МАТЭМАТЫКА

УДК 517.956.32

ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ДВУХСКОРОСТНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА КОНЦЕ

Ф.Е. Ломовцев, В.В. Лысенко
Белорусский государственный университет

Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны состоит из трех этапов. В данной работе будет произведен второй этап для неоднородного двухскоростного уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарных и нехарактеристических вторых частных производных в граничном условии.

Цель исследования – установить физико-геометрическую интерпретацию классических решений линейной начально-граничной задачи для неоднородного двухскоростного уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарных и нехарактеристических вторых частных производных в граничном условии.

Материал и методы. *Материалом служит линейная начально-граничная задача для общего неоднородного двухскоростного волнового уравнения колебаний полуограниченной струны при зависящих от времени коэффициентах и нехарактеристических вторых частных производных в граничном режиме.*

Результаты и их обсуждение. *Изложена физико-геометрическая интерпретация классических решений линейной начально-граничной задачи для неоднородного двухскоростного волнового уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарных и нехарактеристических вторых частных производных в граничном режиме. Полученные результаты дают возможность произвести вывод результатов решения и исследования корректности по Адамару линейной начально-граничной задачи для неоднородного двухскоростного волнового уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарных и нехарактеристических вторых производных в граничном режиме.*

Заключение. *Таким образом, изложена физико-геометрическая интерпретация классических решений линейной начально-граничной задачи для неоднородного двухскоростного волнового уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарных и нехарактеристических вторых частных производных в граничном режиме.*

Ключевые слова: *начально-граничная задача, нестационарный граничный режим, нехарактеристические вторые производные, физико-геометрическая интерпретация, вспомогательная задача.*

PHYSICAL AND GEOMETRIC INTERPRETATION OF CLASSICAL SOLUTIONS OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN INHOMOGENEOUS TWO-RATE WAVE EQUATION WITH NONSTATIONARY NONCHARACTERISTIC SECOND DERIVATIVES AT THE END

F.E. Lomovtsev, V.V. Lysenko
Belarusian State University

The method of auxiliary mixed problems for a semi-infinite string consists of three stages. In this paper, the second stage will be performed for the inhomogeneous two-rate oscillation equation of a semi-infinite string with nonstationary and noncharacteristic second partial derivatives in the boundary condition.

The aim of the work is to establish a physical and geometric interpretation of classical solutions of the linear initial-boundary value problem for an inhomogeneous two-speed equation of oscillations of a semi-bounded string with nonstationary and non-characteristic second partial derivatives in the boundary condition.

Material and methods. *The material is a linear initial-boundary value problem for the general inhomogeneous two-rate oscillation equation of a semi-infinite string with time-dependent coefficients and noncharacteristic second partial derivatives in the boundary regime.*

Findings and their discussion. *The paper presents a physical and geometric interpretation of classical solutions of a linear initial-boundary value problem for an inhomogeneous two-rate wave oscillation equation of a semi-infinite string with non-stationary and noncharacteristic second partial derivatives in the boundary mode. The obtained results make it possible to derive a conclusion based on the results of the resolution and study the Hadamard correctness of the linear initial-boundary value problem for an inhomogeneous two-rate wave equation of a semi-infinite string with nonstationary and noncharacteristic second derivatives in the boundary mode.*

Conclusion. *The paper presents a physical and geometric interpretation of classical solutions of a linear initial-boundary value problem for an inhomogeneous two-rate wave equation of oscillations of a semi-bounded string with nonstationary and noncharacteristic second partial derivatives in the boundary regime.*

Key words: *initial-boundary value problem, nonstationary boundary regime, noncharacteristic second derivatives, physical and geometric interpretation, auxiliary problem.*

Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны. Явные рекуррентные формулы классического решения вместе с необходимыми и достаточными условиями корректной везде разрешимости начально-граничной (смешанной) задачи для неоднородного двухскоростного уравнения колебаний ограниченной струны при нестационарных (зависящих от времени) нехарактеристических (направленных не по характеристикам волнового уравнения) вторых частных производных в граничных режимах имеются в [1; 2]. Эти результаты получены методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны, предложенным Ф.Е. Ломовцевым в [3]. Указанный метод не требует каких-либо явных продолжений исходных данных (правой части уравнения, начальных и граничных данных) смешанных задач вне множеств их первоначального задания. Алгоритм предложенного метода нахождения классических решений и необходимых и достаточных условий на все исходные данные везде корректной разрешимости смешанных задач для неоднородных уравнений колебаний ограниченной струны в верхней полуполосе плоскости $Q=[0,d]\times[0,+\infty[$ включает следующие три этапа:

1. *Постановка, решение и исследование соответствующих вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны в четверти плоскости* $G_\infty=[0,+\infty[\times[0,+\infty[$. На этом вспомогательном этапе смешанные задачи для полуограниченной струны явно решаются и исследуются в основном известными «методом характеристик» в случае постоянных скоростей $a_1=const, a_2=const$ волновых уравнений [4] и новым «методом неявных характеристик» в случае одной переменной скорости $a_1(x,t)=a_2(x,t)$ [5] и двух переменных скоростей $a_1(x,t)\neq a_2(x,t)$ волновых уравнений [6]. Мы получаем критерии корректности по Адамару (необходимые и достаточные условия) на все исходные

данные (правую часть уравнений, начальные и граничные данные) вспомогательных смешанных задач с их явными формулами классических решений в G_∞.

2. *Физико-геометрическая интерпретация решений вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны в четверти плоскости.* На данном промежуточном этапе проводится физико-геометрическая интерпретация классических решений вспомогательных смешанных задач с целью поиска их множества зависимости, т.е. множества изменения независимых переменных в исходных данных задач и коэффициентах уравнения и краевых условий. В ней определяющей составляющей является геометрическая интерпретация решений, в которой нуждается решение и исследование корректности по Адамару смешанных задач о колебаниях ограниченной струны с помощью результатов исследования вспомогательных смешанных задач о колебаниях полуограниченной струны. Ниже на основе теоремы 1 доказываются теоремы 2 и 3, которые подтверждают применимость этого нового метода в работах [1; 2]. Если же, в отличие от теорем 2 и 3, значение решения вспомогательной смешанной задачи не во всех точках четверти плоскости однозначно определяется значениями исходных данных задачи и зависящих от времени коэффициентов граничных режимов, то для применения указанного выше нового метода Ф.Е. Ломовцева требуется дополнительный анализ на однозначность множества зависимости решения. Физико-геометрическая интерпретация классических решений вспомогательной начально-граничной задачи для волнового уравнения с одной скоростью $a_1 = a_2 = const$ при нестационарной нехарактеристической первой косой производной на конце полуограниченной струны приведена в [7, л. 55–60]. Если даже в некоторых работах физико-геометрическая интерпретация классических решений смешанных задач для волновых уравнений явно не проводится, то фактически она обязательно используется при выводе критериев корректности этих смешанных задач и их явных формул решений.

3. *Вывод результатов решения и исследования основных смешанных задач для ограниченной струны из результатов решения и исследования вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны.* На этом заключительном этапе полуполоса плоскости Q заменяется пределом последовательности прямоугольников $Q_n = [0,d]\times[0,d_{n+1}], n=1,2,...,$ расширяющихся по t при $d_{n+1}\to+\infty$. Сначала с помощью второго этапа выводятся формулы классических решений и критерии корректности по Адамару основных смешанных задач для ограниченной струны в первом прямоугольнике Q_1 путем сужений на Q_1 классических решений и критериев корректности вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны в четверти плоскости. Затем строятся рекуррентные формулы классических решений и критерии корректной везде разрешимости основных смешанных задач для ограниченной струны в остальных прямоугольниках Q_n и проводится их доказательство методом математической индукции. Здесь нужны только неявные продолжения исходных данных смешанных задач для обоснования единственности решений и необходимости критериев корректности. Для наших смешанных задач на отрезке из работ [1; 2] такие неявные продолжения строятся аналогично первой смешанной задаче на отрезке в [8]. Полученные в [1; 2] рекуррентные (по начальным данным вдоль временной оси Ot) формулы классических решений смешанных задач для ограниченной струны методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны предпочтительнее известных формул классических решений различных смешанных задач для ограниченной струны других авторов с периодически и иным образом продолженными (вдоль вещественной оси Ox) правой частью и начальными данными. Наши статьи [1; 2] имеют полный, окончательный и не улучшаемый критерий корректности по Адамару (необходимые и достаточные условия) на все исходные данные (правую часть уравнений, начальные и граничные данные) смешанных задач, а работы других авторов содержат только достаточные условия корректности или необходимые и достаточные условия на некоторые исходные данные смешанных задач. Теоремы корректности с полными, окончательными и не улучшаемыми критериями корректности по Адамару смешанных задач мы называем глобальными [8].

Материал и методы. В случае нехарактеристических первых и вторых косых производных в граничных условиях на конце полуограниченной струны критерии корректности смешанных задач не зависят от младшей части общего двухскоростного волнового уравнения, т.е. от коэффициентов b_1 и b_2 волновых уравнений соответственно из [7] и [1]. Поэтому можно находить физико-геометрическую интерпретацию классических решений этих нехарактеристических смешанных задач только для главной части волнового уравнения, так как из полученной физико-геометрической интерпретации легко выводится аналогичная физико-геометрическая интерпретация для общего волнового уравнения с младшей частью.

Решена следующая вспомогательная смешанная задача с нехарактеристическими вторыми частными производными на конце полуограниченной струны и найден ее критерий корректности (по Адамару) в [4]:

$$u_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)u_{xt}(x,t)-a_1a_2u_{xx}(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in\dot{G}_\infty=]0,\infty[\times]0,\infty[, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \partial_t u\big|_{t=0}=\psi(x),\ x\in]0,\infty[, \tag{2}$$

$$(\Gamma(t)u)\big|_{x=0}=\left[\zeta(t)u_{tt}+\xi(t)u_{xt}+\theta(t)u_{xx}+\alpha(t)u_t+\beta(t)u_x+\gamma(t)u\right]\big|_{x=0}=\mu(t),\ t>0, \tag{3}$$

где частные производные $\partial_t=\partial/\partial t, \partial_x=\partial/\partial x, \partial_{tt}=\partial^2/\partial t^2, \partial_{xt}=\partial^2/\partial x\partial t, \partial_{xx}=\partial^2/\partial x^2$, $f,\varphi,\psi,\mu,\zeta,\xi,\theta,\alpha,\beta,\gamma$ – заданные вещественные функции указанных выше независимых переменных x и t, коэффициенты $a_1>0, a_2\geq 0, b_1, b_2$ – вещественные постоянные. Предполагается, что в граничном режиме (3) вторые частные производные не являются характеристическими: их направления не совпадают с направлением характеристики $x=a_1t$ для всех $t\geq 0$, т.е. $a_1^2\zeta(t)-a_1\xi(t)+\theta(t)\neq 0, t\geq 0$ [4].

Известно, что уравнению (1) соответствуют два различных семейства характеристик

$$x-a_1t=C_1,\ x+a_2t=C_2,\ C_1,C_2\in R=]-\infty,+\infty[. \tag{4}$$

Определение 1. *Характеристика* $x=a_1t, a_1\geq 0$ *называется критической для уравнения (1) в первой четверти плоскости* $x=a_1t, a_1\geq 0.$

Критическая характеристика $x=a_1t, a_1\geq 0,$ делит множество G_∞ на два подмножества $G_-=\left\{\{x,t\}\in G_\infty : x>a_1t,\ t>0\right\}$, $G_+=\left\{\{x,t\}\in G_\infty : x\leq a_1t,\ x\geq 0\right\}$.

Из [9] известно понятие характеристической первой косой производной, т.е. характеристических первых частных производных в граничном условии. В этой же статье найдены различные классические решения каждой смешанной задачи для простейшего уравнения колебаний струны в первой четверти плоскости для нехарактеристической и характеристической первой косой производной в граничном условии. Для (3) понятие характеристических вторых частных производных введено в [4].

Определение 2. *Граничный режим (3) называется характеристическим, а вторые частные производные в (3) – характеристическими, если* $a_1^2\zeta(t)-a_1\xi(t)+\theta(t)=0, t\geq 0.$

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве плоскости $\Omega\subset R^2$ и $C^0(\Omega)=C(\Omega)$.

Определение 3. *Классическим решением смешанной задачи (1)–(3) на* $G_\infty=[0,+\infty[\times[0,+\infty[,$ *называется дважды непрерывно дифференцируемая функция* $u\in C^2(G_\infty)$, *удовлетворяющая поточечно уравнению (1) для всех внутренних точек* $\{x,t\}\in\dot{G}_\infty,\ \dot{G}_\infty=]0,\infty[\times]0,\infty[,$ *в обычном смысле, а начальным условиям (2) и граничному режиму (3) в смысле пределов значений функции* $u(\dot{x},\dot{t})$ *и ее соответствующих производных во внутренних точках* $\{\dot{x},\dot{t}\}\in\dot{G}_\infty$ *при* $\dot{x}\to x, \dot{t}\to t$, *стремящихся к соответствующим граничным точкам* $\{x,t\}\in G_\infty$.

Для классических решений $u\in C^2(G_\infty)$ из уравнения (1), начального состояния (2) и граничного режима (3) вытекает необходимость гладкости

$$f\in C(G_\infty), \varphi\in C^2[0,\infty[, \psi\in C^1[0,\infty[, \mu\in C[0,\infty[. \tag{5}$$

Дополнительные необходимые (и достаточные после доказательства теоремы 1) интегральные требования гладкости (9) и (10) на правую часть f уравнения (1) указаны ниже в формулировке теоремы 1.

В граничном режиме (3) мы полагаем $t=0$, вычисляем значения левой части полученного равенства с помощью начального состояния (2) при $x=0$ и уравнения (1) при $x=0, t=0$ и получаем необходимое условие согласования

$$\varsigma(0)[f(0,0)+(a_2-a_1)\psi'(0)+a_1a_2\varphi''(0)]+\xi(0)\psi'(0)+\theta(0)\varphi''(0)+$$
$$+\alpha(0)\psi(0)+\beta(0)\varphi'(0)+\gamma(0)\varphi(0)=\mu(0), \tag{6}$$

где одним и двумя штрихами сверху обозначены соответственно первая и вторая производные функций.

В следующей теореме 1 используются обозначения

$$F_i(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[\int_0^{t_i(x)}\int_{x_i(t,\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau+\int_{t_i(x)}^{t}\int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau\right], i=1,2, \tag{7}$$

$$x_i(t,\tau)=\left[1-(-1)^i\left((a_2/a_1)+1\right)\right](x-a_1t)-a_2\tau,$$

$$t_i(x)=(-1)^i\left(t-\frac{x}{a_1}\right),\quad F(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\int_0^t\int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau,$$

$$\Phi(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left\{a_1\varphi(x+a_2t)+a_2\varphi(0)+\int_0^{x+a_2t}\psi(s)ds\right\},$$

$$P(t)=\mu(t)-\Gamma(t)\left[\Phi(x,t)+F_2(x,t)\right]\Big|_{x=0},$$

$$\chi(a,b)=\exp\left\{-a_1\int_a^b\sigma(s)ds\right\},\quad \sigma(t)=\frac{\beta(t)-a_1\alpha(t)}{a_1^2\zeta(t)-a_1\xi(t)+\theta(t)}.$$

Частные классические решения F_1 и F_2 из (7) неоднородного уравнения (1) соответственно на G_- и G_+ выведены методом корректировки пробных решений в классические решения в [10], где также обоснована необходимость интегральных требований гладкости (9) и (10) на f.

В нашей статье [4] доказана

Теорема 1. *Пусть непрерывны коэффициенты граничных условий* $\zeta, \xi, \theta, \alpha, \beta, \gamma \in C[0,+\infty[$, *нехарактеристичны вторые частные производные граничного режима* $a_1^2\zeta(t)-a_1\xi(t)+\theta(t)\neq 0, t\in[0,+\infty[$, *и существует классическое решение* $v\in C^2[0,+\infty[, v(\rho)\neq 0,$ $v'(\rho)\neq 0, \rho\in[0,+\infty[$, *обыкновенного дифференциального уравнения*

$$[a_1^2\zeta(\rho/a_1)-a_1\xi(\rho/a_1)+\theta(\rho/a_1)]v''(\rho)-$$
$$-\left[\beta(\rho/a_1)-a_1\alpha(\rho/a_1)\right]v'(\rho)+\gamma(\rho/a_1)v(\rho)=0. \tag{8}$$

Смешанная задача (1)–(3) имеет единственное и устойчивое по f, φ, ψ, μ *классическое решение* $u\in C^2(G_\infty)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (5), (6) и интегральные требования гладкости*

$$J_1(x,t)\equiv\int_0^t f(x+a_2(t-\tau),\tau)\,d\tau\in C^1(G_\infty), \tag{9}$$

$$J_{i+1}(x,t) \equiv \left[1-(-1)^i\left(\frac{a_2}{a_1}+1\right)\right]\int\limits_0^{t_i(x)} f(x_i(t,\tau),\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_{t_i(x)}^{t} f(x-a_1(t-\tau),\tau)d\tau \in C^1(G_\infty),\ i=1,2. \qquad (10)$$

Классическим решением смешанной задачи (1)–(3) на G_∞ является функция

$$u_-(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left\{a_1\varphi(x+a_2t)+a_2\varphi(x-a_1t)+\int\limits_{x-a_1t}^{x+a_2t}\psi(s)ds\right\}+F(x,t),\ \{x,t\}\in G_-, \qquad (11)$$

$$u_+\left(x,t\right)=\Phi(x,t)+v(a_1t-x)\left\{\int\limits_0^{t_2(x)}\frac{a_1^2}{v^2(a_1s)}\int\limits_0^{s}\frac{v(a_1\tau)\chi(s,\tau)P(\tau)}{a_1^2\zeta(\tau)-a_1\xi(\tau)+\theta(\tau)}d\tau ds+\right.$$

$$\left.+\frac{a_1v(0)\left[\psi(0)-a_2\varphi'(0)\right]}{a_1+a_2}\int\limits_0^{t_2(x)}\frac{\chi(s,0)}{v^2(a_1s)}ds\right\}+F_2(x,t),\ \{x,t\}\in G_+. \qquad (12)$$

З а м е ч а н и е 1. Когда правая часть f уравнения (1) не зависит от переменной x или t, тогда требования гладкости на f из (9) и (10) эквивалентны требованию непрерывности f по t или x соответственно [4]. Когда же непрерывная правая часть $f \in C(G_\infty)$ зависит от переменных x и t, тогда благодаря равенствам

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^t f\left(\left|x+\left(-1\right)^i a_i(t-\tau)\right|,\tau\right)d\tau\right)=$$

$$=\frac{\left(-1\right)^i}{a_i}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^t f\left(\left|x+\left(-1\right)^i a_i(t-\tau)\right|,\tau\right)d\tau\right)-f(x,t)\right],\ i=1,2, \qquad (13)$$

в теореме 1 требования (9) и (10) эквивалентны принадлежности интегралов из (9) и (10) множествам $C^{(0,1)}(G_\infty)$ или $C^{(1,0)}(G_\infty)$ [7, л. 103]. Эти множества соответственно являются множествами непрерывных по x и непрерывно дифференцируемых по t на G_∞ или непрерывно дифференцируемых по x и непрерывных по t функций на G_∞. Равенства (13) сначала выводятся для более гладких $f \in C^1(G_\infty)$ и потом распространяются предельным переходом по f на непрерывные $f \in C(G_\infty)$, удовлетворяющие гладкостям (9) и (10). В [7] полунестационарное нехарактеристическое факторизованное граничное условие

$$\left.\left(\left(\alpha_2(t)\frac{\partial}{\partial t}+\beta_2(t)\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_2(t)\right)\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial t}+\beta_1\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma_1 u\right)\right)\right|_{x=0} = \mu(t),\ t>0,$$

с функциями $\alpha_2(t),\beta_2(t),\gamma_2(t)$ и постоянными коэффициентами $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ является частным случаем нашего общего нестационарного нехарактеристического граничного условия (3). Для классических решений $u \in C^2(G_\infty)$ в нашей теореме 1 условия гладкости (5), (9), (10) и согласования (6) необходимы и достаточны для корректности смешанной задачи (1)–(3), при равных и различных коэффициентах a_1 и a_2, а указанные в [7] условия гладкости и согласования необходимы и достаточны для корректности аналогичной смешанной задачи только лишь при равных коэффициентах $a_1=a_2$ уравнения (1).

Результаты и их обсуждение. ***Физико-геометрическая интерпретация классических решений вспомогательной смешанной задачи (1)–(3) на*** G_∞.

Определение 4. *В верхней полуплоскости* $G = \{\{x,t\} : -\infty < x < +\infty, t \geq 0\}$ *треугольник* ΔMPQ *с вершиной* $M(x_0,t_0) \in G_\infty$, *боковыми сторонами которого являются характеристики (4) волнового уравнения (1), называется характеристическим для точки* $M(x_0,t_0)$.

Подстановкой координат точки $M = M(x_0,t_0) \in G_\infty$ легко убедиться в том, что характеристики $x - a_1 t = x_0 - a_1 t_0$ и $x + a_2 t = x_0 + a_2 t_0$ пересекаются в этой точке.

Сначала выявим физико-геометрическую интерпретацию решения (11) смешанной задачи (1)–(3) на замыкании $\overline{G_-}$ множества $G_- \subset G_\infty$. Физико-геометрическая интерпретация классического решения $u_-(x,t)$ этой нехарактеристической смешанной задачи на $\overline{G_-}$ дается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения теоремы 1. Произведение значения решения* $u_-(M)$ *в вершине* $M(x_0,t_0) \in \overline{G_-}$ *характеристического треугольника* ΔMPQ *на сумму скоростей* $a_1 + a_2$ *прямой и обратной волн равно сумме произведений начального отклонения* $\varphi(x)$ *в точке* $Q(x_0 + a_2 t_0, 0)$ *на* a_1 *и в точке* $P(x_0 - a_1 t_0, 0)$ *на* a_2, *плюс криволинейный интеграл вдоль основания* PQ *этого характеристического треугольника от начальной скорости* $\psi(x)$ *и плюс двойной интеграл по характеристическому треугольнику* ΔMPQ *от плотности вынуждающей силы* $f(x,t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы докажем, что под критической характеристикой $x = a_1 t$ значение классического решения $u(x_0,t_0)$ в любой фиксированной точке $M = M(x_0,t_0) \in G_-$ полностью и однозначно определяется значениями правой части уравнения на характеристическом треугольнике $\Delta MPQ \subset G_-$ и указанными ниже начальными данными на его основании PQ. Вершинами основания PQ служат точка $P = P(x_0 - a_1 t_0, 0)$ пересечения характеристики $x - a_1 t = x_0 - a_1 t_0$, $a_1 > 0$, с осью Ox и точка $Q = Q(x_0 + a_2 t_0, 0)$ пересечения характеристики $x + a_2 t = x_0 + a_2 t_0$, $a_2 > 0$ с осью Ox (рис. 1). Эти точки P и Q очевидно присутствуют в фигурной скобке с тремя слагаемыми выражения (11) классического решения смешанной задачи (1)–(3) на G_-.

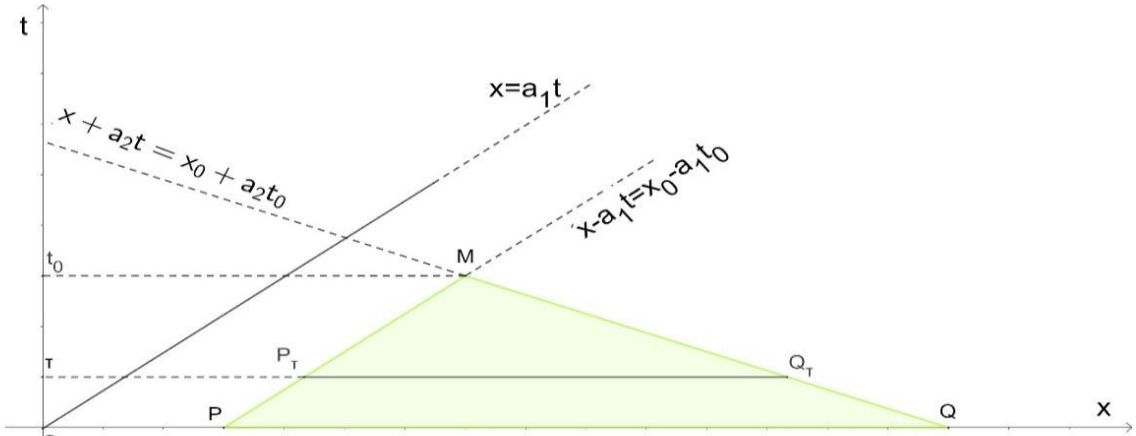

Рис. 1. **Характеристический треугольник** ΔMPQ

для классических решений смешанной задачи (1)–(3) на множестве G_-

Нужно найти физико-геометрический смысл четвертого слагаемого выражения (11). Для каждого $\tau \in [0, t_0[$ во внутреннем интеграле частного решения $F(x_0,t_0)$ неоднородного волнового уравнения нижним пределом интегрирования служит точка $P_\tau = P_\tau(x_0 - a_1(t_0 - \tau), \tau)$, которая является точкой пересечения прямой $t = \tau$ с характеристикой $x - a_1 t = x_0 - a_1 t_0$. В нем внутренним верхним пределом интегрирования служит точка $Q_\tau = Q_\tau(x_0 + a_2(t_0 - \tau), \tau),$ которая является точкой пересечения прямой $t = \tau$ с характеристикой $x + a_2 t = x_0 + a_2 t_0$. Итак, для каждого $\tau \in]0, t_0[$ внутренний интеграл в частном решении $F(x_0, t_0)$ представляет собой интеграл от правой части $f(s,\tau)$ уравнения (1) по s от (проекции) точки P_τ до (проекции) точки Q_τ (на ось Ox). Поэтому последнее слагаемое $F(x_0,t_0)$ из (11) является двойным интегралом от функции $f(x,t)$ по характеристическому треугольнику $\Delta MPQ \subset G_-$ точки $M = M(x_0, t_0)$ с коэффициентом $1/(a_1+a_2)$:

$$F(x_0,t_0) = \frac{1}{a_1+a_2} \iint\limits_{\Delta MPQ} f(s,\tau) ds d\tau. \qquad (14)$$

Таким образом, значение выражения (11) записывается в виде

$$u_-(M) = \frac{1}{a_1+a_2} \Big\{ a_1 u(Q) + a_2 u(P) + \\ + \int\limits_P^Q \left[u_t(s,t)\big|_{t=0} \right] ds \Big\} + \frac{1}{a_1+a_2} \iint\limits_{\Delta MPQ} f(s,\tau) ds d\tau. \qquad (15)$$

Из равенства (15) выводим физико-геометрическую интерпретацию классического решения (11) задачи Коши (1), (2) на G_-, указанную нами в теореме 1 и известную при $a_1 = a_2 = a > 0$ в учебнике [11].

Физико-геометрическая интерпретация единственных классических решений нехарактеристической смешанной задачи (1)–(3) для вершин $M = M(x_0,t_0) \in G_\infty$, находящихся на критической характеристике $x = a_1 t$, совпадает с физико-геометрической интерпретацией решения $u_-(M)$ на G_-, так как на критической характеристике $x = a_1 t$ ее решение (12) равно решению (11). Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 2. В самом начале доказательства теоремы 3 работы [10] говорится, что в [10] на G_- пробная функция (4), которая при коэффициентах $b_1 = b_2 = 0$ и, следовательно, коэффициентах $A = B = 0$ совпадает с двойным повторным интегралом $F(x,t)$ из нашей теоремы 1, равна двойному интегралу по характеристическому треугольнику $\Delta MPQ \subset G_-$, т.е. имеет вид двойного интеграла (14) настоящей статьи. Поэтому данной ссылкой на [10] можно было сократить доказательство теоремы 1.

Теперь найдем множество зависимости классического решения (12) смешанной задачи (1)–(3) на подмножестве внутренних точек $\dot{G}_+$ множества $G_+ \subset G_\infty$. Следующая теорема выражает его физико-геометрическую интерпретацию на $\dot{G}_+$.

Теорема 3. *Пусть выполняются предположения теоремы 1. В каждой точке $M = M(x_0,t_0) \in \dot{G}_+$ классическое решение нехарактеристической смешанной задачи (1)–(3) полностью и однозначно определяется начальным смещением $\varphi(x)$ и ее первыми двумя производными $\varphi'(x), \varphi''(x),$ начальной скоростью $\psi(x)$ и ее первой производной $\psi'(x)$ для $x \in [0, a_2 t_0'],$ плотностью вынуждающей силы $f(x,t)$ на четырехугольнике $MQ'OQ$ первой четверти плоскости G_∞, граничным данным $\mu(t)$ и коэффициентами $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \zeta(t), \xi(t), \theta(t)$ для времени $t \in [0, t_0']$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если аналогично замечанию 2 для решения F_2 из формулы (7) настоящей статьи сразу воспользоваться формулой (25) из [10] вида

$$F_2(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2} \iint\limits_{MQ'Q_1Q} f(x,t) dx dt,$$

то для любой точки $M = M(x_0,t_0) \in \dot{G}_+$ справедливо представление значения суммы первого $\Phi(x,t)$ и последнего $F_2(x,t)$ слагаемых решения (12)

$$u_+^{(0)}(M) = \frac{1}{a_1+a_2} \left[a_1 u(Q) + a_2 u(O) \right] + \frac{1}{a_1+a_2} \int\limits_O^Q u_t(s,t)\big|_{t=0} ds +$$

$$+\frac{1}{a_1+a_2}\iint\limits_{MQ'Q_1Q} f(s,\tau)dsd\tau, \tag{16}$$

где две новые вершины трапеции $MQ'Q_1Q$ имеют координаты $Q'(0,t_0-(x_0/a_1))$, $Q_1(a_2t_0-(a_2x_0/a_1),0)$ (рис. 2).

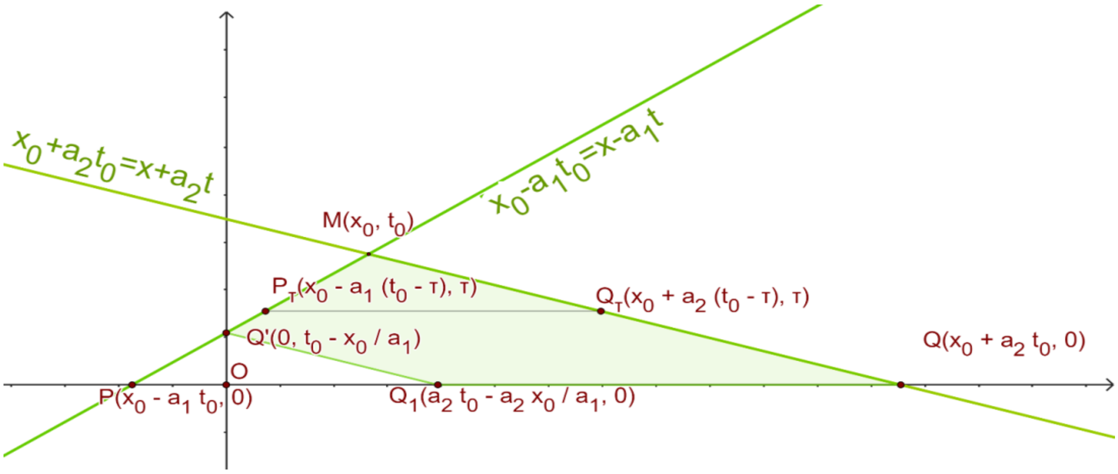

Рис. 2. **Трапеция** $MQ'Q_1Q$ **и четырехугольник** $MQ'OQ$
для классических решений смешанной задачи (1)–(3) на множестве G_+

Важно сказать, что в [10] для точек $M=M(x_0,t_0)$ подмножества $\dot{G}_+$ методом корректировки из двойного интеграла (14) по характеристическому треугольнику $\triangle MPQ\subset G$ фактически вычитается двойной интеграл вида (14) по характеристическому треугольнику $\triangle Q'PQ_1\subset G$ верхней полуплоскости G (рис. 2). В результате мы имеем двойной интеграл из (16) по трапеции $MQ'Q_1Q$, принадлежащей первой четверти плоскости G_∞.

Утверждение 1. *Пусть выполняются предположения теоремы 1. Произведение значения $u_+^{(0)}(M)$ в вершине $M=M(x_0,t_0)\in\dot{G}_+$ характеристического треугольника ΔMPQ на сумму скоростей a_1+a_2 прямой и обратной волн равно сумме произведений начального отклонения $\varphi(x)$ в точках $Q(x_0+a_2t_0,0)$ и $O(0,0)$ соответственно на a_1 и a_2, плюс криволинейный интеграл вдоль отрезка OQ от начальной скорости $\psi(x)$ и плюс двойной интеграл по трапеции $MQ'Q_1Q$ от плотности вынуждающей силы $f(x,t)$.*

Для любой точки $M=M(x_0,t_0)\in\dot{G}_+$ в классическом решении (12) остается одно слагаемое

$$u_+(M)-u_+^{(0)}(M)=v(a_1t_0-x_0)\left\{\int\limits_0^{t_0'}\frac{a_1^2}{v^2(a_1s)}\int\limits_0^s\frac{v(a_1\tau)\chi(s,\tau)P(\tau)}{a_1^2\zeta(\tau)-a_1\xi(\tau)+\theta(\tau)}d\tau ds+\right.$$

$$\left.+\frac{a_1v(0)\left[u_t(0,t)\big|_{t=0}-a_2\,u_x(x,0)\big|_{x=0}\right]}{a_1+a_2}\int\limits_0^{t_0'}\frac{\chi(s,0)}{v^2(a_1s)}ds\right\} \tag{17}$$

с верхним пределом интегрирования $t_0'=t_0-(x_0/a_1)$ в сумме двух интегралов и следующей подынтегральной функцией первого из них

$$P(t) = \mu(t) -$$
$$- \left\{ \left[\zeta(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \xi(t)\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \theta(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha(t)\frac{\partial}{\partial t} + \beta(t)\frac{\partial}{\partial x} + \gamma(t) \right] \left(\Phi(x,t) + F_2(x,t) \right) \right\} \Bigg|_{x=0}. \quad (18)$$

В первом двойном повторном интеграле из (17) функция $\mu(\tau)$ из (18) интегрируется сначала по τ от 0 до s и затем по s от 0 до $t_0' = t_0 - (x_0 / a_1)$, т.е. для точки $M = M(x_0, t_0) \in \dot{G}_+$ множеством изменения аргумента t данного $\mu(t)$ из граничного условия (3) является отрезок $[0, t_0']$.

Изучим возможные значения аргумента x начального смещения $\varphi(x)$ и начальной скорости $\psi(x)$ для функции

$$\Phi(0,\tau) = \frac{1}{a_1 + a_2}\left[a_1 u(a_2\tau, 0) + a_2 u(O) \right] + \frac{1}{a_1 + a_2}\int_0^{a_2\tau} u_t(s,t)\big|_{t=0} ds. \quad (19)$$

В выражении (17) от произведения $\gamma(\tau)$ на функцию (19) берется интеграл сначала по τ от 0 до s и затем по s от 0 до $t_0' = t_0 - (x_0 / a_1)$. В (19) переменная $a_2\tau$ начальных данных $u(a_2\tau, 0) = \varphi(a_2\tau)$ и $u_t(a_2\tau, t)\big|_{t=0} = \psi(a_2\tau)$ для $\tau \in [0, t_0']$ изменяется от 0 до $a_2 t_0' = a_2\left(t_0 - (x_0 / a_1)\right)$ включительно, т.е. на оси координат Ox от начала координат $O(0,0)$ до точки $Q_1(a_2 t_0', 0)$. В двойном повторном интеграле от $P(\tau)$ из (18) этот же интервал изменения переменной $a_2\tau$ в начальном смещении $\varphi(x)$ и начальной скорости $\psi(x)$ сохраняется первыми двумя производными $\varphi'(x), \varphi''(x)$ от начального смещения $\varphi(x)$ и первой производной $\psi'(x)$ от начальной скорости $\psi(x)$ и также частными производными по x и t до второго порядка включительно от функции $\Phi(x,t)$ из (18) при $x = 0$ и $t = \tau$. При этом частные производные по x и t первого и второго порядков от функции $\Phi(x,t)$ в (18) умножаются на соответствующие граничные коэффициенты $\zeta(t), \xi(t), \theta(t), \alpha(t), \beta(t)$. В двойном повторном интеграле из (17) от функции $\Phi(x,t)$ из (18) при $x = 0$ и $t = \tau$ значения переменной t этих граничных коэффициентов заполняют отрезок $[0, t_0'], t_0' = t_0 - (x_0 / a_1)$, оси Ot.

В коэффициенте второго одинарного интеграла из (17) еще вычисляются значения начальной скорости $\psi(x)$ и первой производной $\varphi'(x)$ по x при $x = 0$ от начального смещения $\varphi(x)$.

В первой четверти плоскости G_∞ для точки $M = M(x_0, t_0) \in \dot{G}_+$ найдем множество изменения переменных x и t плотности вынуждающей силы $f(x,t)$ из первого двойного повторного интеграла выражения (17). С этой целью вычисляем значения классического решения $F_2(x,t)$ из (7) неоднородного волнового уравнения (1) и его частных производных по x и t до второго порядка включительно при $x = 0$.

Из формулы (7) для $i = 2$ при $x = 0$ мы имеем

$$F_2(0,t) = 0, t \geq 0. \quad (20)$$

Отсюда дифференцированием по t легко находим значения первых двух частных производных по t от $F_2(x,t)$ при $x = 0$:

$$(F_2)_t(x,t)\big|_{x=0} = (F_2(0,t))_t = 0, \ (F_2)_{tt}(x,t)\big|_{x=0} = (F_2(0,t))_{tt} = 0, t \geq 0. \quad (21)$$

Мы вычисляем первую частную производную от $F_2(x,t)$ по x

$$\frac{\partial F_2(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{a_1 + a_2}\int_0^t f\left(x + a_2(t-\delta), \delta\right) d\delta +$$
$$+ \frac{a_2}{a_1(a_1 + a_2)}\int_0^{t - x/a_1} f\left(a_2\left(t - \frac{x}{a_1} - \delta\right), \delta\right) d\delta - \frac{1}{a_1 + a_2}\int_{t - x/a_1}^t f\left(x - a_1(t-\delta), \delta\right) d\delta, \quad (22)$$

из которой при $x=0$ получаем тождество

$$\left.\frac{\partial F_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{1}{a_1}\int_0^t f\left(a_2(t-\delta),\delta\right)d\delta,\, t\ge 0, \tag{23}$$

так как при $x=0$ в (22) последний интеграл обращается в ноль, а первый интеграл сокращается благодаря равенству

$$\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1+a_2}.$$

Первая производная по t от тождества (23) дает тождество

$$\left.\frac{\partial^2 F_2(x,t)}{\partial x\partial t}\right|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\left.\frac{\partial F_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}\right) = \frac{1}{a_1}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^t f\left(a_2(t-\delta),\delta\right)d\delta\right\},\, t\ge 0. \tag{24}$$

Дифференцируем первую производную (22) еще раз по x

$$\frac{\partial^2 F_2(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1+a_2}\int_0^t f_x\left(x+a_2(t-\delta),\delta\right)d\delta +$$

$$+\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}\left[f\left(0,t-\frac{x}{a_1}\right)\left(-\frac{1}{a_1}\right)+\int_0^{t-x/a_1} f_x\left(a_2\left(t-\frac{x}{a_1}-\delta\right),\delta\right)d\delta\right]+$$

$$+\frac{1}{a_1+a_2}\left[f\left(0,t-\frac{x}{a_1}\right)\left(-\frac{1}{a_1}\right)-\int_{t-x/a_1}^{t} f_x\left(x-a_1(t-\delta),\delta\right)d\delta\right]=$$

$$=\frac{1}{a_2(a_1+a_2)}\int_0^t f_t\left(x+a_2(t-\delta),\delta\right)d\delta +$$

$$+\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}\left[f\left(0,t-\frac{x}{a_1}\right)\left(-\frac{1}{a_1}\right)-\frac{1}{a_1}\int_0^{t-x/a_1} f_t\left(a_2\left(t-\frac{x}{a_1}-\delta\right),\delta\right)d\delta\right]+$$

$$+\frac{1}{a_1+a_2}\left[f\left(0,t-\frac{x}{a_1}\right)\left(-\frac{1}{a_1}\right)+\frac{1}{a_1}\int_{t-x/a_1}^{t} f_t\left(x-a_1(t-\delta),\delta\right)d\delta\right]+$$

$$+\frac{1}{a_1+a_2}\left[f\left(0,t-\frac{x}{a_1}\right)\left(-\frac{1}{a_1}\right)+\frac{1}{a_1}\int_{t-x/a_1}^{t} f_t\left(x-a_1(t-\delta),\delta\right)d\delta\right], \tag{25}$$

потому что первые частные производные по x выражаются через первые частные производные по t от правой части волнового уравнения

$$f_x(x+a_2(t-\delta),\delta)=\frac{1}{a_2}f_t(x+a_2(t-\delta),\delta),$$

$$f_x\left(a_2\left(t-\frac{x}{a_1}-\delta\right),\delta\right)=-\frac{1}{a_1}f_t\left(a_2\left(t-\frac{x}{a_1}-\delta\right),\delta\right),$$

$$f_x(x-a_1(t-\delta),\delta)=-\frac{1}{a_1}f_t(x-a_1(t-\delta),\delta),\ x\ge 0,\ t\ge 0.$$

От равенств (25) при $x=0$ мы приходим к значению второй частной производной от $F_2(x,t)$ по x при $x=0$

$$\left.\frac{\partial^2 F_2(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\frac{a_1-a_2}{a_1^2a_2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^t f\left(a_2(t-\delta),\delta\right)d\delta\right\}-\frac{1}{a_1a_2}f(0,t),\ t\ge 0. \tag{26}$$

В двойной повторный интеграл из (17) от $P(\tau)$ из (18) мы подставляем значения частных производных (20), (21), (23), (24), (26) от классического решения $F_2(x,t)$ при $x=0$ и $t=\tau$, умноженные соответственно на коэффициенты $\beta(\tau),\xi(\tau),\theta(\tau)$ тех значений частных производных от $F_2(x,t)$ при $x=0$ и $t=\tau$, которые не обратились в ноль. В выражении (17) от суммы произведений коэффициентов $\beta(\tau),\xi(\tau),\theta(\tau)$ соответственно на значения частных производных (23), (24), (26) при $t=\tau$ берутся интегралы от функции f по δ от 0 до τ, по τ от 0 до s и по s от 0 до $t_0'=t_0-(x_0/a_1)$. Таким образом, для точек $M=M(x_0,t_0)\in\dot{G}_+$ в (17) берутся интегралы от плотности вынуждающей силы $f(x,t)$ по точкам $\{x,t\}$ четырехугольника $MQ'OQ\subset G_\infty$ и значения переменной t коэффициентов $\beta(\tau),\xi(\tau),\theta(\tau)$ принадлежат отрезку $[0,t_0'],\ t_0'=t_0-(x_0/a_1)$, оси Ot. Четырехугольник $MQ'OQ$ является пересечением характеристического треугольника $\triangle MPQ$ с первой четвертью плоскости G_∞ (рис. 2). В (17) знаменатель двойного повторного интеграла также содержит коэффициенты $\zeta(t),\xi(t),\theta(t)$ при $t\in[0,t_0']$ из граничного условия (3). В выражении (17) под двумя интегралами присутствуют соответственно функции $\chi(s,\tau)$ и $\chi(s,0)$ с коэффициентами $\alpha(t),\beta(t)$ для времени $t\in[0,t_0']$ из граничного условия (3).

Это позволяет нам сделать физико-геометрическую интерпретацию выражения (17) на $\dot{G}_+$.

Утверждение 2. *Пусть выполняются предположения теоремы 1. Значение $u_+(M)-u_+^{(0)}(M)$ в вершине $M=M(x_0,t_0)\in\dot{G}_+$ характеристического треугольника ΔMPQ полностью и однозначно определяется начальным смещением $\varphi(x)$ и ее первыми двумя производными $\varphi'(x),\varphi''(x)$, начальной скоростью $\psi(x)$ и ее первой производной $\psi'(x)$ для $x\in\left[0,a_2\left(t_0-(x_0/a_1)\right)\right]$, плотностью вынуждающей силы $f(x,t)$ на четырехугольнике $MQ'OQ$ первой четверти плоскости G_∞, граничным данным $\mu(t)$ и коэффициентами $\alpha(t),\beta(t),\gamma(t),\zeta(t),\xi(t),\theta(t)$ для времени $t\in[0,t_0-(x_0/a_1)]$.*

Итак, в теореме 3 физико-геометрическая интерпретация классических решений (12) нехарактеристической смешанной задачи (1)–(3) на $\dot{G}_+$ следует из нами доказанных утверждений 1 и 2. Теорема 3 доказана.

Заключение. В теоремах 2 и 3 изложена физико-геометрическая интерпретация классических решений смешанной задачи для неоднородного двухскоростного волнового уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарных и нехарактеристических вторых частных производных в граничном режиме. Полученная физико-геометрическая интерпретация может быть применена к выводу физико-геометрической интерпретации классических решений смешанной задачи для неоднородного двухскоростного волнового уравнения при нестационарных и нехарактеристических вторых частных производных на концах ограниченной струны из [1].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ломовцев, Ф.Е. Смешанная задача для общего одномерного волнового уравнения в полуполосе плоскости при нестационарных нехарактеристических вторых производных / Ф.Е. Ломовцев, В.В. Лысенко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2021. – № 2(58). – С. 28–54.
2. Lomovtsev, F.E. Mixed Problem for Inhomogeneous Wave Equation of Bounded String with Noncharacteristic Second Derivatives in Nonstationary Boundary Modes / F.E. Lomovtsev, V.V. Lysenko // Journal of Applied Mathematics and Computation. – 2023. – Vol. 7, № 1. – P. 65–82. – URL: https://www.hillpublisher.com/journals/JAMC/ (date of access: 15.08.2024). ISSN Online: 2576-0653. ISSN Print: 2576-0645. DOI: 10.26855/jamc.2023.03.007 65 Journal of Applied Mathematics and Computation.
3. Ломовцев, Ф.Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны / Ф.Е. Ломовцев // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: материалы междунар. матем. конф., Минск, 7–10 дек. 2015 г.: в 2 ч. / Ин-т математики Нац. акад. наук Беларуси; ред. С.Г. Красовский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 2015. – Ч. 2. – С. 74–75.
4. Ломовцев, Ф.Е. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных / Ф.Е. Ломовцев, В.В. Лысенко // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2019. – № 3(104). – С. 5–17.
5. Ломовцев, Ф.Е. Формулы Римана первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. I / Ф.Е. Ломовцев // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2023. – № 2(62). – С. 16–31.
6. Ломовцев, Ф.Е. Решение двухскоростного модельного волнового уравнения новым «методом неявных характеристик» / Ф.Е. Ломовцев // Современные методы теории краевых задач. «Понтрягинские чтения – XXXIV»: материалы междунар. Воронежской весенней математической школы, посвященной 115-летию со дня рождения академика Л.С. Понтрягина, Воронеж, 3–9 мая 2023 г. / Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2023. – С. 260–262.
7. Новиков, Е.Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Новиков Евгений Николаевич; Ин-т математики Нац. акад. Беларуси. – Минск, 2017. – 258 л.
8. Ломовцев, Ф.Е. Глобальная теорема корректности по Адамару первой смешанной задачи для волнового уравнения в полуполосе плоскости / Ф.Е. Ломовцев // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2021. – Т. 11, № 1. – С. 68–82.
9. Барановская, О.Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии / О.Н. Барановская, Н.И. Юрчук // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.
10. Ломовцев, Ф.Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части / Ф.Е. Ломовцев // Журнал Белорусского государственного университета. Серия: Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38–52.
11. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – Москва: Наука, 2004. – 798 с.

R E F E R E N C E S

1. Lomovtsev F.E., Lysenko V.V. *Vesnik Magileuskaga dziarzhaunaga universiteta imia A.A. Kuliashova. Ser. B, Pryrodaznauchiya navuki (matematyka, fizika, biyalogiya)* [Bulletin of Mogilev State A.A. Kuleshov University. Series B, Natural Sciences (Mathematics, Physics, Biology)], 2021, 2(58), pp. 28–54.
2. Lomovtsev F.E., Lysenko V.V. Mixed Problem for Inhomogeneous Wave Equation of Bounded String with Noncharacteristic Second Derivatives in Nonstationary Boundary Modes // Journal of Applied Mathematics and Computation. 2023. 7(1). P. 65–82. URL: https://www.hillpublisher.com/journals/JAMC/. ISSN Online: 2576-0653. ISSN Print: 2576-0645. DOI: 10.26855/jamc.2023.03.007.
3. Lomovtsev F.E. *Shestiye Bogdanovskiye chteniya po obyknovennym differentsialnym uravneniyam: materialy mezhdunar. marem. konf., Minsk, 7–10 dek. 2015 g.: v 2 ch.* [Materials of the International Scientific Conference “Sixth Bogdanov Readings on Ordinary Differential Equations” (Minsk, December 7–10, 2015)], Minsk, IM NAN Belarusi, 2015, pp. 74–75.
4. Lomovtsev F.E., Lysenko V.V. *Vesnik Vitsebskaga dziarzhaunaga universiteta* [Bulletin of Vitebsk State University], 2019, 3(104), pp. 5–17.
5. Lomovtsev F.E. *Vesnik Magileuskaga dziarzhaunaga universiteta imia A.A. Kuliashova. Ser. B, Pryrodaznauchiya navuki (matematyka, fizika, biyalogiya)* [Bulletin of Mogilev State A.A. Kuleshov University. Natural Sciences (Mathematics, Physics, Biology)], 2023, 2(62), pp. 16–31.
6. Lomovtsev F.E. *Sovremenniye metody teorii krayevykh zadach “Pontriaginskiye chteniya – XXXIV”: materialy mezdunar. Voronezhskoi vesennei matematicheskoi shkoly, Voronezh, 3–9 maya 2023 g.* [Modern Methods in the Theory of Boundary Problems Materials of the International Conference: Voronezh Spring Mathematical School “Pontryagin Readings – XXXIV” (May 3–9, 2023, Voronezh, VSU)], Voronezh: Izdatelski Dom VGU, 2023, pp. 260–262.
7. Novikov E.N. *Smeshanniye zadachi dlia uravneniya vynuzhdennykh kolebani ogranichennoi struny pri nestatsionarnykh granichnykh usloviyakh s pervoi i vtoroi kosymi proizvodnymi: dis. … kand. fiz.-mat. nauk* [Mixed Problems for the Equation of Forced Oscillations of a Bounded String under Nonstationary Boundary Conditions with First and Second Oblique Derivatives: PhD Thesis in Physical and Mathematical Sciences], IM NAS of Belarus. Minsk, 2017, 258 p.
8. Lomovtsev F.E. *Vesnik Grodzenskaga dziarzhaunaga universiteta imia Yanki Kupaly. Ser. 2, Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichalnaya tekhnika i kiravanne* [Bulletin of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2, Mathematics. Physics. Information Science, Computing and Control], 2021, 11(1), pp. 68–82.
9. Baranovskaya O.N., Yurchuk N.I. *Differentsialniye uravneniya* [Differential Equations], 2009, 45(8), pp. 1188–1191.
10. Lomovtsev F.E. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Informatika* [Journal of Belarusian State University. Mathematics. Information Science], 2017, 3, pp. 38–52.
11. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [The Equations of Mathematical Physics], Moscow: Nauka, 2004, 798 p.

Поступила в редакцию 27.09.2024

Адрес для корреспонденции: e-mail: lomovcev@bsu.by – Ломовцев Ф.Е.