1$, $0<\theta_2<1$ и $1<\beta_1<\beta_2$ оценим снизу определитель $\det P_4$:

$$\det P_4 := \det[e_1+\alpha_1 v_1, e_2 +$$
$$+\alpha_2 v_2 + \alpha_4 v_4, e_3 + \alpha_3 v_3] =$$
$$= \det[e_1+\alpha_1 v_1, e_2+\alpha_2 v_2, e_3+\alpha_3 v_3] +$$
$$+\det[e_1+\alpha_1 v_1, \alpha_4 v_4, e_3+\alpha_3 v_3] =$$
$$= \det P_3 + \det[e_1, \alpha_4 v_4, e_3+\alpha_3 v_3] +$$
$$+\det[\alpha_1 v_1, \alpha_4 v_4, e_3] + \det[\alpha_1 v_1, \alpha_4 v_4, \alpha_3 v_3] \geqslant$$
$$\geqslant \det P_3 - |\det[e_1, \alpha_4 v_4, e_3+\alpha_3 v_3]| +$$
$$+\det[\alpha_1 v_1, \alpha_4 v_4, e_3] - |\det[\alpha_1 v_1, \alpha_4 v_4, \alpha_3 v_3]| \geqslant$$
$$\geqslant \det P_3 - \|e_1\|\,\|\alpha_4 v_4\|\,\|e_3+\alpha_3 v_3\| +$$
$$+\alpha_1^+\alpha_5^+ - |\det[\alpha_1 v_1, \alpha_3 v_3, \alpha_4 v_4]| \geqslant$$
$$\geqslant \det P_3 - \alpha_4^+(1+\alpha_3^+) + \alpha_1^+\alpha_5^+ -$$
$$-\alpha_1^+\alpha_3^+\alpha_4^+\|v_1\|\,\|v_3\|\,\|v_4\|\,|\sin\sphericalangle(v_1,v_3)| \geqslant$$
$$\geqslant \det P_3 - \alpha_4^+(1+\beta_1) +$$
$$+\alpha_1^+\alpha_5^+ - \alpha_1^+\alpha_3^+\alpha_4^+|\sin\varphi_1| \geqslant$$
$$\geqslant \det P_3 - 2\alpha_4^+\beta_1 + \alpha_1^+\alpha_5^+ - \alpha_4^+\beta_1\alpha_1^+\varphi_1 \geqslant$$
$$\geqslant \det P_3 - 4\beta_1^2/\theta_2 + \alpha_1^+\alpha_5^+ - 2\beta_1^2/\theta_2 \geqslant$$
$$\geqslant 1 + 11\beta_2^2/\theta_2 + \alpha_1^+\alpha_5^+ -$$
$$-6\beta_2^2/\theta_2 \geqslant 1 + 5\beta_2^2/\theta_2 + \alpha_1^+\alpha_5^+ \geqslant 1 \geqslant \rho_1.$$

Положим $\varphi_2 \leqslant 1/(2\alpha_1^+) \leqslant 1/(1+\alpha_1^+)$ и найдем оценку на определитель $\det P_5$, используя определение и оценку на $\det P_4$, а также учитывая определение величины $\alpha_4^+$, замечание 13, формулы (16) и (20), неравенства $\alpha_2^+ \leqslant \beta_2$, $\alpha_5^+ \leqslant \beta_1$, $\varphi_1 \leqslant 1/\alpha_1^+$, $1<\beta_1<\beta_2$ и $0<\theta_2<1$. Таким образом, имеем соотношения

$$\det P_5 := \det[e_1+\alpha_1 v_1, e_2+\alpha_2 v_2 +$$
$$+\alpha_4 v_4, e_3+\alpha_3 v_3+\alpha_5 v_5] =$$
$$= \det[e_1+\alpha_1 v_1, e_2+\alpha_2 v_2+\alpha_4 v_4,$$
$$e_3+\alpha_3 v_3] + \det[e_1+\alpha_1 v_1,$$
$$e_2+\alpha_2 v_2+\alpha_4 v_4, \alpha_5 v_5] =$$
$$= \det P_4 + \det[e_1+\alpha_1 v_1, e_2 +$$
$$+\alpha_2 v_2, \alpha_5 v_5] + \det[e_1+\alpha_1 v_1, \alpha_4 v_4, \alpha_5 v_5] =$$
$$= \det P_4 + \det[e_1, e_2+\alpha_2 v_2, \alpha_5 v_5] +$$
$$+\det[\alpha_1 v_1, e_2, \alpha_5 v_5] +$$
$$+\det[\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \alpha_5 v_5] +$$
$$+\det[e_1+\alpha_1 v_1, \alpha_4 v_4, \alpha_5 v_5] \geqslant$$
$$\geqslant \det P_4 - \|e_1\|\,\|e_2+\alpha_2 v_2\|\,\|\alpha_5 v_5\| -$$
$$-\|\alpha_1 v_1\|\,\|e_2\|\,\|\alpha_5 v_5\| -$$
$$-\|\alpha_1 v_1\|\,\|\alpha_2 v_2\|\,\|\alpha_5 v_5\|\,|\sin\sphericalangle(v_1,v_2)| -$$
$$-\|e_1+\alpha_1 v_1\|\,\|\alpha_4 v_4\|\,\|\alpha_5 v_5\|\,|\sin\sphericalangle(v_4,v_5)| \geqslant$$
$$\geqslant \det P_4 - (1+\alpha_2^+)\alpha_5^+ - \alpha_1^+\alpha_5^+ - \alpha_1^+\alpha_2^+\alpha_5^+|\sin\varphi_1| -$$
$$-(1+\alpha_1^+)\alpha_4^+\alpha_5^+|\sin\varphi_2| \geqslant$$
$$\geqslant \det P_4 - (1+\beta_2)\beta_1 - \alpha_1^+\alpha_5^+ - \alpha_1^+\beta_2\beta_1\varphi_1 -$$
$$-(1+\alpha_1^+)\alpha_4^+\beta_1\varphi_2 \geqslant \det P_4 - 2\beta_2^2 -$$
$$-\alpha_1^+\alpha_5^+ - \beta_2^2 - \alpha_4^+\beta_1 \geqslant$$
$$\geqslant 1 + 5\beta_2^2/\theta_2 + \alpha_1^+\alpha_5^+ - 3\beta_2^2/\theta_2 -$$
$$-\alpha_1^+\alpha_5^+ - 2\beta_1^2/\theta_2 \geqslant 1 + 2\beta_2^2/\theta - 2\beta_2^2/\theta_2 = 1 \geqslant \rho_1.$$

По определению матрицы $H$ имеет место равенство $He_3 = h_{33}e_3$, используя которое наряду с определениями величин $\alpha_1^+$, $\alpha_4^+$, $\rho_1$, определителя $\det P_2$ и его оценкой сверху, соотношениями (24) и $1<\beta_1<\beta_2$, формулой $\det[\alpha_1 v_1, \alpha_4 v_4, e_3] \geqslant \alpha_1^+\beta_1$, полученной при нахождении неравенства для $\det P_4$, а также замечанием 13 оценим определитель

$$\det P_6 := \det[e_1+\alpha_1 v_1, e_2+\alpha_2 v_2+\alpha_4 v_4, He_3] =$$
$$= h_{33}\cdot(\det[e_1+\alpha_1 v_1, e_2+\alpha_2 v_2, e_3] +$$
$$+\det[e_1+\alpha_1 v_1, \alpha_4 v_4, e_3]) =$$
$$= h_{33}\cdot(\det P_2 + \det[e_1, \alpha_4 v_4, e_3] +$$
$$+\det[\alpha_1 v_1, \alpha_4 v_4, e_3]) \geqslant h_{33}\cdot(\det P_2 -$$
$$-\alpha_4^+\|v_1\|\,\|v_4\|\,\|e_3\| + \alpha_1^+\beta_1) \geqslant$$
$$\geqslant h_{33}\cdot(1 + 15\beta_2^2/\theta_2 - 2\beta_1/\theta_2) \geqslant h_{33}\cdot 1 \geqslant \chi_1 \geqslant \rho_1.$$

Поскольку для произвольной нижнетреугольной матрицы $S = [s_1, s_2, s_3] = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^n \in \mathrm{M}_3$ выполняются равенства $\det S = s_{11}\cdot s_{22}\cdot s_{33} = s_{22}s_{33}\cdot\det[s_1, e_2, e_3]$, а матрица $H$ – нижнетреугольная, то, учитывая оценку на $\det P_1$, формулу (24), а также определение $\rho_1$, для определителя $\det P_7$ получим соотношения

$$\det P_7 := \det[e_1+\alpha_1 v_1, He_2, He_3] =$$
$$= h_{22}h_{33}\cdot\det[e_1+\alpha_1 v_1, e_2, e_3] = h_{22}h_{33}\cdot\det P_1 \geqslant$$
$$\geqslant h_{22}h_{33}\cdot 1 \geqslant \chi_1^2 \geqslant \rho_1.$$

Наконец, обозначив $P_0 := E$, ввиду определения величины $\rho_1$ для определителей матриц $P_0$ и $P_8$ установим следующие оценки снизу $\det P_0 = 1 \geqslant \rho_1$, $\det P_8 := \det H \geqslant \rho_1$.

**Замечание 14.** Найденные матрицы $P_i \in \mathrm{M}_3$,

$i=\overline{0,8}$, удовлетворяют соотношениям $\det P_i \geqslant \rho_1$ и $P_j - P_{j-1} = (\alpha_j v_j)\cdot u_j^T$, где $u_j \in \{e_1, e_2, e_3\}$, $j=\overline{1,8}$. В этом случае говорят [10], что *последовательность матриц* $E=P_0, \ldots, P_8 = H$ *образует* $\rho_1$*-легальный маршрут (относительно последовательности векторов* $\alpha_j v_j$, $j=\overline{1,8}$*), соединяющий точки* $E$ *и* $H$.

В заключение данного этапа укажем общее для всех коэффициентов $\alpha_i$, $i=\overline{1,8}$, положительное число, ограничивающее сверху их модули. На основании найденных еще на этапе «Нахождение векторных управлений...» соотношений $\alpha_2^+ \leqslant \beta_2$, $\alpha_3^+ \leqslant \beta_1$, $\alpha_5^+ \leqslant \beta_1$ $\alpha_6^+ \leqslant \beta_1$, $\alpha_7^+ \leqslant \beta_2$, $\alpha_8^+ \leqslant (\chi_2 + 1 + |\alpha_1|)/\theta_5$, $\beta_3(\alpha_1) := |\alpha_1| + (\chi_2 + 1 + |\alpha_1|)/\theta_5$, $\beta_2 > \beta_1 > 1$, $0<\theta_i<1$, $i=\overline{0,5}$, а также полученных на данном этапе равенств $\alpha_4^+ = \beta_1^2/\theta_2$ и $\alpha_1^+ = 18\beta_2^2/(\theta_2\theta_0)$ имеем для модулей коэффициентов $\alpha_k$, $k=\overline{1,8}$, оценки $|\alpha_k| = \alpha_k^+ \leqslant \beta_3$. При этом, поскольку величина $\alpha_1^+$ суть заданное положительное число, величина $\beta_3$ также является вполне определенным положительным числом. Тогда отсюда и из соотношений

$$|\lambda_{ij}| \leqslant \sqrt{3}\exp(5a)\cdot \max\{\sqrt{\chi_2^2 + 2\beta_3^2}, \sqrt{\chi_2^2 + 9\beta_2^2}\} =: \\ =: \delta_1(\alpha_1)$$

для всех поддиагональных элементов матрицы $\Lambda$ следует не зависящая уже ни от $t_0$, ни от $\alpha_1$ их оценка сверху $|\lambda_{ij}| \leqslant \delta_1$. $j=1,2$, $j<i\leqslant 3$.

**Замечание 15.** Величины $\beta_3$ и $\delta_1$, являющиеся оценками сверху на все коэффициенты $\alpha_k$ и все поддиагональные элементы $\lambda_{ij}$ матрицы $\Lambda$, выражаются через величины $\beta_r$, $r=\overline{1,3}$, которые, в свою очередь, зависят от чисел $\theta$ и $\chi_2$. Поэтому эти оценки определяются заданными исходной системой (1) и диагональными элементами матрицы $\Lambda$ (см. определение величины $\theta$ в начале доказательства теоремы 2 и формулу (24)).

**Построение конусных интервалов для легального маршрута.** Из определения матриц $P_j$, $j=\overline{0,9}$, оценок $\alpha_i^+ \leqslant \beta_3$, $i=\overline{1,8}$, и равенств $\|v_i\|=1$, $i=\overline{1,8}$, следуют соотношения

$$\|(P_1-P_0)e_1\| = \|e_1+\alpha_1 v_1 - e_1\| = \|\alpha_1 v_1\| \leqslant \alpha_1^+ \leqslant \beta_3,$$
$$\|(P_2-P_1)e_2\| = \|e_2+\alpha_2 v_2 - e_2\| = \|\alpha_2 v_2\| \leqslant \alpha_2^+ \leqslant \beta_3,$$
$$\|(P_3-P_2)e_3\| = \|e_3+\alpha_3 v_3 - e_3\| = \|\alpha_3 v_3\| \leqslant \alpha_3^+ \leqslant \beta_3,$$
$$\|(P_4-P_3)e_2\| = \|e_2+\alpha_2 v_2 + \alpha_4 v_4 - e_2 - \alpha_2 v_2\| = \\ = \|\alpha_4 v_4\| \leqslant \alpha_4^+ \leqslant \beta_3,\ \|(P_5-P_4)e_3\| = \\ = \|e_3+\alpha_3 v_3+\alpha_5 v_5 - e_3 - \alpha_3 v_3\| = \|\alpha_5 v_5\| \leqslant \alpha_5^+ \leqslant \beta_3,$$
$$\|(P_6-P_5)e_3\| = \|He_3 - e_3 - \alpha_3 v_3 - \alpha_5 v_5\| = \\ = \|e_3+\alpha_3 v_3+\alpha_5 v_5+\alpha_6 v_6 - e_3 - \alpha_3 v_3 - \alpha_5 v_5\| = \\ \|\alpha_6 v_6\| \leqslant \alpha_6^+ \leqslant \beta_3,\ \|(P_7-P_6)e_2\| = \\ = \|He_2 - e_2 - \alpha_2 v_2 - \alpha_4 v_4\| = \\ \|e_2+\alpha_2 v_2+\alpha_4 v_4+\alpha_7 v_7 - e_2 - \alpha_2 v_2 - \alpha_4 v_4\| = \\ = \|\alpha_7 v_7\| \leqslant \alpha_7^+ \leqslant \beta_3,\ \|(P_8-P_7)e_1\| = \|He_1 - e_1 - \alpha_1 v_1\| = \\ = \|e_1+\alpha_1 v_1+\alpha_8 v_8 - e_1 - \alpha_1 v_1\| = \|\alpha_8 v_8\| \leqslant \alpha_8^+ \leqslant \beta_3.$$

Положим $\beta_4 := 1+3\beta_3$, $\varepsilon := \rho_1/(3\beta_4^2)$, $\varphi_3 := \operatorname{arctg}(2\varepsilon/\beta_3)$ и потребуем, чтобы для величины $\varphi_2$ выполнялось неравенство $\varphi_2 \leqslant \varphi_3$. Определим угловую меру $\varphi$ следующим равенством:

$$\varphi := \min\{\theta/72,\ (\theta_1/(12\exp(3a)))^2, \\ \theta_2\theta_0/(36\beta_2^2),\ \varphi_3\}/(4\exp(16a)). \qquad (33)$$

Легко видеть, что $\varphi \in (0, \theta/16)$. Тогда поскольку по определению $\varphi_1 = 4\varphi$, $\theta \in (0, \pi/18)$ и $a>1$, то, очевидно, что величина $\varphi_1$ удовлетворяет всем наложенным на нее ранее в процессе доказательства соотношениям, т.е. неравенствам $\varphi_1 \cdot \exp(16a) < 1$, $\varphi_1 \leqslant \theta_1/12 = \theta/72$, $\varphi_1 \leqslant (\theta_1/(12\exp(3a))^2$, $\varphi_1 \leqslant 1/\alpha_1^+ = \theta_2\theta_0/(18\beta_2^2)$. Аналогично, по определению $\varphi_2 := \arcsin(4\varphi\cdot\exp(16a))$, тогда в силу очевидной оценки $\varphi < 1/(4\exp(16a))$ и верного для любого $0<\psi<1$ соотношения $\arcsin\psi \leqslant \psi$ имеем неравенство $\varphi_2 \leqslant \min\{\theta/72,\ (\theta_1/(12\exp(3a)))^2,\ \theta_2\theta_0/(36\beta_2^2), \varphi_3\}$, означающее так же, как и для $\varphi_1$, что при выбранном $\varphi$ для величины $\varphi_2$ справедливы все наложенные на нее выше условия, а именно: $\varphi_2 \leqslant (\theta_1/(12\exp(3a)))^2$, $\varphi_2 \leqslant 1/(2\alpha_1^+) = \theta_2\theta_0/(36\beta_2^2)$, $\varphi_2 \leqslant \varphi_3$.

Из этапа «Нахождение векторных управлений...» следует, что при всех $i=\overline{2,8}$ для угловых мер найденных выпуклых конусов $\Psi_i$ выполняются оценки сверху $\sphericalangle\Psi_i \leqslant \varphi_2$. Последние справедливы также и для угловой меры конуса $\Psi_1$ ввиду вытекающего из соотношений $\arcsin(\varphi_1 \cdot \exp(4ak)) \leqslant \leqslant \arcsin(4\varphi \cdot \exp(16a)) = \varphi_2$, $k = \overline{0,5}$, неравенства $\varphi_1 \leqslant \sin\varphi_2 \leqslant \varphi_2$ и оценки $\sphericalangle\Psi_1 \leqslant \varphi_1$, верной в силу определения конуса $\Psi_1$. Таким образом, при любом $i = \overline{1,8}$ имеют место неравенства $\sphericalangle\Psi_i \leqslant \varphi_2 \leqslant \varphi_3$. Для каждого $i = \overline{1,8}$ положим $\overline{\Psi}_i = (\operatorname{sign}\alpha_i) \cdot \Psi_i$, где величины $\alpha_i$ – найденные на предыдущих этапах коэффициенты. Тогда ввиду определения конусов $\Psi_i$, $i = \overline{1,8}$, следует, что конусы $\overline{\Psi}_i$, $i = \overline{1,8}$, выпуклы и удовлетворяют оценке $\sphericalangle\overline{\Psi}_i \leqslant \varphi_2 \leqslant \varphi_3$. В силу определения векторов $w_s(t_0, \mathrm{u}_i)$, $s \in \mathfrak{M}_i$, конусов $\Psi_i$, а также чисел $\kappa_i$, $i = \overline{1,8}$, найденных на этапе «Нахождение векторных управлений...» доказательства, имеем соотношения $\kappa_i \cdot w_s(t_0, \mathrm{u}_i) \in \Psi_i$, $s \in \mathfrak{M}_i$, и ввиду определения и выпуклости конусов $\overline{\Psi}_i$ включения $\alpha_i \cdot (\kappa_i \cdot w_s(t_0, \mathrm{u}_i)) \in \overline{\Psi}_i$ для всех $i = \overline{1,8}$ и $s \in \mathfrak{M}_i$. Тогда отсюда, ввиду равенств $c_i = \alpha_i \cdot \kappa_i \cdot \|\sum_{s\in\mathfrak{M}_i} w_s(t_0, \mathrm{u}_i)\|^{-1}$, $i = \overline{1,8}$, при каждом $i = \overline{1,8}$ и $s \in \mathfrak{M}_i$ следуют включения

$$c_i \cdot w_s(t_0, \mathrm{u}_i) \in \overline{\Psi}_i. \qquad (34)$$

В силу последней формулы, на основании выпуклости при любом $i = \overline{1,8}$ конуса $\overline{\Psi}_i$, с учетом справедливых для всех ранее найденных векторов $v_i$, $i = \overline{1,8}$, равенств $v_i := \kappa_i \cdot \sum_{j\in\mathfrak{M}_i} w_j(t_0, \mathrm{u}_i) / \|\sum_{j\in\mathfrak{M}_i} w_j(t_0, \mathrm{u}_i)\|$, а также ввиду определения коэффициентов $c_i$, при всяком $i = \overline{1,8}$, выполняются соотношения

$$\alpha_i v_i = \alpha_i \cdot (\kappa_i \cdot \sum_{j\in\mathfrak{M}_i} w_j(t_0, \mathrm{u}_i) /$$
$$/ \|\sum_{j\in\mathfrak{M}_i} w_j(t_0, \mathrm{u}_i)\|) = c_i \cdot \sum_{j\in\mathfrak{M}_i} w_j(t_0, \mathrm{u}_i) \in \overline{\Psi}_i,$$

т.е. $\alpha_i v_i \in \overline{\Psi}_i$.

Обозначим через $\Xi_i \supset \overline{\Psi}$, $\Xi_i \subset \mathbb{R}^3$, $i = \overline{1,8}$, выпуклые круговые конусы угловой меры $2\varphi_2$, на осях которых лежат векторы $\alpha_i v_i$ (такие выпуклые конусы существуют в силу очевидной оценки $0 < \varphi_2 < \pi/4$), и введем в рассмотрение конусные интервалы [5]:

$$R_1 := \Xi[P_0 e_1, P_1 e_1], \quad R_2 := \Xi[P_1 e_2, P_2 e_2],$$
$$R_3 := \Xi[P_2 e_3, P_3 e_3],$$
$$R_4 := \Xi[P_3 e_2, P_4 e_2], \quad R_5 := \Xi[P_4 e_3, P_5 e_3],$$
$$R_6 := \Xi[P_5 e_3, P_6 e_3],$$
$$R_7 := \Xi[P_6 e_2, P_7 e_2], \quad R_8 := \Xi[P_7 e_1, P_8 e_1].$$

Для любых векторов $g_1, g_2 \in \mathbb{R}^3$ через $w^{\perp}(g_1, g_2) \in \mathbb{R}^3$ будем обозначать вектор $w^{\perp}(g_1, g_2) = g_1 \times g_2$, где символ $\times$ означает векторное произведение векторов. Тогда из определения векторного и смешанного произведений векторов следуют соотношения $w^{\perp}(g_1, g_2) \perp L(g_1, g_2)$, в котором, как и ранее, $L(g_1, g_2)$ суть линейная оболочка векторов $g_1, g_2$, и $(w^{\perp}(g_1, g_2))^T \cdot f = f^T \cdot w^{\perp}(g_1, g_2) = = \det[g_1, g_2, f] = \det[f, g_1, g_2]$ для произвольного вектора $f \in \mathbb{R}^3$. В силу последней формулы выполняются соотношения

$$|\det[f, g_1, g_2]| = |(w^{\perp}(g_1, g_2))^T \cdot f| \leqslant$$
$$\leqslant \|w^{\perp}(g_1, g_2)\| \cdot \|f\|$$

и вытекающая из них, в случае $f \neq 0$, оценка $\|w^{\perp}(g_1, g_2)\| \geqslant |\det[f, g_1, g_2]| / \|f\|$. Кроме того, из геометрического смысла векторного произведения векторов следуют соотношения

$$\|w^{\perp}(g_1, g_2)\| = \|g_1 \times g_2\| =$$
$$= \|g_1\| \cdot \|g_2\| \cdot |\sin\sphericalangle(g_1, g_2)| \leqslant \|g_1\| \cdot \|g_2\|.$$

По определению матрицы $P_j$, $j \in \{1,\ldots,8\}$, каждый ее столбец представляет собой сумму нескольких слагаемых (их максимальное количество равно четырем), одно из которых есть вектор $e_k$, $k \in \{1,\ldots,3\}$, а остальные слагаемые (которые могут отсутствовать) – векторы $\alpha_i v_i$, $i \in \{1,\ldots,8\}$. Тогда на основании неравенств $\alpha_i^+ \leqslant \beta_3$, $i = \overline{1,8}$, равенств $\|v_i\| = \|e_k\| = 1$, $i = \overline{1,8}$, $k = \overline{1,3}$, легко показать, что для всех $j = \overline{0,8}$ и $k = \overline{1,3}$ выполняются оценки $\|P_j e_k\| \leqslant 1 + 3\beta_3 = \beta_4$. Отсюда и из соотношений $\det P_j \geqslant \rho_1$, $j = \overline{0,8}$, найденных на предыдущем этапе, с учетом определения матриц $P_j$, $j = \overline{0,8}$, вектора $w^{\perp}(g_1, g_2)$ и его свойств, при каждом $j = \overline{0,8}$ и $q, r, l \in \{1,2,3\}$, $q \neq r \neq l$, получим неравенства

$$\|w^{\perp}(P_j e_q, P_j e_r)\| \geqslant$$
$$\geqslant |\det[P_j e_l, P_j e_q, P_j e_r]| / \|P_j e_l\| = |\det P_j| / \|P_j e_l\| \geqslant$$

$$\geqslant \rho_1/\beta_4 > 0,$$
$$\|w^{\perp}(P_j e_q, P_j e_r)\| \leqslant \|P_j e_q\| \|P_j e_r\| \leqslant \beta_4^2. \qquad (35)$$

Рассмотрим конусный интервал $R_1$. Ввиду оценки $\det P_j \geqslant \rho_1$, $j = \overline{0, 8}$, с учетом определения матриц $P_s$, $s \in \{0, 1\}$, выполняются соотношения

$$(w^{\perp}(P_0e_2, P_0e_3))^T \cdot (P_0e_1) = \det[P_0e_1, P_0e_2, P_0e_3] =$$
$$= \det P_0 \geqslant \rho_1, \ (w^{\perp}(P_0e_2, P_0e_3))^T \cdot (P_1e_1) =$$
$$= (w^{\perp}(P_1e_2, P_1e_3))^T \cdot (P_1e_1) =$$
$$= \det[P_1e_1, P_1e_2, P_1e_3] = \det P_1 \geqslant \rho_1.$$

Положим $\xi = w^{\perp}(P_0e_2, P_0e_3) / \ \|w^{\perp}(P_0e_2, P_0e_3)\|$, тогда справедливы равенство $\|\xi\| = 1$ и, с учетом последних соотношений, определения $\varepsilon := \rho_1/(3\beta_4^2)$ и формул (35), оценки $\xi^T \cdot (P_se_1) \geqslant \rho_1 / \|w^{\perp}(P_0e_2, P_0e_3)\| \geqslant \rho_1/\beta_4^2 = 3\varepsilon$, $s = 0,1$. Кроме того, ввиду определения величин $\varepsilon$, $\varphi_2$ и $\varphi_3$, а также неравенства $\|P_0e_1 - P_0e_1\| \leqslant \beta_3$, установленного в начале данного этапа, имеем соотношения $2\varphi_2 \leqslant 2\varphi_3 = 2\mathrm{arctg}(2\varepsilon/\beta_3) \leqslant \ 2\mathrm{arctg}(2\varepsilon/\|P_1e_1 - P_0e_1\|)$, означающие вместе с оценками для $\xi^T(P_se_1)$, $s \in \{0, 1\}$, что векторы $\xi$ и $P_se_1$ удовлетворяют условиям леммы 7 работы [5], используя которую, получим, что для произвольного элемента $\mathfrak{y}_1 \in \mathrm{U}_\varepsilon(R_1)$ (принадлежащего $\varepsilon$-окрестности [5] конусного интервала $R_1$) будет выполняться неравенство $\xi_1^T \mathfrak{y}_1 \geqslant 3\varepsilon/3 = \varepsilon$. Отсюда ввиду определения $\xi$, $\varepsilon$ и формул (35) следуют соотношения

$$\det[\mathfrak{y}_1, P_0e_2, P_0e_3] = (w^{\perp}(P_0e_2, P_0e_3))^T \cdot \mathfrak{y}_1 =$$
$$= (\|w^{\perp}(P_0e_2, P_0e_3)\| \cdot \xi^T) \cdot \mathfrak{y}_1 \geqslant \|w^{\perp}(P_0e_2, P_0e_3)\| \cdot \varepsilon \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon \cdot (\rho_1/\beta_4) = \rho_1^2/(3\beta_4^3) =: \rho.$$

Таким образом, для любого элемента $\mathfrak{y}_1 \in \mathrm{U}_\varepsilon(R_1)$ справедливо неравенство

$$\det[\mathfrak{y}_1, P_0e_2, P_0e_3] \geqslant \rho. \qquad (36)$$

Аналогичным образом, используя определения величин $\varepsilon, \rho, \varphi_2, \varphi_3$, неравенства (35) и $\det P_j \geqslant \beta_3$, $j = \overline{1, 8}$, а также соотношения, полученные вначале данного этапа доказательства для норм разностей столбцов матриц $P_j$, на основании леммы 7 работы [5] можно установить, что для каждого элемента $\mathfrak{y}_i \in \mathrm{U}_\varepsilon(R_i)$, $i = \overline{2, 8}$, выполняется соответствующее ему неравенство:

$$\det[P_1e_1, \mathfrak{y}_2, P_1e_3] \geqslant \rho, \ \det[P_2e_1, P_2e_2, \mathfrak{y}_3] \geqslant \rho,$$
$$\det[P_3e_1, \mathfrak{y}_4, P_3e_3] \geqslant \rho,$$
$$\det[P_4e_1, P_4e_2, \mathfrak{y}_5] \geqslant \rho,$$
$$\det[P_5e_1, P_5e_2, \mathfrak{y}_6] \geqslant \rho, \ \det[P_6e_1, \mathfrak{y}_7, P_6e_3] \geqslant \rho,$$
$$\det[P_7e_1, \mathfrak{y}_8, P_7e_3] \geqslant \rho. \qquad (37)$$

**Замечание 16.** Из оценок (36) и (37) следует, что для каждого $j = \overline{0, 7}$ ранее найденные векторы $P_je_i$, $P_je_k$, $i,k \in \{1,2,3\}$, $i \neq k$, и произвольно взятый вектор $\mathfrak{y}_{j+1} \in \mathrm{U}_\varepsilon(R_{j+1})$, расположенные в порядке следования, указанном в соответствующем определителе (см. формулы (36) и (37)), образуют правую тройку векторов (базис) достаточно большого объема ($\geqslant \rho$).

**Доказательство принадлежности векторных траекторий матричного решения окрестностям найденных конусных интервалов.** Пусть $q_i$, $i = \overline{1, 8}$, – мощность множества $\mathfrak{M}_i$. Обозначим через $\mathfrak{m}_{i,j}$, $j = \overline{1, q_i}$, $i = \overline{1, 8}$, элементы множества $\mathfrak{M}_i$, упорядоченные по возрастанию. Тогда в силу включений (34), определения конусных интервалов $R_i$, $i = \overline{1, 8}$, на основании леммы 6 работы [5] для всех $i = \overline{1, 8}$ и $s_i = \overline{1, q_i}$ получим включения

$$P_0e_1 + c_1 \cdot \sum\nolimits_{j=1}^{s_1} w_{\mathfrak{m}_{1,j}}(t_0, \mathfrak{u}_1) \in R_1,$$
$$P_1e_2 + c_2 \cdot \sum\nolimits_{j=1}^{s_2} w_{\mathfrak{m}_{2,j}}(t_0, \mathfrak{u}_2) \in R_2,$$
$$P_2e_3 + c_3 \cdot \sum\nolimits_{j=1}^{s_3} w_{\mathfrak{m}_{3,j}}(t_0, \mathfrak{u}_3) \in R_3,$$
$$P_3e_2 + c_4 \cdot \sum\nolimits_{j=1}^{s_4} w_{\mathfrak{m}_{4,j}}(t_0, \mathfrak{u}_4) \in R_4,$$
$$P_4e_3 + c_5 \cdot \sum\nolimits_{j=1}^{s_5} w_{\mathfrak{m}_{5,j}}(t_0, \mathfrak{u}_5) \in R_5,$$
$$P_5e_3 + c_6 \cdot \sum\nolimits_{j=1}^{s_6} w_{\mathfrak{m}_{6,j}}(t_0, \mathfrak{u}_6) \in R_6,$$
$$P_6e_2 + c_7 \sum\nolimits_{j=1}^{s_7} w_{\mathfrak{m}_{7,j}}(t_0, \mathfrak{u}_7) \in R_7,$$
$$P_7e_1 + c_8 \cdot \sum\nolimits_{j=1}^{s_8} w_{\mathfrak{m}_{8,j}}(t_0, \mathfrak{u}_8) \in R_8. \qquad (37')$$

По построению функции $\mathfrak{u}_i$, $i = \overline{1, 8}$, являются измеримыми и ограниченными на своих областях определения, поэтому ввиду формулы (31) матричная функция $V$ также измерима и ограничена на $[t_0, t_0 + T]$. Отсюда, поскольку матричная функция $Q(t, \tau)$ локально интегрируема при всех $t, \tau \geqslant 0$, вектор-функции

$Q(t_0,t)V(t)e_j$, $j=\overline{1,3}$, также локально интегрируемы на $[t_0,t_0+T]$. Используя лемму 1 работы [5], найдем такое $p_1 \geqslant p$, $p_1 \in \mathbb{N}$, при котором для всех $i=\overline{1,p_1}$, $k=\overline{0,5}$, $j=\overline{1,3}$ и $t\in[t_{i-1},t_i]\subset I_k=[t_0+k\sigma, t_0+(k+1)\sigma]$ будут выполняться включения $\|\int_{t_{i-1}}^{t} Q(t_0,\tau)V(\tau)e_j\,d\tau\| \in \mathrm{U}_\varepsilon(0)$. Тогда отсюда с учетом включений (37′) для первого столбца решения матричной задачи управления (28) с начальным условием (29) и управлением (31) при любом $i=\overline{1,p_1}$ и $t\in[t_{i-1},t_i]\subset[t_0,t^{(1)}]$ получим соотношения

$$Z(t)e_1 = (E+\int_{t_0}^{t} Q(t_0,\tau)V(\tau)d\tau)e_1 =$$

$$=[e_1+c_1\cdot\int_{t_0}^{t} Q(t_0,\tau)\mathfrak{u}_1(\tau)d\tau, e_2, e_3]\cdot e_1 =$$

$$=[P_0e_1+c_1\cdot\sum_{j=1}^{s} w_{\mathfrak{m}_{1,j}}(t_0,\mathfrak{u}_1)+$$

$$+c_1\cdot\int_{t_{\mathfrak{m}_{1,s}}}^{t} Q(t_0,\tau)\mathfrak{u}_1(\tau)d\tau, e_2, e_3]\cdot e_1 =$$

$$=P_0e_1+c_1\cdot\sum_{i=1}^{s} w_{\mathfrak{m}_{1,i}}(t_0,\mathfrak{u}_1)+$$

$$+c_1\cdot\int_{t_{\mathfrak{m}_{1,s}}}^{t} Q(t_0,\tau)\mathfrak{u}_1(\tau)d\tau =$$

$$=P_0e_1+c_1\cdot\sum_{i=1}^{s} w_{\mathfrak{m}_{1,i}}(t_0,\mathfrak{u}_1)+$$

$$+\int_{t_i}^{t} Q(t_0,\tau)V(\tau)e_1\,d\tau \in R_1+\mathrm{U}_\varepsilon(0)=\mathrm{U}_\varepsilon(R_1),$$

где $\mathfrak{m}_{1,s}\leqslant i\leqslant p_1$, $s\in\{1,\ldots,q_1\}$. В силу произвольности $i\in\{1,\ldots,p_1\}$ для всех $t\in[t_0,t^{(1)}]$ имеет место соотношение $Z(t)e_1\in\mathrm{U}_\varepsilon(R_1)$. Рассуждая аналогичным образом, можно получить следующие включения: $Z(t)e_2\in\mathrm{U}_\varepsilon(R_2)$, $t\in[t^{(1)},t^{(2)}]$; $Z(t)e_3\in\mathrm{U}_\varepsilon(R_3)$, $t\in[t^{(2)},t_0+\sigma]$; $Z(t)e_2\in\mathrm{U}_\varepsilon(R_4)$, $t\in[t_0+\sigma,t^{(3)}]$; $Z(t)e_3\in\mathrm{U}_\varepsilon(R_5)$, $t\in[t^{(3)},t_0+2\sigma]$; $Z(t)e_3\in\mathrm{U}_\varepsilon(R_6)$, $t\in[t_0+2\sigma,t_0+3\sigma]$; $Z(t)e_2\in\mathrm{U}_\varepsilon(R_7)$, $t\in[t_0+3\sigma,t_0+4\sigma,]$; $Z(t)e_1\in\mathrm{U}_\varepsilon(R_8)$, $t\in[t_0+4\sigma,t_0+5\sigma]$.

**Нахождение равномерной по начальному моменту времени оценки на построенное матричное управление.** Так как лишь один из столбцов каждой матрицы управления в (31) – ненулевой, то, используя определения матриц $P_j$, $j=\overline{0,8}$, последние включения и выполнимые в силу этих включений неравенства (36) и (37), имеем для матрицы-решения задачи управления (28), (29) с выбранным управлением (31) следующие соотношения:

$$\det Z(t)=\det[Z(t)e_1,e_2,e_3]=$$

$$=\det[Z(t)e_1,P_0e_2,P_0e_3]\geqslant\rho,\quad t\in[t_0,t^{(1)}],$$

$$\det Z(t)=\det[e_1+\alpha_1v_1,Z(t)e_2,e_3]=$$

$$=\det[P_1e_1,Z(t)e_2,P_1e_3]\geqslant\rho,\quad t\in[t^{(1)},t^{(2)}],$$

$$\det Z(t)=\det[e_1+\alpha_1v_1,e_2+\alpha_2v_2,Z(t)e_3]=$$

$$=\det[P_2e_1,P_2e_2,Z(t)e_3]\geqslant\rho,\quad t\in[t^{(2)},t_0+\sigma],$$

$$\det Z(t)=\det[e_1+\alpha_1v_1,Z(t)e_2,e_3+\alpha_3v_3]=$$

$$=\det[P_3e_1,Z(t)e_2,P_3e_3]\geqslant\rho,\quad t\in[t_0+\sigma,t^{(3)}],$$

$$\det Z(t)=\det[e_1+\alpha_1v_1,e_2+\alpha_2v_2+\alpha_4v_4,Z(t)e_3]=$$

$$=\det[P_4e_1,P_4e_2,Z(t)e_3]\geqslant\rho,\quad t\in[t^{(3)},t_0+2\sigma],$$

$$\det Z(t)=\det[e_1+\alpha_1v_1,e_2+\alpha_2v_2+\alpha_4v_4,Z(t)e_3]=$$

$$=\det[P_5e_1,P_5e_2,Z(t)e_3]\geqslant\rho,$$

$$t\in[t_0+2\sigma,t_0+3\sigma],$$

$$\det Z(t)=\det[e_1+\alpha_1v_1,Z(t)e_2,He_3]=$$

$$=\det[P_6e_1,Z(t)e_2,P_6e_3]\geqslant\rho,$$

$$t\in[t_0+3\sigma,t_0+4\sigma],$$

$$\det Z(t)=\det[Z(t)e_1,He_2,He_3]=$$

$$=\det[Z(t)e_1,P_7e_2,P_7e_3]\geqslant\rho,$$

$$t\in[t_0+4\sigma,t_0+5\sigma],$$

устанавливающие справедливость для всех $t\in[t_0,t_0+5\sigma]$ неравенства (32).

Покажем теперь, что для выбранного управления $V$ при некотором $\delta_2>0$ выполняется равномерная по $t_0\geqslant 0$ оценка сверху $\|V(t)\|\leqslant\delta_2$, $t\in[t_0,t_0+5\sigma]$. Из определения векторов $w_s(t_0,\mathfrak{u}_i)$, $s\in\mathfrak{M}_i$, управлений $\mathfrak{u}_i$ $i=\overline{1,8}$, равенств $\mathfrak{v}_1(t)=\mathfrak{u}_1(t)=\mathfrak{u}_2(t)=\mathfrak{u}_3(t)$, $t\in I^0=[t_0,t_0+\sigma]$, и $\mathfrak{v}_4(t)=\mathfrak{u}_4(t)=\mathfrak{u}_5(t)$, $t\in I^1$, формулы (8), второго соотношения в формулах (15) и (19), пользуясь верной при любых $k\in\mathbb{N}$ и $t_0\geqslant 0$ в силу замечания 2 работы [5] оценкой $\|X(t_0+k\sigma,t_0)\|\leqslant\exp(ak)$, а также данным в начале доказательства теоремы 2 неравенством $\|\zeta_j^k\|=\|\sum_{s\in M_j^k} w_s(t_0+k\sigma,u_j^k)\| \geqslant$ $\geqslant\varphi^2/(4\pi^2\gamma_1)=:\ell(\varphi)=\ell$, вытекающим из теоремы 1 работы [5], в котором величина $\varphi$

уже задана равенствами (33), получим неравенства:

$$\|\textstyle\sum_{j\in\mathfrak{M}_i} \boldsymbol{w_j}(\boldsymbol{t}_0, \mathfrak{u}_{\boldsymbol{i}})\|^{-1} = \|\sum_{j\in\mathfrak{M}_i} \boldsymbol{w_j}(\boldsymbol{t}_0, \mathfrak{v}_1)\|^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant 4\cdot\|\textstyle\sum_{j\in\mathfrak{M}_1'} \boldsymbol{w_j}(\boldsymbol{t}_0, \mathfrak{v}_1)\|^{-1} \leqslant 4/\ell, \quad \boldsymbol{i}=\overline{1,3};$$

$$\|\textstyle\sum_{j\in\mathfrak{M}_i} \boldsymbol{w_j}(\boldsymbol{t}_0, \mathfrak{u}_{\boldsymbol{i}})\|^{-1} = \|\sum_{j\in\mathfrak{M}_i} \boldsymbol{w_j}(\boldsymbol{t}_0, \mathfrak{v}_4)\|^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant 4\cdot\|\textstyle\sum_{j\in\mathfrak{M}_4'} \boldsymbol{w_j}(\boldsymbol{t}_0, \mathfrak{v}_4)\|^{-1} =$$

$$= 4\cdot\|X(t_0, t_0+\sigma)\cdot\textstyle\sum_{j\in\mathfrak{M}_4'} w_j(t_0+\sigma, \mathfrak{v}_4)\|^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant 4\exp(a)/\ell, \quad i=\overline{4,5};$$

$$\|\textstyle\sum_{j\in\mathfrak{M}_6} \boldsymbol{w_j}(\boldsymbol{t}_0, \mathfrak{u}_6)\|^{-1} =$$

$$= \|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}_0+2\sigma)\cdot\textstyle\sum_{j\in\mathfrak{M}_6} \boldsymbol{w_j}(\boldsymbol{t}_0, \mathfrak{u}_6)\|^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \exp(2\boldsymbol{a})/\ell;$$

$$\|\textstyle\sum_{j\in\mathfrak{M}_7} \boldsymbol{w_j}(\boldsymbol{t}_0, \mathfrak{u}_7)\|^{-1} =$$

$$= \|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}_0+3\sigma)\textstyle\sum_{j\in\mathfrak{M}_7} \boldsymbol{w_j}(\boldsymbol{t}_0, \mathfrak{u}_7)\|^{-1} \leqslant \exp(3\boldsymbol{a})/\ell;$$

$$\|\textstyle\sum_{j\in\mathfrak{M}_8} \boldsymbol{w_j}(\boldsymbol{t}_0, \mathfrak{u}_8)\|^{-1} =$$

$$= \|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}_0+4\sigma)\cdot\textstyle\sum_{j\in\mathfrak{M}_8} \boldsymbol{w_j}(\boldsymbol{t}_0, \mathfrak{u}_8)\|^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \exp(4\boldsymbol{a})/\ell.$$

По определению коэффициенты $c_i$ равны $\boldsymbol{c_i} := \alpha_{\boldsymbol{i}}\cdot\kappa_{\boldsymbol{i}}\cdot\|\sum_{j\in\mathfrak{M}_i} \boldsymbol{w_j}(\boldsymbol{t}_0, \mathfrak{u}_{\boldsymbol{i}})\|^{-1}$, где $\kappa_i \in \{-1,1\}$, $i=\overline{1,8}$, тогда отсюда и из последних неравенств с учетом оценки $|\alpha_i| = \alpha_i^+ \leqslant \beta_3$, верной для всех $i=\overline{1,8}$, следуют соотношения $|c_i| \leqslant 4\beta_3\cdot\exp(4a)/\ell =: c$. Поскольку управления $\mathfrak{u}_i(t)$ на своих областях существования, исходя из их определения на этапе «Нахождение векторных управлений...», равны функциям $u_j^k(t)$, $t\in I^k := [t_0+k\sigma, t_0+(k+1)\sigma]$, для некоторых $j\in\{1,2,3\}$ и $k=\overline{0,4}$, а эти функции, в свою очередь, измеримы и ограничены, причем выполняется оценка $\|u_j^k(t)\| \leqslant \gamma_1$ для всех $t\in I^k$, то управления $\mathfrak{u}_i(t)$, $i=\overline{1,8}$, на своих областях определения также измеримы и ограничены (об этом уже было сказано на предыдущем этапе), при этом справедливы равномерные по $t_0 \geqslant 0$ неравенства $\|\mathfrak{u}_i(t)\| \leqslant \gamma_1$. Отсюда из неравенств на величины $c_i$, $i=\overline{1,8}$, а также формулы (31) вытекает не зависящая от $t_0 \geqslant 0$ оценка

$$\|V(t)\| \leqslant \max_{i=\overline{1,8}}(|c_i|\cdot\|\mathfrak{u}_i(t)\|) \leqslant c\gamma_1 =: \delta_2, \qquad t\in[t_0, t_0+T].$$

Тогда с учетом соотношений (30) для решения $Z(t)$ при всех $t\in[t_0, t_0+T]$ выполняются неравенства

$$\|Z(t)\| \leqslant \|E + \int_{t_0}^{t} Q(t_0,\tau)V(\tau)d\tau\| \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \int_{t_0}^{t} \|Q(t_0,\tau)\|\,\|V(\tau)\|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \int_{t_0}^{T} \|Q(t_0,\tau)\|\,\|V(\tau)\|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 1 + 5b\exp(5a)\delta_2 =: \delta_3.$$

Отсюда в силу замечания 2 работы [5] и формулы (32) получаем равномерную по $t_0 \geqslant 0$ оценку $\|Z^{-1}(t)\| \leqslant \|Z(t)\|^2\cdot|\det Z(t)|^{-1} \leqslant \delta_3^2/\rho$, из которой, ввиду равенства $Z(t) = X(t_0,t)Y(t)$, следует, что матрица $Y(t)$ обратима для всех $t\in[t_0, t_0+T]$, при этом справедливы соотношения $\|Y^{-1}(t)\| \leqslant \|Z^{-1}(t)\|\cdot\|X(t_0,t)\| \leqslant \delta_3^2\exp(5a)/\rho =: \delta_4$. Таким образом, взяв $U(t) = Y^{-1}(t)V(t)$, с учетом формулы (27) имеем равенства $X_U(t_0+T, t_0) = X(t_0+T, t_0)H = \Lambda$ и не зависящую от $t_0 \geqslant 0$ оценку $\|U(t)\| \leqslant \|Y^{-1}(t)\|\cdot\|V(t)\| \leqslant \delta_2\delta_4$. Положив $\delta := \max\{\delta_1, \delta_2\delta_4\}$, получим все требуемые утверждения.

**Второй этап.** Доказательство теоремы 3. Применив к системе (1) с нулевым управлением преобразование Перрона [11, с. 180]

$$x = O(t)y, \tag{37''}$$

получим систему $\dot{y} = D(t)y$, $t \geqslant 0$, у которой локально интегрируемая и интегрально ограниченная матрица коэффициентов $D(t)$ является нижнетреугольной. Система (1) таким же преобразованием переводится в систему

$$\dot{y} = D(t)y + O^{-1}(t)B(t)u. \tag{38}$$

Возьмем произвольные числа $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_3$ и определим $d_i := \exp(\mu_i\cdot T)$, $i=\overline{1,3}$, где $T = 5\sigma$. Известно [12], что свойство $\sigma$-равномерной полной управляемости инвариантно относительно преобразований Ляпунова.

Поскольку преобразование Перрона является ляпуновским и система (1) $\sigma$-равномерно вполне управляема, то это означает, что система (38) также $\sigma$-равномерно вполне управляема.

Применяя к системе (38) теорему 2, для каждого $k \in \mathbb{N}$ и некоторого $\delta = \delta(d_1, d_2, d_3) > 0$ найдем на отрезках $[(k-1)T, kT]$ такие измеримые и ограниченные управления $U_1(t)$, $\|U_1(t)\| \leqslant \delta$, обеспечивающие для матрицы Коши $Y_{U_1}(t, \tau)$, $t, \tau \geqslant 0$, замкнутой системы

$$\dot{y} = (D(t) + O^{-1}(t)B(t)U_1(t))y \tag{39}$$

равенства $Y_{U_1}(kT, (k-1)T) = \Lambda_k$, где $\Lambda_k = \left\{\lambda_{ij}^{\{k\}}\right\}_{i,j=1}^{3}$, $k \in \mathbb{N}$, – нижнетреугольные матрицы, диагональными элементами которых являются числа $d_i$, т.е. $d_i = \lambda_{ii}$, $i = \overline{1, 3}$, а для их поддиагональных элементов $\lambda_{ij}^{\{k\}}$, $i = 2, 3$, $i > j$, имеет место равномерная по $k \in \mathbb{N}$ оценка

$$|\lambda_{ij}^{\{k\}}| \leqslant \delta. \tag{40}$$

Дальнейшее доказательство будем проводить в соответствии с подходом, описанным в работах [8; 13]. Поскольку для всех $k \in \mathbb{N}$ матрицы $\Lambda_k \in \mathrm{M}_3$ – нижнетреугольные, то в зависимости от кратности собственных значений каждая из них представляется в одном из следующих трех видов (принадлежность к которым указана номером в круглых скобках):

1) если $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$, то $\Lambda_k(1) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21}^{\{k\}} & d_2 & 0 \\ \lambda_{31}^{\{k\}} & \lambda_{32}^{\{k\}} & d_3 \end{pmatrix} =$ $= L_k^{-1} \cdot \mathrm{diag}\,(d_1, d_2, d_3) \cdot L_k$, где $d_i := \exp(\mu_i \cdot T)$, $i = \overline{1, 3}$;

2) если $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$, то $\Lambda_k(2) = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ \lambda_{21}^{\{k\}} & d & 0 \\ \lambda_{31}^{\{k\}} & \lambda_{32}^{\{k\}} & d \end{pmatrix}$, где $d := \exp(\mu \cdot T)$;

3) если $\mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3$, то $\Lambda_k(3) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21}^{\{k\}} & d_1 & 0 \\ \lambda_{31}^{\{k\}} & \lambda_{32}^{\{k\}} & d_3 \end{pmatrix}$, где $d_1 := \exp(\mu_1 \cdot T) = \exp(\mu_2 \cdot T)$, $d_3 := \exp(\mu_3 \cdot T)$.

Случай $\mu_1 \neq \mu_2 = \mu_3$ сводится к случаю 3) перенумерацией $d_i$, $i = 1, 3$, в матрице $\Lambda_k(3)$.

Рассмотрим матрицы

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\lambda_{21}^{\{k\}}}{d_2 - d_1} & 1 & 0 \\ \dfrac{\lambda_{21}^{\{k\}} \cdot \lambda_{32}^{\{k\}} + \lambda_{31}^{\{k\}} \cdot (d_3 - d_2)}{(d_1 - d_3) \cdot (d_2 - d_3)} & \dfrac{\lambda_{32}^{\{k\}}}{d_3 - d_2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\lambda_{21}^{\{k\}}}{d_1 - d_2} & 1 & 0 \\ \dfrac{\lambda_{32}^{\{k\}} \cdot \lambda_{21}^{\{k\}} + \lambda_{31}^{\{k\}} \cdot (d_1 - d_2)}{(d_1 - d_2) \cdot (d_1 - d_3)} & \dfrac{\lambda_{32}^{\{k\}}}{d_2 - d_3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в случае с матрицей $\Lambda_k(1)$ выполняются неравенства $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$, то, ввиду определения элементов $d_i$, $i = \overline{1, 3}$, имеют место соотношения $d_1 \neq d_2 \neq d_3$, указывающие, что матрицы $L_k^{\pm 1}$ определены для любого $k \in \mathbb{N}$. С помощью непосредственного вычисления можно также убедиться, что эти матрицы взаимно обратны и удовлетворяют равенствам $\Lambda_k(1) = L_k^{-1} \cdot \mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3) \cdot L_k$, $k \in \mathbb{N}$. Помимо этого, из их определения и соотношений (40) с учетом неравенств между столбцевой и спектральной нормами матриц [7, с. 336] для норм $\|L_k^{\pm 1}\|$ таких матриц вытекают не зависящие от $k \in \mathbb{N}$ оценки:

$$\|L_k\| \leqslant \sqrt{3} \max \left\{ 1, \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{(\boldsymbol{d}_3 - \boldsymbol{d}_2)^2}}, \left( 1 + \frac{\delta^2}{(d_2 - d_1)^2} + \left( \frac{\delta^2 + \delta \cdot (\boldsymbol{d}_3 - \boldsymbol{d}_2)}{(\boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{d}_3) \cdot (\boldsymbol{d}_2 - \boldsymbol{d}_3)} \right)^2 \right)^{1/2} \right\} =: \boldsymbol{f}_1,$$

$$\|L_k^{-1}\| \leqslant \sqrt{3} \max \left\{ 1, \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{(d_2 - d_3)^2}}, \left( 1 + \frac{\delta^2}{(\boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{d}_2)^2} + \right. \right.$$

$$+\left(\frac{\delta^2+\delta\cdot(\boldsymbol{d}_1-\boldsymbol{d}_2)}{(\boldsymbol{d}_1-\boldsymbol{d}_2)\cdot(\boldsymbol{d}_1-\boldsymbol{d}_3)}\right)^2\Bigg)^{1/2}\Bigg\} =: \boldsymbol{f}_2$$

Определим теперь для каждого из трех вышеописанных случаев при всяком $k\in\mathbb{N}$ матрицы $C_k\in\mathrm{M}_3$:

$$C_k := \begin{cases} L_k^{-1}\cdot\operatorname{diag}(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\cdot L_k, & \text{если} \quad \mu_1\neq\mu_2\neq\mu_3, \\ C_k(2), & \text{если} \quad \mu_1=\mu_2=\mu_3, \\ C_k(3), & \text{если} \quad \mu_1=\mu_2\neq\mu_3, \end{cases} \tag{41}$$

где входящие под фигурную скобку матрицы $C_k(2)$ и $C_k(3)$ равны соответственно

$$C_k(2) := \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ \lambda_{21}^{\{k\}}/(T\cdot d) & \mu & 0 \\ \dfrac{2\lambda_{31}^{\{k\}}\cdot d-\lambda_{21}^{\{k\}}\cdot\lambda_{32}^{\{k\}}}{2T\cdot d^2} & 1 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\text{и} \quad C_k(3) := \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21}^{\{k\}}/(T\cdot d_1) & \mu_1 & 0 \\ \lambda & \dfrac{\lambda_{32}^{\{k\}}\cdot(\mu_1-\mu_3)}{d_1-d_3} & \mu_3 \end{pmatrix},$$

величины $d$ и $d_i$, $i=1,3$, определены выше, а элемент $\lambda$ находится из соотношения

$$\lambda := \frac{\lambda_{31}^{\{k\}}\cdot\boldsymbol{T}\cdot(\mu_1-\mu_3)\cdot(\boldsymbol{d}_1-\boldsymbol{d}_3)+\lambda_{21}^{\{k\}}\lambda_{32}^{\{k\}}\cdot(\boldsymbol{T}\cdot(\mu_3-\mu_1)+1-\boldsymbol{d}_3/\boldsymbol{d}_1)}{(\boldsymbol{d}_1-\boldsymbol{d}_3)^2\cdot\boldsymbol{T}}. \tag{42}$$

Докажем, что матрицы, находящиеся под фигурной скобкой в формуле (41), определены при любом натуральном $k$, и установим их равномерную по $k\in\mathbb{N}$ ограниченность. Первая из таких матриц определена для всякого $k\in\mathbb{N}$, поскольку, как показано ранее, матрицы $L_k^{\pm1}$ определены для любого $k\in\mathbb{N}$, матрица же $\operatorname{diag}(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ не зависит от $k\in\mathbb{N}$ и, следовательно, существует при каждом натуральном $k$. Поэтому произведение этих матриц, коим и является первая из матриц под фигурной скобкой в формуле (41), определено при любом $k\in\mathbb{N}$. Кроме того, ввиду оценок сверху на нормы $\|L_k^{\pm1}\|$, для нее справедливы не зависящие от $k\in\mathbb{N}$ оценки

$$\|C_k\|\leqslant\|L_k^{-1}\|\cdot\|\operatorname{diag}(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\|\cdot\|L_k\|\leqslant$$
$$\leqslant f_1f_2\cdot\max\{|\mu_1|,|\mu_2|,|\mu_3|\}.$$

Докажем теперь, что и матрицы $C_k(i)$, $i=2,3$, обладают вышеуказанными свойствами. Эти матрицы определены при любом натуральном $k$, в силу не зависящих от $k\in\mathbb{N}$ соотношений $d_1\neq d_3$, $d>0$, $T>0$, вытекающих из неравенства $\mu_1\neq\mu_3$, определения величин $d_i$, $i=1,3$, $d$, $T$, а также положительности функции $\exp$. Кроме того, поскольку величины $\mu_i$, $i=1,3$, $\mu$, $T$ фиксированы, то и величины $d_i>0$, $i=1,3$, и $d>0$, ввиду их определения, также фиксированы. Отсюда с учетом не зависящей от $k\in\mathbb{N}$ оценки (40) для элементов $\lambda_{ij}^{\{k\}}$, $i=2,3$, $i>j$, а также формулы (42) вытекает, что элементы матриц $C_k(i)$, $i=2,3$, равномерно ограничены по $k\in\mathbb{N}$, и, значит, сами эти матрицы обладают таким же свойством. Следовательно, каждая из матриц в формуле (41) определена при всяком натуральном $k$ и равномерно ограничена по $k\in\mathbb{N}$.

Рассмотрим систему

$$\dot z = C(t)z, \quad z\in\mathbb{R}^3, \quad t\geqslant 0, \tag{43}$$

в которой матрица $C$ кусочно-постоянна, причем для всех $k\in\mathbb{N}$ выполняются тождества $C(t)\equiv C_k$, $t\in((k-1)T,kT]$. Из равномерной ограниченности по $k\in\mathbb{N}$ последовательности числовых матриц (41) следует, что матрица-функция $C(t)$ является ограниченной для всех $t\geqslant0$. Кроме того, при каждом $t\geqslant0$ матрица $C(t)$ – нижнетреугольная с диагональю $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, следовательно, в силу теоремы Ляпунова о правильности треугольной системы [11, с. 37] система (43) правильна, а ее полный спектр показателей Ляпунова состоит из чисел $\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\mu_3$.

Пусть $Z(t,s)$, $t,s\geqslant0$, – матрица Коши системы (43). Тогда выполняются равенства

$$Z((k-1)T,kT)=\exp(C_k\cdot T)=$$
$$=L_k^{-1}(1)\cdot\exp\left(\operatorname{diag}(\mu_1\cdot T,\mu_2\cdot T,\mu_3\cdot T)\right)\cdot L_k(1)=$$
$$=L_k^{-1}(1)\cdot\operatorname{diag}(d_1,d_2,d_3)\cdot L_k(1)=$$
$$=\Lambda_{\boldsymbol{k}}(1)=\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{U}_1}((\boldsymbol{k}-1)\boldsymbol{T},\boldsymbol{kT})$$

в случае, когда $\mu_1\neq\mu_2\neq\mu_3$. Если же $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu$ либо $\mu_1=\mu_2\neq\mu_3$ непосредственными вычислениями проверяются соответствующие этим случаям соотношения $\exp(C_k(i)\cdot T)=\Lambda_k(i)$, $i=2,3$, из которых следуют равенства $Z((k-1)T,kT)=\exp(C_k(i)\cdot T)=$

$= \Lambda_k(i) = Y_{U_1}((k-1)T, kT), \quad i = 2, 3.$ Это означает [14], что при любых $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_3$ системы (39) и (43) асимптотически эквивалентны, и поэтому характеристические показатели этих систем равны.

Покажем, что для показателей Ляпунова $\lambda_i(A+BU), \; i = \overline{1, 3},$ системы (1) с управлением $u = U(t)x = U_1(t)O^{-1}(t)x,$ т.е. системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U_1(t)O^{-1}(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geqslant 0, \qquad (44)$$

выполняется равенство

$$\lambda_i(A+BU) = \mu_i, \quad i = \overline{1, 3}. \qquad (45)$$

Так как матрица $O(t), \; t \geqslant 0,$ – ортогональная, то матрица $O^{-1}(t), \; t \geqslant 0,$ также ортогональна и, значит, ограничена для всех $t \in [0, +\infty).$ Отсюда и из измеримости и ограниченности при всех $t \geqslant 0$ матрицы $U_1(t)$ следует, что управление $U$ также является измеримым и ограниченным, причем для любого $k \in \mathbb{N}$ при каждом $t \in [(k-1)T, kT]$ выполняется оценка $\|U(t)\| \leqslant \|U_1(t)\| \cdot \|O^{-1}(t)\| \leqslant \delta.$ Применяя к системе (44) преобразование Перрона (37′′) получим систему (39), характеристическими показателями которой являются числа $\mu_i,$ $i = \overline{1, 3}.$ Поскольку преобразование Перрона является ляпуновским, а при преобразовании Ляпунова характеристические показатели не меняются, отсюда имеем требуемые равенства (45). Теорема 3 доказана.

**Заключение.** В работе получено решение задачи глобального управления показателями Ляпунова трехмерных линейных систем (2) обыкновенных дифференциальных уравнений с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами в случае равномерной полной управляемости соответствующей линейной управляемой системы (1). Предложенный подход к решению данной задачи является достаточно сложным и объемным, однако он позволяет в дальнейшем распространить представленные результаты на четырехмерный, а возможно, и на $n$-мерный случай размерности системы (2), и, тем самым, решить задачу глобального управления характеристическими показателями Ляпунова нестационарной линейной дифференциальной системы в той изначальной формулировке, которая была впервые дана русским профессором Е.Л. Тонковым в 1975 году на IV Конференции математиков Беларуси.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф10М-032) и Министерства образования (№ госрегистрации 20130402).*

*ЛИТЕРАТУРА*

1. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: учебник / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: БГУ, 2006. – 430 с.
2. Былов, Б.Ф. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
3. Изобов, Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.А. Изобов // Итоги науки и техн. Мат. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1974. – Т. 12. – С. 71–146.
4. Тонков, Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы / Е.Л. Тонков // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 10. – С. 1804–1813.
5. Козлов, А.А. О существовании линейно-независимых направлений движения для равномерно вполне управляемой трехмерной линейной системы с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов, А.Д. Бурак // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2013. – № 3(75). – С. 29–45.
6. Макаров, Е.К. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова. – Минск: Беларус. навука, 2012. – 407 с.
7. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
8. Козлов, А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А.А. Козлов // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1319–1335.
9. Бортаковский, А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах: учеб. пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. – М.: Высш. шк., 2005. – 591 с.: ил.
10. Попова, С.Н. Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа / С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 1. – С. 41–46.
11. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
12. Попова, С.Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем / С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 8. – С. 1048–1054.
13. Попова, С.Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем / С.Н. Попова // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 12. – С. 1627–1636.
14. Макаров, Е.К. О дискретности асимптотических инвариантов линейных дифференциальных систем / Е.К. Макаров // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 10. – С. 1322–1331.

*Поступила в редакцию 15.08.2013. Принята в печать 21.10.2013*

***Адрес для корреспонденции:*** e-mail: kozlovaa@tut.by – Козлов А.А.