

УДК 51:373.5.016

## БЛОЧНОЕ ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ ТЕМЫ «ФУНКЦИИ»

**В.В. Устименко, Т.А. Александрович, Т.Б. Караулова**  
Учреждение образования «Витебский государственный  
университет имени П.М. Машерова»

*Одним из элементов системы обучения математике должен быть элемент, направленный на повторение изученного учебного материала, его дальнейшее обобщение и систематизацию, иное его изложение.*

*Цель исследования – определить содержание блочной программы повторения темы «Функции».*

**Материал и методы.** *Дидактический материал разработан авторами для экспериментального использования в профильных классах на базе ГУО «Средняя школа № 31 г. Витебска имени В.З. Хоружей». При этом применены эмпирические и логические методы исследования.*

**Результаты и их обсуждение.** *На основе анализа учебников алгебры, дидактических материалов для 7–11 классов, учебно-методической литературы, опыта работы учителей математики профильных классов и репетиторов авторы пришли к выводу, что целесообразно создать специальную программу для повторения темы «Функции». Содержание такой программы состоит из учебных блоков, где представлена значительная смысловая информация. В свою очередь, каждый учебный блок разделяется на блочные элементы, имеющие внутреннюю структуру в виде опорного и практического материалов. Опорный материал определяет основные теоретические сведения блочного элемента, а также конкретные примеры заданий с подробными решениями, предусматривающих соответствующую последовательность действий, приводящих к нужному результату. Практический материал состоит из аналогичных заданий, направленных на обобщение и систематизацию знаний, выработку умений по их выполнению. Кроме того, в процессе решения подобных примеров происходит коррекция полученных знаний, усвоение способов деятельности, контроль за их выполнением.*

**Заключение.** *Технология блочного обобщающего повторения дает возможность создать условия для развития глубоких познавательных интересов и творческих способностей учащихся.*

**Ключевые слова:** *обобщающее повторение, блочная программа, функции, преобразования графиков функции, опорный материал, практический материал.*

## BLOCK GENERALIZED REVISION OF THE TOPIC “FUNCTIONS”

**V.V. Ustimenko, T.A. Aleksandrovich, T.B. Karaulova**  
Education Establishment “Vitebsk State P.M. Masherov University”

*One of the elements of the system of teaching mathematics should be an element aimed at revising the studied academic material, its further generalization and systematization, its other presentation.*

*The purpose of the study is to determine the content of the block program for the revision of the topic “Functions”.*

**Material and methods.** *The didactic material was developed by the authors for experimental use in pre-profile classes on the basis of the State Educational Institution “V.Z. Horuzhaya Secondary School No. 31 of Vitebsk”. Empirical and logical research methods were used.*

**Findings and their discussion.** *Based on the analysis of algebra textbooks, didactic materials for grades 7–11, academic literature, the experience of mathematics teachers of specialized classes and tutors, we came to the conclusion that it would be advisable to create a special program for revising the topic “Functions”. The content of the program consists of academic blocks containing quite a lot of semantic information. In turn, each academic block is divided into block elements that have an internal structure in the form of supporting and practical materials. The supporting material determines the basic theoretical information of the block element, as well as specific examples of tasks with detailed solutions, providing for the appropriate sequence of actions leading to the desired result. Practical material consists of similar tasks aimed at generalizing and systematizing knowledge and developing skills for their implementation. In addition, in the process of solving such examples, the acquired knowledge is corrected, methods of activity are mastered, and their implementation is monitored.*

**Conclusion.** *The technology of block generalization revision makes it possible to create conditions for the development of deep cognitive interests and creative abilities of students.*

**Key words:** *generalized revision, block program, functions, transformations of function graphs, supporting material, practical material.*

**В** современной белорусской школе осуществляется перестройка математического образования, происходит модернизация по использованию традиционных методов обучения – объяснительного, иллюстративного, репродуктивного, проблемного изложения, частично-поискового, исследовательского, направленных на развитие разнообразных качеств каждого учащегося. При этом особенно важными являются способы усвоения изучаемого математического материала, реализация и развитие логических приемов познавательной деятельности.

Вместе с тем остается актуальной проблема организации повторения пройденного материала. Наряду с традиционным подходом к повторению, под которым понимается лишь точное воспроизведение того же самого, имеет место другая точка зрения на повторение, которая предусматривает видоизменение структуры и логики ранее пройденного материала, что способствует реализации внутри-предметных связей в математике.

Кроме того, повторение может реализовываться после прохождения какой-либо темы перед написанием контрольной работы, перед завершением учебного года или большого этапа обучения.

Следует также отметить, что одной из основных содержательных линий школьного курса алгебры является линия по изучению элементарных функций, их свойств и графиков, которая связывается с освоением тождественных преобразований выражений, уравнений и неравенств. Поэтому при повторении данной темы целесообразно использовать разнообразные образовательные технологии и их комбинации [1].

Цель исследования – определить содержание блочной программы повторения темы «Функции».

**Материал и методы.** Учебный материал подготовлен на основе школьных учебников по алгебре, изданных в разные годы, дополнительной литературы для школьников, абитуриентов и учителей, авторского подхода к организации повторения. Подготовленная информация была использована на уроках и факультативных занятиях в профильных классах (учителя математики Л.Э. Косенкова, А.Г. Беляева, Е.В. Тюленева) на базе ГУО «Средняя школа № 31 г. Витебска имени В.З. Хоружей», а также на занятиях по методике преподавания математики со студентами третьего и четвертого курсов факультета математики и информационных технологий ВГУ имени П.М. Машерова. При этом применялись эмпирические и логические методы исследования.

**Результаты и их обсуждение.** Выявлена классификация функций, изучаемых в школе, а также распределение содержания учебного материала по классам: 7 класс – линейная функция, 8 класс – квадратичная функция и функции  $y = \frac{k}{x}$ ,  $y = x^3$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = |x|$  9 класс – функции числового аргумента,

10 класс – тригонометрические функции и функция  $y = \sqrt[n]{x}$ , 11 класс – степенная, показательная и логарифмическая.

Методическая схема изучения функций в 7–9 классах опирается на наглядно-геометрический подход и частично аналитический к исследованию свойств функции. В 10–11 классах с возрастанием роли аналитического исследования схема изучения функций несколько изменяется.

В результате рассмотрения учебников алгебры, дидактических материалов для 7–11 классов, учебно-методической литературы, опыта работы учителей математики профильных классов и репетиторов мы пришли к выводу, что целесообразно создать специальную программу для повторения темы «Функции». Содержание такой программы состоит из учебных блоков, где представлена значительная смысловая информация [2]. В свою очередь, каждый учебный блок разделяется на блочные элементы, имеющие внутреннюю структуру в виде опорного и практического материалов.

Опорный материал определяет основные теоретические сведения блочного элемента, а также конкретные примеры заданий с подробными решениями, предусматривающих соответствующую последовательность действий, приводящих к нужному результату.

Практический материал состоит из аналогичных заданий, направленных на обобщение и систематизацию знаний, выработку умений по их выполнению. Кроме того, в процессе решения подобных примеров происходит коррекция полученных знаний, усвоение способов деятельности, контроль за их выполнением.

Блочная программа имеет следующий вид:

*Учебный блок 1.* Понятие числовой функции. Свойства числовых функций.

БЭ – 1. Понятие числовой функции. Область определения и множество значений.

БЭ – 2. Наименьшее и наибольшее значения функции.

БЭ – 3. Нули функции. Промежутки знакопостоянства.

БЭ – 4. Нечетность и четность функций.

БЭ – 5. Возрастание и убывание функций.

БЭ – 6. Периодичность функций.

*Учебный блок 2.* Основные числовые функции.

БЭ – 1. Линейная функция.

БЭ – 2. Квадратичная функция.

БЭ – 3. Функция  $y = \frac{k}{x}$ .

БЭ – 4. Функция  $y = \sqrt{x}$ .

БЭ – 5. Функция  $y = |x|$ .

БЭ – 6. Функция  $y = x^3$ .

БЭ – 7. Тригонометрические функции.

БЭ – 8. Функция  $y = \sqrt[n]{x}$ .

БЭ – 9. Степенная функция.

БЭ – 10. Функция  $y = a^x$ .

БЭ – 11. Функция  $y = \log_a x$ .

*Учебный блок 3.* Способы построения графиков функций.

БЭ – 1. График функции  $y = -g(x)$ .

БЭ – 2. График функции  $y = g(-x)$ .

БЭ – 3. График функции  $y = g(x) + c$ .

БЭ – 4. График функции  $y = g(x - a)$ .

БЭ – 5. График функции  $y = Ag(x)$ .

БЭ – 6. График функции  $y = g(kx)$ .

БЭ – 7. График функции  $y = |g(x)|$ .

БЭ – 8. График функции  $y = g(|x|)$ .

*Учебный блок 4.* Приложение.

В конце программы может быть учебный блок 4, в котором располагается материал для итогового повторения, а также приложение с решенными наиболее сложными заданиями. В предложенной программе некоторые блочные элементы можно пропускать или включить какие-либо дополнительно. Например, в учебном блоке 2 можно в 9 классе не рассматривать функции десятого и одиннадцатого классов, а в десятом профильном классе целесообразно добавить обратные тригонометрические функции.

Кроме того, работая по программе, учащийся осваивает в блочном элементе опорный и практический материалы самостоятельно. При этом учитель организует и контролирует процесс учения, консультируя при необходимости обучающегося.

Следует также отметить, что разработчики практического материала в блочном элементе могут предложить разноуровневые задания, помогающие реализовать дифференцируемый подход в обучении.

Проиллюстрируем ниже содержание учебного блока 3.

Блочный элемент 3. График функции  $y = g(x) + c$ , где  $c \neq 0$ .

Опорный материал.

Функции  $y = g(x) + c$  и  $y = g(x)$  определены на одном и том же множестве. Поэтому для любого  $x$  по ординате функции  $y = g(x)$  легко найти ординату функции  $y = g(x) + c$ , а из графика функции

$y = g(x)$  можно получить график функции  $y = g(x) + c$ . Пусть какая-то точка  $K(x_0, y_0)$  относится к графику  $y = g(x)$ . Тогда выполняется равенство  $y_0 = g(x_0)$ . Возьмем точку  $M(x_0, y_0 + b)$ , удовлетворяющую равенству  $y_0 + c = g(x_0) + c$ . Если точку  $K$  сдвинуть вдоль  $OY$  на  $c$  единиц, то попадем в точку  $M$ . При этом, если  $c > 0$ , то график сдвигаем вверх на  $c$  единиц, а если  $c < 0$ , то вниз.

С помощью данного преобразования построим графики функций  $y = x^2 - 1$  (рис. 1),  $y = |x| + 2$  (рис. 2).

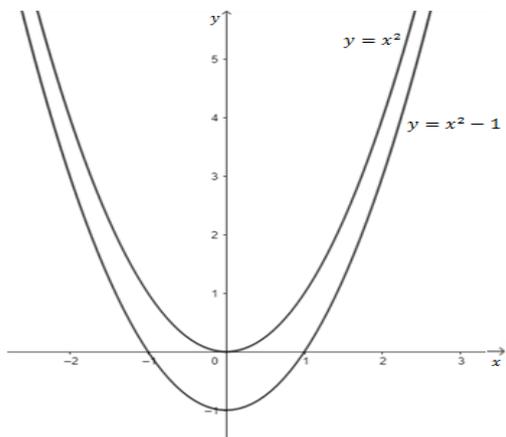


Рис. 1

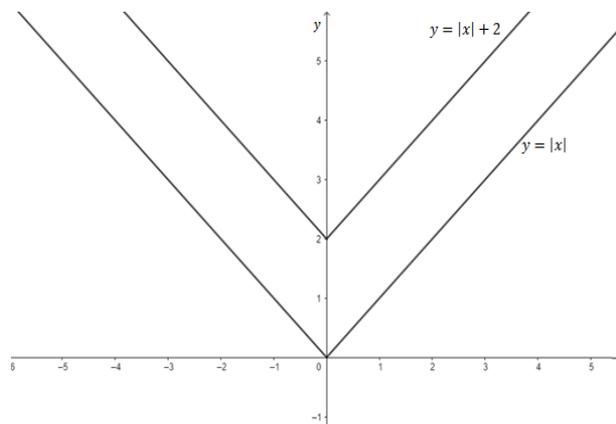


Рис. 2

Пример 1. График какой из функций получается из графика  $y = \sqrt{x}$  сдвигом на величину 4 вниз по  $OY$ : а)  $y = \sqrt{x-4}$ ; б)  $y = \sqrt{x} + 4$ ; в)  $y = \sqrt{x+4}$ ; г)  $y = \sqrt{x} - 4$ ?

Решение. В данном случае  $c = -4$ . Подходит функция  $y = \sqrt{x} - 4$ . Ответ: г).

Пример 2. На сколько единиц вдоль  $OY$  нужно сдвинуть график функции  $y = \frac{2}{x}$ , чтобы получить:

а)  $y = \frac{2}{x} + 2$ ; б)  $y = \frac{2}{x} - 5$ ?

Решение: а) на 2 единицы вверх; б) на 5 единиц вниз.

Пример 3. Если  $y = g(x) : D(y) = R$  и  $E(y) = [-2; 6]$ , то какое значение  $E(y)$  принимает для функций:

а)  $y = g(x) + 4$ ; б)  $y = g(x) - 3$ .

Решение: а) так как  $c = 4$ , то  $y = g(x)$  сдвигается вверх вдоль  $OY$  на 4 единицы, поэтому  $E(y) = [2; 10]$ ;

б) так как  $c = -3$ , то  $y = g(x)$  сдвигается вниз вдоль  $OY$  на 3 единицы, поэтому  $E(y) = [-5; 3]$ .

Пример 4. Если для функции  $y = f(x)$  выполняется условие  $f(-x) = f(x)$ , то будет ли оно выполняться для функций: а)  $y = f(x) + 6$ ; б)  $y = f(x) - 2$ ?

Решение: а) для функции  $y = f(x)$  выполнение условия означает, что ее график симметричен относительно оси  $OY$ . Поэтому график функции  $y = f(x) + 6$ , полученный сдвигом на 6 единиц вверх, также симметричен относительно  $OY$ . Следовательно, для функции  $y = f(x) + 6$  условие выполняется;

б) для функции  $y = f(x)$  выполнение условия означает, что ее график симметричен относительно оси  $OY$ . Поэтому график функции  $y = f(x) - 2$ , полученный сдвигом на 2 единицы вниз, также симметричен относительно  $OY$ . Следовательно, для функции  $y = f(x) - 2$  условие выполняется.

Практический материал для самостоятельного решения.

Задание 1. График какой из функций получается из графика  $y = x^2$  сдвигом на величину 3 вниз по  $OY$ : а)  $y = (x-3)^2$ ; б)  $y = x^2 + 3$ ; в)  $y = (x+3)^2$ ; г)  $y = x^2 - 3$ .

Задание 2. На сколько единиц вдоль  $OY$  нужно сдвинуть график функции  $y = |x|$ , чтобы получить:

а)  $y = |x| + 4$ ; б)  $y = |x| - 3$ .

Если  $y = g(x) : D(y) = \mathbb{R}$  и  $E(y) = [-2; 6]$ , то какое значение  $E(y)$  принимает для функций:

а)  $y = g(x) + 4$ ; б)  $y = g(x) - 3$ .

Задание 3. Если  $y = g(x) : D(y) = \mathbb{R}$  и  $E(y) = [-3; 5]$ , то  $E(y)$  для функций: а)  $y = g(x) + 3$ ; б)  $y = g(x) - 2$ .

Задание 4. Если для функции  $y = f(x)$  выполняется условие  $f(-x) = f(x)$ , то будет ли оно выполняться для функций: а)  $y = f(x) - 3$ ; б)  $y = f(x) + 5$ ?

Задание 5. Для функции  $y = f(x)$  с помощью преобразования  $y = f(x) + c$  постройте графики функций: а)  $y = 2x - 3$ ; б)  $y = x^3 + 2$ ; в)  $y = \frac{1}{x} - 2$ ; г)  $y = x^2 + 4$ .

Блочный элемент 4. График функции  $y = g(x - a)$ , где  $a \neq 0$ .

Опорный материал.

Пусть для  $y = g(x - a)$   $D(y)$  такова, что все значения  $(x - a)$  входят в  $D(y)$  функции  $y = g(x)$ . Для точки  $K(x_0, y_0) \in y = g(x)$  выполняется условие  $y_0 = g(x_0)$ . Точка  $K_1(x_0 + a, y_0)$  также принадлежит  $y = g(x)$ , так как выполняется равенство  $y_0 = g((x_0 + a) - a) = g(x_0)$ . Если сдвинуть точку  $K_0$  вдоль  $OX$  на величину  $a$ :  $a > 0$  – вправо,  $a < 0$  – влево на  $|a|$ , то получим точку  $K_1$ .

С помощью данного преобразования построим графики функций  $y = (x - 1)^2$  (рис. 3),  $y = |x + 2|$  (рис. 4).

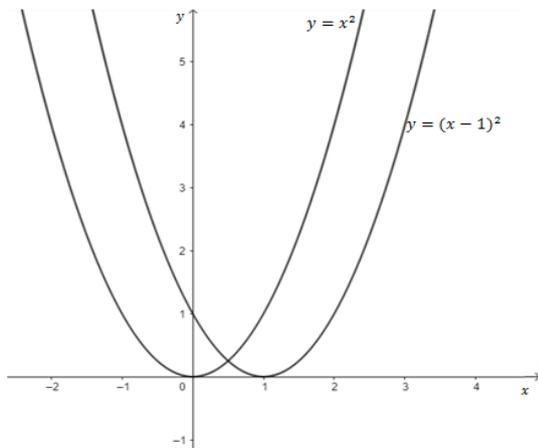


Рис. 3

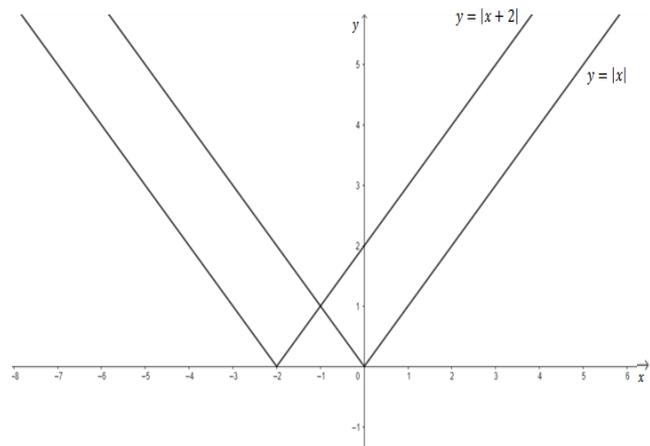


Рис. 4

Пример 1. График какой из функций получается из графика  $y = \sqrt{x}$  сдвигом на величину 4 вправо по  $OX$ : а)  $y = \sqrt{x - 4}$ ; б)  $y = \sqrt{x + 4}$ ; в)  $y = \sqrt{x + 4}$ ; г)  $y = \sqrt{x} - 4$ ?

Решение. В данном случае  $a = 4$ . Поэтому  $y = \sqrt{x - 4}$ . Ответ: а).

Пример 2. На сколько единиц вдоль  $OX$  нужно сдвинуть график функции  $y = \frac{2}{x}$ , чтобы получить график функции: а)  $y = \frac{2}{x + 2}$ ; б)  $y = \frac{2}{x - 5}$ ?

Решение: а) влево на 2 единицы; б) вправо на 5 единиц.

Пример 3. Если  $y = g(x) : D(y) = \mathbb{R}$  и  $E(y) = [0; 6]$ , то  $E(y)$  для функций: а)  $y = g(x + 4)$ ; б)  $y = g(x - 3)$ .

Решение: а) так как  $a = -4$ , то  $y = g(x)$  сдвигается влево вдоль  $OX$  на 4 единицы, поэтому  $E(y) = [0; 6]$ ;

б) так как  $a = 3$ , то  $y = g(x)$  сдвигается вправо вдоль  $OX$  на 3 единицы, поэтому  $E(y) = [0; 6]$ .

Пример 4. Найти нули функции  $y = f(x)$ , полученной из  $g(x) = 2x^2 - 2$  сдвигом его на 4 единицы вправо вдоль  $OX$ .

Решение. Нули функции  $g(x): 2x^2 - 2 = 0, x^2 = 1, x_1 = -1, x_2 = 1$ . График сдвигается на 4 единицы вправо вдоль  $OX$ , поэтому нули функции  $y = f(x): x_1 = 3, x_2 = 5$ .

Практический материал для самостоятельного решения.

Задание 1. График какой из функций получается из графика  $y = x^2$  сдвигом на величину 4 влево вдоль  $OX$ : а)  $y = (x - 4)^2$ ; б)  $y = x^2 + 4$ ; в)  $y = (x + 4)^2$ ; г)  $y = x^2 - 4$ ?

Задание 2. На сколько единиц вдоль  $OX$  нужно сдвинуть график функции  $y = \frac{3}{x}$ , чтобы получить график функции: а)  $y = \frac{3}{x - 4}$ ; б)  $y = \frac{3}{x + 2}$ ?

Задание 3. Если  $y = g(x): D(y) = R$  и  $E(y) = [-2; 4]$ , то  $E(y)$  для функций: а)  $y = g(x - 2)$ ; б)  $y = g(x + 6)$ .

Задание 4. Найти нули функции  $y = f(x)$ , полученной из  $g(x) = 2x^2 - 8$  сдвигом его на 3 единицы влево вдоль  $OX$ .

Задание 5. Для функции  $y = f(x)$  с помощью преобразования  $y = g(x - a)$  постройте графики функций: а)  $y = (x - 3)^2$ ; б)  $y = (x + 2)^3$ ; в)  $y = \sqrt{x - 2}$ ; г)  $\frac{1}{x - 3}$ .

**Заключение.** Таким образом, блочная программа предусматривает действия учащегося от теории к практике, обеспечивает переход от знаний к умениям, которые углубляются, расширяются, обобщаются с установлением более сложных взаимосвязей. Кроме того, обучаемый приобщается к активной познавательной деятельности, восстанавливая в памяти теоретический материал, выполняя задания, направленные на совершенствование усвоенных знаний, способов деятельности, на формирование качественных умений и навыков. В процессе обучения по блочной программе учащийся приобретает навыки самоконтроля, самооценки и самоопределения выбора заданий для письменного выполнения.

На наш взгляд, технология блочного обобщающего повторения дает возможность создать условия для развития глубоких познавательных интересов и творческих способностей учащихся.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Селевко, Г.К. Современные образовательные технологии: учеб. пособие / Г.К. Селевко. – М.: Народное образование, 1998. – 256 с.
2. Устименко, В.В. Методика обобщающего повторения темы «Решение рациональных неравенств» / В.В. Устименко, Т.А. Александрович // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2023. – № 3. – С. 67–73. – URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/39789>.

### REFERENCES

1. Selevko G.K. *Sovremenniy obrazovatelniye tekhnologii: ucheb. posobiye* [Modern academic technologies: Textbook], M.: Narodnoye obrazovaniye, 1998, 256 p.
2. Ustimenko V.V., Aleksandrovich T.A. *Vesnik Vitsebskaga dziazhaunaga universiteta* [Bulletin of Vitsebsk State University], 2023, 3, pp. 67–73. URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/39789>.

Поступила в редакцию 16.07.2024

Адрес для корреспонденции: e-mail: [ustimenko2904@gmail.com](mailto:ustimenko2904@gmail.com) – Устименко В.В.