

# О ФУНКТОРНО ЗАМКНУТЫХ $n$ -КРАТНО $\omega$ -КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЯХ С ДОПОЛНЯЕМОЙ ПОДФОРМАЦИЕЙ

А.П. Мехович

Учреждение образования «Витебский государственный  
университет имени П.М. Машерова»

*Рассматриваются только конечные группы. Класс групп  $\mathfrak{F}$  называется формацией, если он замкнут относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.*

*Цель статьи – найти условия, при которых  $\tau$ -замкнутая  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционная формация состоит из нильпотентных групп.*

**Материал и методы.** Используются терминология и методы теории формаций конечных групп, а также методы теории решеток классов конечных групп.

**Результаты и их обсуждение.** Доказано, что если класс  $\mathfrak{F}_p$  дополняем в решетке всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных подформаций  $\tau$ -замкнутой  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционной формации, то она состоит из нильпотентных групп.

**Заключение.** В настоящей работе определены условия, при которых функторно замкнутая  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционная формация является нильпотентной.

**Ключевые слова:** конечная группа, формация групп, дополняемая подформация,  $\tau$ -замкнутая  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционная формация групп, решетка, решетка формаций, атом решетки.

# ON FUNCTOR-CLOSED $n$ -MULTIPLE $\omega$ -COMPOSITION FORMATIONS WITH A COMPLEMENTED SUBFORMATION

A.P. Mekhovich

Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

*Only finite groups are considered. A class of groups  $\mathfrak{F}$  is called a formation if it is closed with respect to homomorphic images and finite subdirect products.*

*The purpose of the paper is to find conditions under which a  $\tau$ -closed  $n$ -multiple  $\omega$ -composition formation consists of nilpotent groups.*

**Material and methods.** Terminology and methods of the theory of finite group formations are used as well as methods of the theory of lattices of classes of finite groups.

**Findings and their discussion.** It is proved that if the class  $\mathfrak{F}_p$  is complemented in the lattice of all  $\tau$ -closed  $n$ -multiple  $\omega$ -composition subformations of a  $\tau$ -closed  $n$ -multiple  $\omega$ -composition formation, then it consists of nilpotent groups.

**Conclusion.** In the paper conditions have been defined under which a functor-closed  $n$ -multiple  $\omega$ -composition formation is nilpotent.

**Key words:** finite group, formation of groups, complemented subformation,  $\tau$ -closed  $n$ -multiple  $\omega$ -composition formation of groups, lattice, lattice of formations, atom of a lattice.

**Р**ассматриваются только конечные группы. Используется стандартная терминология. Определения и обозначения можно найти в [1–5].

Напомним, что частично упорядоченное множество, в котором для любых двух элементов существуют точная нижняя и точная верхняя грани, называется *решеткой*.

Класс групп  $\mathfrak{F}$  – *формация*, если он замкнут относительно гомоморфных образов и конечных прямых произведений, т.е. класс групп, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) если  $G \in \mathfrak{F}$  и  $N \triangleleft G$ , то  $G/N \in \mathfrak{F}$ ;
- 2) если  $G/N_1 \in \mathfrak{F}$  и  $G/N_2 \in \mathfrak{F}$ , то  $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}$ .

Методы общей теории решеток широко используются при исследовании классов конечных групп. В теории формаций конечных групп впервые это было осуществлено А.Н. Скибой в 1986 г. Важные результаты о решеточных свойствах формаций получены Л.А. Шеметковым, А.Н. Скибой, В.Г. Сафоновым, Н.Н. Воробьевым, А.А. Царевым, В.А. Ведерниковым, Н.Г. Жевновой, И.П. Шабалиной, И.М. Близнацом, М.В. Задорожнюк, П.А. Жизневским и др.

Пусть  $\mathfrak{X}$  – произвольная непустая совокупность групп. Пересечение всех формаций, содержащих  $\mathfrak{X}$ , обозначают  $\text{form}\mathfrak{X}$  и называют *формацией, порожденной  $\mathfrak{X}$* . В частности, пишут  $\text{form}G$  в случае, когда  $\mathfrak{X} = \{G\}$ . Всякая формация данного вида называется *однопорожденной формацией* (см. [1]). Напомним, что подформация  $\mathfrak{M}$  формации  $\mathfrak{F}$  называется *дополняемой* в  $\mathfrak{F}$  [6], если  $\mathfrak{M}$  дополняема в решетке подформаций формации  $\mathfrak{F}$ , т.е. если в  $\mathfrak{F}$  имеется такая подформация  $\mathfrak{H}$  (*дополнение* к  $\mathfrak{M}$  в  $\mathfrak{F}$ ), что

$$\mathfrak{F} = \text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1).$$

В [7] А.Н. Скиба дал полное описание локальных формаций с дополняемыми локальными подформациями. В частности, было доказано, что локальная формация нильпотентна, если в ней дополняемы все подформации вида  $\mathfrak{N}_p$ .

В настоящей работе доказан аналог вышеуказанного результата в теории  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций.

Цель статьи – найти условия, при которых  $\tau$ -замкнутая  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционная формация состоит из нильпотентных групп.

**Материал и методы.** Используются терминология и методы теории формаций конечных групп, а также методы теории решеток классов конечных групп.

**Результаты и их обсуждение.** Пусть со всякой группой  $G$  сопоставлена некоторая система ее подгрупп  $\tau(G)$ . Говорят, что  $\tau$  – подгрупповой функтор (в терминологии А.Н. Скибы) [1], если выполняются следующие условия:

- 1)  $G \in \tau(G)$ ;
- 2) для любого эпиморфизма  $\varphi: A \rightarrow B$  и для любых групп  $H \in \tau(A)$  и  $T \in \tau(B)$  имеет место  $H^\varphi \in \tau(B)$  и  $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$ .

Рассматриваются лишь такие подгрупповые функторы  $\tau$ , что для любой группы  $G$  все подгруппы, входящие в  $\tau(G)$ , субнормальны в  $G$ . Формация  $\mathfrak{F}$  называется  $\tau$ -замкнутой, если  $\tau(G) \in \mathfrak{F}$  для любой ее группы  $G$  из  $\mathfrak{F}$  [1]. Подгрупповой функтор  $\tau$  называется замкнутым [1], если  $H \in \tau(G)$  всегда влечет  $\tau(H) \subseteq \tau(G)$ . Если  $\tau$  – подгрупповой функтор, то символом  $\bar{\tau}$  обозначают пересечение всех таких замкнутых функторов  $\tau_i$ , что  $\tau \leq \tau_i$ .

Для любой совокупности групп  $\mathfrak{X}$  через  $S_{\tau}\mathfrak{X}$  обозначают множество всех таких групп  $H$ , что  $H \in \tau(G)$  для некоторой группы  $G \in \mathfrak{X}$  (см. [1]).

Пересечение всех  $\tau$ -замкнутых полуформаций, содержащих данную совокупность групп  $\mathfrak{X}$ , называют  $\tau$ -замкнутой *полуформацией, порожденной  $\mathfrak{X}$*  [1].

В дальнейшем символ  $\omega$  обозначает некоторое непустое множество простых чисел,  $\omega' = \mathbf{P} \setminus \omega$ . Через  $\pi(G)$  обозначено множество всех различных простых делителей порядка группы  $G$ ,  $\pi(\mathfrak{X})$  – объединение множеств  $\pi(G)$  для всех групп  $G$  из совокупности групп  $\mathfrak{X}$ . Символами  $R_{\omega}(G)$ ,  $C^p(G)$  обозначаются соответственно наибольшая нормальная разрешимая  $\omega$ -подгруппа группы  $G$  и пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы  $G$ , у которых композиционные факторы имеют простой порядок  $p$ . Через  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{N}_p$ ,  $\text{Com}(\mathfrak{X})$  обозначают соответственно класс всех нильпотентных групп, класс всех  $p$ -групп и класс всех простых абелевых групп  $A$  таких, что  $A \cong H/K$  для некоторого композиционного фактора  $H/K$  группы  $G \in \mathfrak{X}$ .

Пусть  $f$  – произвольная функция вида

$$f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}. \quad (*)$$

Следуя [4], сопоставим функции  $f$  вида (\*) класс групп

$$CF_{\omega}(f) = (G \mid G/R_{\omega}(G) \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G))).$$

Если формация  $\mathfrak{F}$  такова, что  $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$  для некоторой функции  $f$  вида (\*), то  $\mathfrak{F}$  называется  $\omega$ -композиционной формацией с  $\omega$ -композиционным спутником  $f$  [4].  $\omega$ -Композиционный спутник  $f$  формации  $\mathfrak{F}$  называется *внутренним*, если каждое его значение является подформацией формации  $\mathfrak{F}$ .

Согласно концепции кратной локализации, предложенной А.Н. Скибой [4], всякая формация считается  $0$ -кратно  $\omega$ -композиционной, а при  $n > 0$  формация  $\mathfrak{F}$  называется  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционной, если  $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$ , где все непустые значения  $\omega$ -композиционного спутника  $f$  являются  $(n-1)$ -кратно  $\omega$ -композиционными формациями.

Непустая совокупность классов групп  $\Theta$  называется *полной решеткой классов* [1], если пересечение любой совокупности классов из  $\Theta$  снова принадлежит  $\Theta$ , и во множестве  $\Theta$  имеется такой класс  $\mathfrak{F}$ , что  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$  для любого другого класса  $\mathfrak{H} \in \Theta$ .

Для доказательства основного результата нам потребуются следующие леммы.

**Лемма 1** [5, теорема 1.6.3]. *Совокупность всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций  $s_{\omega_n}^{\tau}$  является полной решеткой формаций, в которой наибольшим элементом является класс всех групп  $\mathfrak{G}$ , а для произвольного множества  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций  $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$*

$$\Lambda_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \text{ — точная нижняя грань и}$$

$$V_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \text{ — точная верхняя грань.}$$

**Лемма 2.** *Пусть  $\mathfrak{X}$  – непустая совокупность групп,  $\Theta$  – полная решетка формаций. Тогда*

$$\Theta\text{form}(\mathfrak{X}) = \Theta\text{form}(\text{form}(\mathfrak{X})).$$

**Доказательство.** Наименьшей (по включению) формацией, содержащей совокупность групп  $\mathfrak{X}$ , является формация  $\text{form}(\mathfrak{X})$  [8, с. 25], т.е.

$$(\mathfrak{X}) \subseteq \text{form}(\mathfrak{X}).$$

Пересечение всех  $\Theta$ -формаций, содержащих формацию  $\text{form}(\mathfrak{X})$ , также содержит совокупность групп  $\mathfrak{X}$ , т.е.

$$(\mathfrak{X}) \subseteq \Theta\text{form}(\text{form}(\mathfrak{X})).$$

Но наименьшей  $\Theta$ -формацией, содержащей совокупность групп  $\mathfrak{X}$ , является формация  $\Theta\text{form}(\mathfrak{X})$ . Поэтому

$$\Theta\text{form}(\mathfrak{X}) \subseteq \Theta\text{form}(\text{form}(\mathfrak{X})).$$

Докажем обратное включение. Поскольку наименьшая формация, содержащая совокупность групп  $\mathfrak{X}$ , содержится в любой  $\Theta$ -формации, содержащей совокупность групп  $\mathfrak{X}$ , то имеет место включение

$$\text{form}(\mathfrak{X}) \subseteq \Theta\text{form}(\mathfrak{X}).$$

Последнее означает, что  $\Theta\text{form}(\mathfrak{X})$  – одна из  $\Theta$ -формаций, содержащая  $\text{form}(\mathfrak{X})$ . Поэтому она будет содержать и наименьшую  $\Theta$ -формацию, содержащую  $\text{form}(\mathfrak{X})$ , т.е.

$$\Theta\text{form}(\text{form}(\mathfrak{X})) \subseteq \Theta\text{form}(\mathfrak{X}).$$

Таким образом,

$$\Theta \text{form}(\mathfrak{X}) = \Theta \text{form}(\text{form}(\mathfrak{X})).$$

Лемма доказана.

**Лемма 3** [1, лемма 1.2.22]. Для любой совокупности групп  $\mathfrak{X}$  справедливо равенство

$$\tau \text{form} \mathfrak{X} = \text{QR}_0 S \bar{\tau}(\mathfrak{X}).$$

**Лемма 4** [3, лемма 2.4]. Справедливо равенство  $\text{QR}_0 Q = \text{QR}_0$ .

Класс групп  $\mathfrak{F}$  называется *полуформацией*, если  $\mathfrak{F} = Q\mathfrak{F}$  [1].

**Лемма 5** [1, лемма 1.2.21]. Пусть  $\mathfrak{F}$  –  $\tau$ -замкнутая полуформация, порожденная совокупностью групп  $\mathfrak{X}$ . Тогда  $\mathfrak{F} = \text{QS} \bar{\tau}(\mathfrak{X})$ .

Если  $\mathfrak{F}$  –  $\tau$ -замкнутая  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционная формация, то символом  $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$  обозначают решетку всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных подформаций формации  $\mathfrak{F}$ , а через  $c_{\omega_n}^{\tau}$  – решетку всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций.

**Лемма 6** [9, лемма 9]. Пусть  $A$  – монолитическая группа с неабелевым монолитом  $R$ ,  $\mathfrak{M}$  – некоторая  $\tau$ -замкнутая полуформация и  $A \in c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} \mathfrak{M}$ , где  $n \geq 0$ . Тогда  $A \in \mathfrak{M}$ .

Элемент  $a$  решетки  $L$  с нулем называется *атомом*, если для любого  $x \in L$  из  $0 < x \leq a$  следует, что  $x = a$  (см., например, [10]).

**Лемма 7.** Пусть  $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} G$  – однопорожденная  $\tau$ -замкнутая  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционная формация. Тогда у решетки  $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$  имеется лишь конечное число атомов.

**Доказательство.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – атом решетки  $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$ . Тогда  $\mathfrak{M} = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} A$  для некоторой простой группы  $A$ . Пусть  $A$  – неабелева группа. Так как  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ , то  $A \in \mathfrak{F} = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} G$ . По лемме 1  $c_{\omega_n}^{\tau}$  – полная решетка. Следовательно, по лемме 2

$$c_{\omega_n}^{\tau} \text{form}(G) = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form}(\text{form}(G)).$$

Тогда согласно лемме 3,

$$c_{\omega_n}^{\tau} \text{form}(\text{form}(G)) = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form}(\text{QR}_0(G)).$$

В силу леммы 4

$$\begin{aligned} c_{\omega_n}^{\tau} \text{form}(\text{QR}_0(G)) &= c_{\omega_n}^{\tau} \text{form}(\text{QR}_0 Q(G)) = \\ &= c_{\omega_n}^{\tau} \text{form}(Q(\text{R}_0 Q(G))) = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form}(Q(\text{R}_0(Q(G)))) = \\ &= c_{\omega_n}^{\tau} \text{form}(Q(\text{R}_0(\mathfrak{F}))) = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form}(\text{QR}_0(\mathfrak{F})), \end{aligned}$$

где, согласно лемме 5,  $\mathfrak{F} = Q(G)$  – полуформация, порожденная группой  $G$ . Ввиду лемм 2 и 3 имеет место равенство

$$c_{\omega_n}^{\tau} \text{form}(\text{QR}_0 \mathfrak{F}) = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form}(\text{form} \mathfrak{F}) = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} \mathfrak{F}.$$

Итак,  $A \in c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} \mathfrak{F}$ . Поскольку  $A$  – простая группа, то  $A$  – монолитическая группа с неабелевым монолитом  $\text{Soc}(A) = A$ . Следовательно, по лемме 6  $A \in \mathfrak{F} = Q(G)$ . Это означает, что в решетке  $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$  имеется лишь конечное число неразрешимых атомов.

Пусть  $|A| = p$  – простое число, где  $p \in \pi = \pi(G)$ . Нетрудно показать, что класс всех  $\pi$ -групп  $\mathfrak{G}_{\pi}$  является  $\tau$ -замкнутой  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционной формацией. Тогда из  $A \in \mathfrak{G}_{\pi}$  следует, что

$$\mathfrak{M} = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form} A \subseteq \mathfrak{G}_{\pi}.$$

Но  $\pi$  – конечное множество. Поэтому в  $\mathfrak{G}_{\pi}$  имеется лишь конечное число  $\omega$ -композиционных подформаций, порожденных простой группой  $A$  порядка  $p \in \pi = \pi(G)$ . Это означает, что в решетке  $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$  имеется лишь конечное число разрешимых атомов. Лемма доказана.

**Лемма 8** [11, теорема 3.1]. Решетка всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций алгебраична и модулярна.

Непосредственно из леммы 8 вытекает

**Лемма 9.** Любая  $\tau$ -замкнутая  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционная формация есть решеточное объединение своих однопорожденных  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных подформаций.

Следующая лемма дает способ построения минимального  $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$ -значного спутника формации  $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form } \mathfrak{X}$ .

**Лемма 10** [9, лемма 8]. Пусть  $\mathfrak{X}$  – непустая совокупность групп,  $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form } \mathfrak{X}$ , где  $n \geq 1$ ,  $\pi = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{X}))$ , и пусть  $f$  – минимальный  $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$ -значный  $\omega$ -композиционный спутник формации  $\mathfrak{F}$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1)  $f(\omega') = c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{form}(G / R_{\omega}(G)) \mid G \in \mathfrak{X}$ ;
- 2)  $f(p) = c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{form}(G / C^p(G)) \mid G \in \mathfrak{X}$  для всех  $p \in \pi$ ;
- 3)  $f(p) = \emptyset$  для всех  $p \in \omega \setminus \pi$ ;
- 4) если  $\mathfrak{F} = CF_p(h)$  и спутник  $h$   $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$ -значен, то для всех  $p \in \pi$  имеют место

$$f(p) = c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1)$$

и

$$f(\omega') = c_{\omega_{n-1}}^{\tau} \text{form}(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_{\omega}(G) = 1).$$

Для произвольной совокупности групп  $\mathfrak{X}$  и простого числа  $p$  полагают (см. [5]):

$$\mathfrak{X}(C^p) = \begin{cases} \text{form}(G / C^p \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{X})), \\ \emptyset, & \text{если } p \in \mathbf{P} \setminus (\omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{X}))). \end{cases}$$

Если  $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(F)$ , где  $F(\omega') = \mathfrak{F}$  и  $F(p) = \mathfrak{X}_p \mathfrak{F}(C^p)$  для всех  $p \in \omega$ , то спутник  $F$  называется каноническим  $\omega$ -композиционным спутником формации  $\mathfrak{F}$ . Если  $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(F)$  и  $f$  – произвольный внутренний  $\omega$ -композиционный спутник формации  $\mathfrak{F}$ , то  $f \leq F$  (см. [5], замечание 1.2.39).

**Лемма 11** [4, замечание 1]. Любая  $\omega$ -композиционная формация обладает каноническим  $\omega$ -композиционным спутником.

Пусть  $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$  – произвольная система непустых классов групп такая, что для любых двух различных  $i, j \in I$  имеет место  $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ . Символом  $\bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$  обозначают [1] класс всех групп вида  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$ , где  $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$ ,  $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}$ , ...,  $A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$  для некоторых  $i_1, i_2, \dots, i_t \in I$ .

**Лемма 12** [5, теорема 1.6.2]. Пусть  $\mathfrak{F}$  –  $\omega$ -композиционная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если  $\mathfrak{F}$  имеет  $\tau$ -значный  $\omega$ -композиционный спутник, то  $\mathfrak{F}$  –  $\tau$ -замкнутая формация;
- 2) если  $\mathfrak{F}$  –  $\tau$ -замкнутая формация, то ее канонический  $\omega$ -композиционный спутник является  $\tau$ -значным.

**Лемма 13** [1, теорема 4.3.2]. Пусть  $\mathfrak{M}$  – непустая подформация формации  $\mathfrak{F}$ . Тогда если  $\mathfrak{H}$  – дополнение  $\mathfrak{M}$  к  $\mathfrak{F}$ , то  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H}$ .

**Лемма 14** [12, теорема]. Пусть  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H}$  для некоторых формаций  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{H}$  таких, что  $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \emptyset$ . Тогда формация  $\mathfrak{F}$   $\tau$ -замкнута  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционна в том и только в том случае, когда  $\tau$ -замкнута  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционна каждая из формаций  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{H}$ .

**Лемма 15** [1, лемма 4.3.4]. Пусть  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2$  и  $\mathfrak{M}$  – непустая подформация формации  $\mathfrak{F}$ . Тогда  $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_1) \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_2)$ .

Для  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{H}$  полагают

$$\mathfrak{M} \vee_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{H} = c_{\omega_n}^{\tau} \text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

**Теорема.** Пусть  $\mathfrak{F}$  –  $\tau$ -замкнутая  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционная формация. Тогда если формация  $\mathfrak{N}_p$  дополняема в решетке  $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$  для каждого  $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{F}))$ , то  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ .

**Доказательство.** По лемме 9 любая  $\tau$ -замкнутая  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционная формация есть объединение (в решетке  $C_{\omega_n}^{\tau}$ ) своих однопорожденных  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных подформаций, т.е.

$$\mathfrak{F} = C_{\omega_n}^{\tau} \text{form}(\bigcup_{G \in \mathfrak{F}} C_{\omega_n}^{\tau} \text{form} G).$$

Значит, для доказательства теоремы достаточно показать, что она справедлива для любой однопорожденной  $\tau$ -замкнутой  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционной подформации  $\mathfrak{M}$  из  $\mathfrak{F}$ .

По лемме 10 формация  $\mathfrak{M}$  обладает минимальным  $C_{\omega_{n-1}}^{\tau}$ -значным спутником  $m$ . Тогда если  $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{M}))$ , то в силу лемм 11 и 12 выполняется

$$\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p m(p) = M(p) \subseteq \mathfrak{M},$$

где  $M$  – канонический  $C_{\omega_{n-1}}^{\tau}$ -значный спутник формации  $\mathfrak{M}$ . Покажем, что подформация  $\mathfrak{N}_p$  дополняема в решетке  $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{M})$ . Нулем этой решетки является формация единичных групп, единицей – формация  $\mathfrak{M}$ . По условию теоремы в решетке  $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$  найдется дополнение  $\mathfrak{H}$  к  $\mathfrak{N}_p$ . Нулем решетки  $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$  является формация единичных групп, единицей – формация  $\mathfrak{F}$ . Тогда

$$\mathfrak{F} = C_{\omega_n}^{\tau} \text{form}(\mathfrak{N}_p \cup \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p V_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{H} \text{ и } \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{H} = (1).$$

Согласно леммам 13 и 14

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}$$

и формации  $\mathfrak{N}_p$  и  $\mathfrak{H}$  –  $\tau$ -замкнутые  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционные. Поэтому по лемме 15

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}) = \\ &= (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p) \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \\ &= \mathfrak{N}_p V_{\omega_n}^{\tau} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}). \end{aligned}$$

Поскольку  $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{H} = (1)$ , то

$$\mathfrak{N}_p \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = (1).$$

Следовательно,  $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$  – дополнение к  $\mathfrak{N}_p$  в  $\mathfrak{M}$ , т.е. формация  $\mathfrak{N}_p$  дополняема в решетке  $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{M})$ .

Покажем теперь, что  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ . Согласно лемме 7 в  $\mathfrak{M}$  имеется лишь конечное число подформаций, являющихся атомами решетки  $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{M})$ . Пусть число атомов решетки  $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{M})$  равно  $k$ . Проведем индукцию по  $k$ . Согласно леммам 13 и 14

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$$

и формация  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$  –  $\tau$ -замкнутая  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционная. Заметим, что поскольку один из атомов  $\mathfrak{N}_p$  решетки  $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{M})$  не содержится в  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ , то в решетке  $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$  число атомов меньше, чем  $k$ .

Если  $k = 1$ , то в решетке  $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{M})$  имеется лишь один атом. Но в решетке  $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$  атомов меньше  $k = 1$ , т.е. в решетке  $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$  нет атомов. Последнее возможно лишь в случае, когда  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ . Поэтому

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \text{form}(\mathfrak{N}_p \cup (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})) = \text{form} \mathfrak{N}_p = \mathfrak{N}_p.$$

Следовательно, любая группа из  $\mathfrak{M}$  нильпотентна, т.е.  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ .

Предположим теперь, что  $k > 1$  и утверждение теоремы верно для всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций, у которых решетка  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных подформаций имеет число атомов меньше, чем  $k$ . В этом случае утверждение для формации  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$  верно по индукции. Но  $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ . Поэтому каждая группа  $G$  из  $\mathfrak{M}$  имеет вид:

$$G = A \times B,$$

где  $A \in \mathcal{R}$ ,  $B \in \mathcal{M} \cap \mathcal{F}$ . Значит, утверждение теоремы выполняется для однопорожденной формации  $\mathcal{M}$ . Итак, утверждение теоремы выполняется и для формации  $\mathcal{F} = c_{\omega_n}^t \text{form}(\bigcup_{G \in \mathcal{F}} c_{\omega_n}^t \text{form} G)$ , т.е.  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{N}$ . Теорема доказана.

**Заключение.** В настоящей работе определены условия, при которых функторно замкнутая  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционная формация является нильпотентной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
2. Doerk, K. Finite soluble groups. De Gruyter Expo. Math., 4 / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p.
3. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).
4. Скиба, А.Н. Кратно  $\mathcal{F}$ -композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский математический журнал. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
5. Воробьев, Н.Н. Алгебра классов конечных групп: монография / Н.Н. Воробьев. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. – 322 с.
6. Скиба, А.Н. О формациях с заданными системами подформаций / А.Н. Скиба // Подгрупповое строение конечных групп: тр. Гомел. семинара / Ин-т математики АН БССР; под ред. В.С. Монахова. – Минск, 1981. – С. 155–180.
7. Скиба, А.Н. О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями / А.Н. Скиба // Известия вузов. Серия: Математика. – 1994. – № 10(389). – С. 75–80.
8. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1989. – 256 с.
9. Tsarev, A.A. On a question of the theory of partially composition formations / A.A. Tsarev, N.N. Vorob'ev // Algebra Colloquium. – 2014. – Vol. 21, № 3. – P. 437–447.
10. Владимиров, Д.А. Булевы алгебры / Д.А. Владимиров. – М.: Наука, 1969. – 320 с.
11. Воробьев Н.Н. О модулярности решетки  $t$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Украинский математический журнал. – 2010. – Т. 62, № 4. – С. 453–463.
12. Мехович, А.П. Прямые разложения  $t$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций / А.П. Мехович // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2012. – № 1. – С. 49–53.

## REFERENCES

1. Skiba A.N. *Algebra formatsiy* [Algebra of Formations], Minsk: Belaruskaya navuka, 1997, 240 p.
2. Doerk, K. Finite soluble groups. De Gruyter Expo. Math., 4 / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter & Co., 1992, 891 p.
3. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of Finite Groups], Moscow: Nauka, 1978, 272 p. – (Sovremennaya algebra).
4. Skiba A.N., Shemetkov L.A. *Ukrainskiy Matem. Zhurn.* [Ukrainian Mathematical Journal], 2000, 52(6), pp. 783–797.
5. Vorobyev N.N. *Algebra klassov konechnykh grupp: monografiya* [Algebra of Classes of Finite Groups: Monograph], Vitebsk: VGU, 2012, 322 p.
6. Skiba, A.N. *Podgruppovoye stroeniye konechnykh grupp: Trudy Gomelskogo seminar* [Subgroup Structure of Finite Groups: Proceedings of Gomel Seminar / Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the BSSR], Minsk, 1981, pp. 155–180.
7. Skiba A.N. *Izvestiya vuzov. Ser. Matematika* [Journal of Universities. Mathematics], 1994, 10(389), p. 75–80.
8. Shemetkov L.A., Skiba A.N. *Formatsii algebraicheskikh sistem* [Formations of algebraic systems]. Moscow: Nauka, 1989, 256 p.
9. Vorobyev N.N., Tsarev A.A. *Algebra Colloquium*, 2014, 21(3), pp. 437–447.
10. Vladimirov D.A. *Boolevy algebrs* [Boolean Algebras], Moscow: Nauka, 1969, 320 p.
11. Vorobyev N.N., Tsarev A.A. *Ukrainskiy Matem. Zhurn.* [Ukrainian Mathematical Journal], 2010, 62(4), p. 453–463.
12. Mekhovich A.P. *Vestsy NAN Belarusi. Ser. fiz.-matem. nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics], 2012, 1, pp. 49–53.

Поступила в редакцию 26.11.2024

Адрес для корреспонденции: e-mail: mekhovichap@vsu.by – Мехович А.П.