Матэматыка

УДК 512.542

О характеризациях инъекторов конечных групп

Н.Т. Воробьев, О.Ю. Кочергина
Учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В данной работе описаны $\mathcal{F}$-инъекторы конечных групп для полулокальных классов Фиттинга, а также расширен результат Дёрка–Хоукса на случай π-разрешимой группы G, где π – множество всех простых делителей порядков всех групп из $\mathcal{F}$. Основные результаты представляют следующие теоремы:

Теорема. *Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга π-разрешимой группы G, где π – множество всех простых делителей порядков всех групп из $\mathcal{F}$, и $N \trianglelefteq G$. Тогда:*

а) множество $\mathcal{F}_{G/N}=\{SN/N: S – \mathcal{F}\text{-инъектор } SN\}$ является множеством Фиттинга группы G/N;

б) если V – $\mathcal{F}$-инъектор группы G, то VN/N является $\mathcal{F}_{G/N}$-инъектором группы G/N.

Следствием данной теоремы является результат Дёрка–Хоукса:

Следствие. *Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга разрешимой группы G и $N \trianglelefteq G$. Тогда:*

а) множество $\mathcal{F}_{G/N}=\{SN/N: S – \mathcal{F}\text{-инъектор } SN\}$ является множеством Фиттинга группы G/N;

б) если V – $\mathcal{F}$-инъектор группы G, то VN/N является $\mathcal{F}_{G/N}$-инъектором группы G/N.

Теорема. *Если $\mathcal{F}$ – полулокальный класс Фиттинга для некоторой полной $\mathcal{X}$-постоянной H-функции f с носителем π и G такая группа, что $G/G_{\mathcal{X}}$ разрешима, то подгруппа V является $\mathcal{F}$-инъектором группы G тогда и только тогда, когда V/G_f является холловой π'-подгруппой группы G/G_f.*

Ключевые слова: *класс Фиттинга, произведение классов Фиттинга, множество Фиттинга, $\mathcal{F}$-инъектор, полулокальный радикал.*

On Characterization of Injectors of Finite Groups

N.T. Vorobyev, O.Y. Kochergina
Education establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

In this paper we describe $\mathcal{F}$-injectors of finite groups for semilocal classes of Fitting and we expanded Doerk–Hawkes's result for a case of π-soluble group G, where π is a set of all simple dividers of orders of all groups from $\mathcal{F}$. The main results follow from the following theorems:

Theorem. *Let $\mathcal{F}$ be a Fitting set of π-soluble group G, where π is a set of all simple dividers of orders of all groups from $\mathcal{F}$, and let $N \trianglelefteq G$. Then:*

a) the set $\mathcal{F}_{G/N}=\{SN/N: S \text{ is an } \mathcal{F}\text{-injector of } SN\}$ is a Fitting set of G/N;

b) if V is an $\mathcal{F}$-injector of G, then VN/N is an $\mathcal{F}_{G/N}$-injector of G/N.

Doerk–Hawkes's result is a consequence of this theorem:

Consequence. *Let $\mathcal{F}$ be a Fitting set of soluble group G, let and $N \trianglelefteq G$. Then:*

a) the set $\mathcal{F}_{G/N}=\{SN/N: S \text{ is an } \mathcal{F}\text{-injector of } SN\}$ is a Fitting set of G/N;

b) if V is an $\mathcal{F}$-injector of G, then VN/N is an $\mathcal{F}_{G/N}$-injector of G/N.

Theorem. *If $\mathcal{F}$ is a semilocal class of Fitting for some full $\mathcal{X}$-constant of H-function f with the function carrier π and G such group that $G/G_{\mathcal{X}}$ is a soluble group, then a subgroup V is an $\mathcal{F}$-injector of G if and only if V/G_f is a π'-subgroup of Holl of G/G_f.*

Key words: *Fitting class, product of Fitting classes, Fitting set, $\mathcal{F}$-injector, semilocal radical.*

Основополагающим результатом в теории классов конечных разрешимых групп является теорема Гашюца–Фишера–Хартли [1] о том, что в любой конечной разрешимой группе для любого класса Фиттинга $\mathcal{F}$ существуют $\mathcal{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. Заметим, если $\mathcal{F}=\mathcal{N}_p$ – класс всех p-групп и $\mathcal{F}= \mathcal{S}_\pi$ – класс конечных разрешимых π-групп, из указанной теоремы вытекают фундаментальные теоремы Силова и Холла [2].

Цель работы – нахождение новых классов сопряженных инъекторов в частично разрешимой группе и их характеризация.

Напомним, что класс групп $\mathcal{F}$ называется классом Фиттинга, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathcal{F}$-подгрупп. Подгруппа V группы G называется ее $\mathcal{F}$-инъектором, если $V \cap N$ является $\mathcal{F}$-максимальной подгруппой группы N для любой субнормальной подгруппы N группы G.

Теорема Гашюца–Фишера–Хартли обобщалась на случай частично разрешимых групп в работах Шеметкова [3], Сементовского [4] и Баллестера-Болинше [5]. Вместе с тем возникает задача нахождения характеризации $\mathcal{F}$-инъекторов в терминах радикалов групп и холловых подгрупп для групп, в общем случае, не обязательно разрешимых. Данная задача в случае конечных разрешимых групп была решена Н.Т. Воробьевым и И.В. Дудкиным [6]. При решении указанной задачи важно выяснить: будет ли каждая $\mathcal{F}$-максимальная подгруппа, содержащая $\mathcal{F}$-радикал группы, ее $\mathcal{F}$-инъектором?

Для решения указанной задачи мы используем метод локализации, который был впервые предложен Хартли [7] и состоит в следующем. Пусть P – множество всех простых чисел. Тогда H-функцией f называют отображение множества P во множество классов Фиттинга. Следуя Хартли, мы определим полулокальные классы Фиттинга и изучим свойства полулокальных радикалов. Основной результат работы – критерий $\mathcal{F}$-инъектора в терминах полулокальных радикалов и холловых подгрупп. Доказано, что если $\mathcal{F}$ – полулокальный класс Фиттинга для некоторой полной $\mathcal{X}$-постоянной H-функции f с носителем π и G такая группа, что $G/G_{\mathcal{X}}$ разрешима, то подгруппа V является $\mathcal{F}$-инъектором группы G тогда и только тогда, когда V/G_f – холлова π'- подгруппа группы G/G_f.

1. Предварительные сведения

Определение 1.1 [8]. *Классом Фиттинга* называется класс групп $\mathcal{F}$, удовлетворяющий следующим требованиям:

1) каждая нормальная подгруппа любой группы из $\mathcal{F}$ также принадлежит $\mathcal{F}$;

2) из того, что нормальные подгруппы M и N принадлежат $\mathcal{F}$, всегда следует, что их произведение MN принадлежит $\mathcal{F}$.

Определение 1.2 [8]. Пусть $\mathcal{F}$ – непустой класс Фиттинга. Подгруппа $G_{\mathcal{F}}$ группы G называется *$\mathcal{F}$-радикалом* группы, если она является максимальной из нормальных подгрупп группы G, принадлежащих $\mathcal{F}$.

Определение 1.3 [8]. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ классы Фиттинга. *Произведением $\mathcal{FH}$* классов Фиттинга $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ называется класс всех тех групп G, для которых $G/G_{\mathcal{F}}$ принадлежит $\mathcal{H}$.

Определение 1.4 [3]. Класс групп $\mathcal{F}$ называется *формацией*, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathcal{F}$ и $H \lhd G$, то $G/H \in \mathcal{F}$;

2) если $H/A \in \mathcal{F}$ и $H/B \in \mathcal{F}$, то $H/(A \cap B) \in \mathcal{F}$.

Определение 1.5 [9]. *p-Группой* называется группа, порядок которой есть степень простого числа p.

Обозначим через π некоторое множество простых чисел и π' – дополнение множества π в P.

Группа называется π-группой, если ее порядок есть π- число, т.е. все простые делители порядка группы G принадлежат π.

Определение 1.6 [10]. Группа G называется *π-разрешимой*, если она удовлетворяет одному из следующих равносильных условий:

1) порядки композиционных факторов группы G являются либо простыми числами из π, либо π'-числами;

2) каждый главный фактор группы G имеет своим порядком либо степень простого числа из π, либо π'-число.

Определение 1.7 [11]. Всякое отображение f: $P \rightarrow$ {классы Фиттинга} называют *функцией Хартли* или *локальной Н-функцией*.

Определение 1.8 [2]. Подгруппа V группы G называется ее *$\mathcal{F}$-инъектором*, если $V \cap N$ является $\mathcal{F}$-максимальной подгруппой группы N для любой субнормальной подгруппы N группы G.

Лемма 1.9 [10]. *Если N и H – нормальные подгруппы группы G, причем $H \leq N$, то G/N изоморфна $G/H/N/H$.*

Лемма 1.10 [2]. *Пусть $\mathcal{F}$ – класс Фиттинга. Для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) если V – $\mathcal{F}$-инъектор G и $K \trianglelefteq G$, то $V \cap K$ является $\mathcal{F}$-инъектором группы K;

2) если V – $\mathcal{F}$-инъектор G и $\alpha: G \rightarrow G^{\alpha}$ изоморфизм, то V^{α} является $\mathcal{F}$-инъектором группы G^{α};

3) если V – $\mathcal{F}$-максимальная подгруппа G и $V \cap M$ является $\mathcal{F}$-инъектором M, для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G, то V – $\mathcal{F}$-инъектор G.

Лемма 1.11 [2]. *Если K субнормальна в G и $V \in Inj_{\mathcal{F}}(G)$, то $K \cap V$ является $\mathcal{F}$-инъектором группы K.*

Теорема 1.12 [4]. *Пусть $\mathcal{F}$ – класс Фиттинга. Тогда, если $G/G_{\mathcal{F}}$ разрешимая группа, то в группе G существуют $\mathcal{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Теорема 1.13 [10]. *В любой π-разрешимой группе существуют холловы π-подгруппы и любые две из них сопряжены.*

Теорема 1.14 [3]. *Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга и G является π-разрешимой группой, где π – множество всех простых делителей порядков всех групп из $\mathcal{F}$, тогда G обладает хотя бы одним $\mathcal{F}$-инъектором и любые два из них сопряжены.*

Теорема 1.15 (Фишер, Гашюц и Хартли) [2]. *$\mathcal{F}$ — множество Фиттинга конечной разрешимой группы G. Тогда существует единственный класс сопряженных $\mathcal{F}$-инъекторов.*

Другие определения и обозначения при необходимости можно найти в [2; 9].

2. Множества Фиттинга и инъекторы

Определение 2.1 [2]. Непустое множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называется *множеством Фиттинга* группы G, если выполняются следующие условия:

1) если $T \lhd\lhd S$ и $S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$;
2) если S, $T \in \mathcal{F}$ и $S, T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$;
3) если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

Определение 2.2 [2]. Если $U \leq G$ и $U \in \mathcal{F}$, то U называют *$\mathcal{F}$-подгруппой G.*

Определение 2.3 [2]. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, G — группа. *Следом* класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в G называют множество подгрупп $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}(G)=\{H \leq G: H \in \mathfrak{F}\}$ группы G .

Теорема 2.4. *Для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и любой группы G след $Tr_{\mathfrak{F}}(G)$ является множеством Фиттинга.*

Доказательство. Обозначим $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}(G)=\mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{F}$ — это множество всех $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G. Если $T \lhd\lhd S$ и $S \in \mathcal{F}$, т.е. $S \in \mathfrak{F}$ и $S \leq G$,то, по определению класса Фиттинга, $T \in \mathfrak{F}$, значит, $T \in \mathcal{F}$. Первое условие определения 2.1 для множества $\mathcal{F}$ доказано.

Пусть S, $T \trianglelefteq ST$ и S, $T \in \mathcal{F}$. Тогда $S, T \in \mathfrak{F}$ и $ST \in \mathfrak{F}$, т.к. класс $\mathfrak{F}$ замкнут относительно произведений нормальных подгрупп. Следовательно, т.к. $ST \leq G$, имеем $ST \in \mathcal{F}$. Второе условие определения 2.1 для множества $\mathcal{F}$ выполняется.

Если $S \in \mathcal{F}$, т.е. $S \in \mathfrak{F}$ и $S \leq G$,ввиду того, что $\mathfrak{F}$ – класс групп, $S^x \in \mathfrak{F}$, для любого $x \in G$. Следовательно, $S^x \in \mathfrak{F}$. Ввиду того, что $S^x \leq G$, заключаем, что $S^x \in \mathcal{F}$. Третье условие определения 2.1 доказано. Следовательно, $\mathcal{F}$ — множество Фиттинга группы G. Теорема доказана.

Из данной теоремы следует, что каждому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ группы G соответствует множество $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}(G)$, которое является множеством Фиттинга; однако не каждое множество Фиттинга является следом класса Фиттинга.

Примеры [2]:

1. По теореме 2.1 все следы классов Фиттинга в группе G являются примерами множеств Фиттинга.

2. Если $N \leq G$, то множество всех субнормальных подгрупп группы N является множеством Фиттинга.

3. Если G – p-группа, то множествами Фиттинга группы G, которые являются следами классов Фиттинга, будут множества $\{1\}$ и $\{U: U \leq G\}$.

Теорема 2.5. *Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга π-разрешимой группы G, где π – множество всех простых делителей порядков всех групп из $\mathcal{F}$, и $N \trianglelefteq G$. Тогда:*

а) множество $\mathcal{F}_{G/N}=\{SN/N: S$ – $\mathcal{F}$-инъектор $SN\}$ является множеством Фиттинга группы G/N;

б) если V – $\mathcal{F}$-инъектор группы G, то VN/N является $\mathcal{F}_{G/N}$-инъектором группы G/N.

Доказательство. Пусть G является π-разрешимой группой. Тогда SN также π-разрешимая группа. Согласно теореме 1.14 в группе SN существуют $\mathcal{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в этой группе. Теперь мы можем построить следующее множество подгрупп группы G/N:

$\mathcal{F}_{G/N}=\{SN/N$: S – $\mathcal{F}$-инъектор $SN\}$.

Пусть $K/N \trianglelefteq SN/N$, где $S \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{F}}(SN)$.

Так как $K \trianglelefteq SN$, то $S \cap K \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{F}}(K)$, по лемме 1.11. Кроме того, $K = SN \cap K = (S \cap K)N$. Значит, $K/N=(S \cap K)N/N \in \mathcal{F}_{G/N}$. Следовательно, для множества $\mathcal{F}_{G/N}$ выполняется первое условие определения множества Фиттинга.

Пусть $S_iN/N \in \mathcal{F}_{G/N}$, а значит, $S_i \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{F}}(S_iN)$ и $S_iN \trianglelefteq (S_1N)(S_2N)$, где $i \in \{1,2\}$. Обозначим $T = (S_1N)(S_2N)$, $W -$ $\mathcal{F}$–инъектор T и $R_i = W \cap S_i$, для $i \in \{1,2\}$. Так как $S_iN \trianglelefteq T$, то $R_i \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{F}}(S_iN)$ и $S_i \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{F}}(S_iN)$. Следовательно, R_i, S_i сопряжены в S_iN по теореме 1.12. В частности, получаем $R_iN = S_iN$. Значит, $T = S_1NS_2N = R_1R_2N \leq WN \leq T$. Отсюда $T/N = WN/N \in \mathcal{F}_{G/N}$, а значит, $\mathcal{F}_{G/N}$ удовлетворяет второму условию определения 2.1.

Так как $\mathcal{F}$ — множество Фиттинга, то $\mathcal{F} = \mathcal{F}^g$, для любого $g \in G$, что означает, что $S^g \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{F}}(S^gN)$. Следовательно, $\mathcal{F}_{G/N}$ удовлетворяет третьему условию определения 2.1. Итак, $\mathcal{F}_{G/N}$ — множество Фиттинга группы G/N.

Пусть $K/N \lhd\lhd G/N$, то $V \cap K \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{F}}(K)$, что следует из того, что $K \trianglelefteq G$ и леммы 1.11. Кроме того $V \cap K \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{F}}((V \cap K)N)$, ввиду $KN = K$. Следовательно, группа $(V \cap K)N/N \in \mathcal{F}_{G/N}$; покажем, что и эта группа $\mathcal{F}_{G/N}$-максимальна в K/N.

Очевидно, что SN/N есть $\mathcal{F}_{G/N}$-подгруппа группы K/N, включающей $(V \cap K)N/N$, при условии, что $S \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{F}}(S)$, к тому же, согласно теореме 1.15, $V \cap K \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{F}}(SN)$, а значит, $V \cap K$ и S сопряжены в SN, и, как следствие этого, $(V \cap K)/N = SN/N$. Это доказывает, что $(V \cap K)N/N = VN/N \cap K/N$ является $\mathcal{F}_{G/N}$-максимальной в K/N. Поэтому VN/N является $\mathcal{F}_{G/N}$-инъектором для G/N. Теорема доказана.

Следствием данной теоремы в разрешимом случае является результат Дёрка–Хоукса, который приведем как

Следствие 2.6 [2]. *Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга разрешимой группы G и $N \trianglelefteq G$. Тогда:*

а) множество $\mathcal{F}_{G/N}$={SN/N: S – $\mathcal{F}$-инъектор SN} является множеством Фиттинга группы G/N;

б) если V – $\mathcal{F}$-инъектор группы G, то VN/N является $\mathcal{F}_{G/N}$-инъектором группы G/N.

3. Некоторые свойства полулокальных радикалов

Приведем вначале в качестве лемм простейшие свойства произведений классов Фиттинга и радикалов, которые будем использовать для доказательства основной теоремы.

Лемма 3.1. *Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ – классы Фиттинга и* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$, то $G_{\mathcal{F}} \subseteq G_{\mathcal{H}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению $\mathcal{F}$-радикала группы G и условию леммы $G_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$, а также $G_{\mathcal{F}} \lhd G$. По определению $\mathcal{H}$-радикала группы G, $G_{\mathcal{H}}$ – максимальная из нормальных подгрупп группы G, принадлежащих $\mathcal{H}$. Следовательно, $G_{\mathcal{F}} \subseteq G_{\mathcal{H}}$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $\{\mathcal{F}_i | i \in I\}$ – множество классов Фиттинга, где I – произвольное непустое множество. Тогда для любой группы G справедливо равенство $G_{\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i} = \bigcap_{i\in I} G_{\mathcal{F}_i}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{F} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$. Тогда $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_i$ для любого $i \in I$ и по лемме 3.1 для любого $i \in I$ справедливо включение $G_{\mathcal{F}} \subseteq G_{\mathcal{F}_i}$. Следовательно, $G_{\mathcal{F}} \subseteq \bigcap_{i\in I} G_{\mathcal{F}_i}$, т.е. $G_{\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} G_{\mathcal{F}_i}$.

С другой стороны, $\bigcap_{i\in I} G_{\mathcal{F}_i} \lhd G_{\mathcal{F}_i} \in \mathcal{F}_i$ для любого $i \in I$. Тогда $\bigcap_{i\in I} G_{\mathcal{F}_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$. Так как $\bigcap_{i\in I} G_{\mathcal{F}_i} \lhd G$, то, по определению $\mathcal{F}$-радикала, $\bigcap_{i\in I} G_{\mathcal{F}_i} \subseteq G_{\mathcal{F}} = G_{\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i}$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ – классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}\mathcal{X}$, для любого $\mathcal{F}$ и $\mathcal{X} \neq \emptyset$;

2) если $\mathcal{X}$ – класс, замкнутый относительно факторгрупп, то $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{F}\mathcal{X}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) если $\mathcal{F}=\emptyset$, то произведение $\mathcal{F}\mathcal{X}=\emptyset$ и включение $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}\mathcal{X}$ выполняется. Пусть $\mathcal{F} \neq \emptyset$, тогда существует группа $G \in \mathcal{F}$, и, по определению $\mathcal{F}$-радикала, $G_{\mathcal{F}} = G$; но $\mathcal{X} \neq \emptyset$, следовательно, существует группа $X \in \mathcal{X}$. Ввиду того, что $E \trianglelefteq X$, $E \in \mathcal{X}$. Итак, $E = G/G_{\mathcal{F}} \in \mathcal{X}$. Отсюда, по определению произведения классов Фиттинга, $G \in \mathcal{F}\mathcal{X}$ и поэтому $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}\mathcal{X}$;

2) возьмем $G \in \mathcal{X}$. Так как класс Фиттинга $\mathcal{X}$ замкнутый относительно факторгрупп, то $G/G_{\mathcal{F}} \in \mathcal{X}$. По определению произведения классов Фиттинга, $G \in \mathcal{F}\mathcal{X}$. Лемма доказана.

Обозначим через $SLR(f) = \bigcap_{p\in\pi} f(p)\,\mathcal{E}_p$, где π – носитель H-функции f.

Определение 3.4. Класс Фиттинга $\mathcal{F}$ называется *полулокальным*, если $\mathcal{F} = SLR(f)$ для некоторой полной H-функции f.

Определение 3.5. H-функцию f полулокального класса Фиттинга назовем:

1) *приведенной*, если $f(p) \subseteq \mathcal{F}$ для каждого простого p;

2) *полной*, если $f(p)\,\mathcal{N}_p = f(p)$ для каждого простого p;

3) *полной приведенной*, если она одновременно является и приведенной, и полной, т.е. $f(p)\mathcal{N}_p = f(p) \subseteq \mathcal{F}$ для каждого простого p;

4) *$\mathcal{X}$-постоянной*, если $\mathcal{X}$ – непустой класс Фиттинга и $f(p) = f(q)$, для всех простых p и q из $Supp(f)$.

Пусть $\mathcal{F}$– *полулокальный класс* Фиттинга, определяемый H-функцией f, т.е. $\mathcal{F} = \bigcap_{p\in\pi} f(\mathrm{p})\mathcal{E}_{p'}$.

Определение 3.6. Назовем подгруппу $G_f = \prod_{p\in\pi} G_{f(p)}$ *полулокальным радикалом* группы G, для некоторой приведенной H-функции f, где $\pi = Supp(f) \neq \emptyset$.

Нами установлен ряд свойств, которые приведем в качестве лемм.

Лемма 3.7. *Если G_f – f-радикал группы G и V – подгруппа группы G такая, что $V/G_f \in \mathcal{E}_{\pi'}$, то $V \in \mathcal{F}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $(G_f)_{f(p)}$ – $f(p)$-радикал группы G.

Так как $G_f \lhd G$, то $\left(G_f\right)_{f(p)} = G_f \cap G_{f(\mathrm{p})} = G_{f(\mathrm{p})}$.

Так как $G_f \in \mathcal{F}$, то $G_f/(G_f)_{f(p)} = G_f/G_{f(\mathrm{p})} \in \mathcal{E}_{\pi'}$.

Ввиду изоморфизма $V_{f(p)}G_f/V_{f(p)} \cong$ $\cong G_f/G_f \cap V_{f(p)} \cong G_f/G_{f(\mathrm{p})}/\, G_f \cap V_{f(p)}/G_{f(p)}$ вытекает, что $V_{f(p)}G_f/V_{f(p)} \in \mathcal{E}_{\pi'}$. По условию леммы $V/G_f \in \mathcal{E}_{\pi'}$.

Используя изоморфизм $V/V_{f(p)}G_f \cong$ $\cong V/G_f / V_{f(p)}G_f/G_f$ получаем, что $V/V_{f(p)}G_f \in$ $\in \mathcal{E}_{\pi'}$. Но тогда и группа $V/V_{f(p)}/V_{f(p)}G_f/V_{f(p)} \in$ $\in \mathcal{E}_{\pi'}$. Следовательно, $V/V_{f(p)} \in \mathcal{E}_{\pi'}$, для всех простых $p \in \pi$.

Значит, $V \in \bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathcal{E}_{p'} = \mathcal{F}$. Лемма доказана.

Лемма 3.8. *Если $\mathcal{F}$ = SLR(f) для некоторой полной Н-функции f и $\pi = Supp(f) \neq \emptyset$, то для любого класса Фиттинга $\mathcal{X} \subseteq \bigcap_{p\in\pi} f(p)$ имеет место включение $C_G(G_\mathcal{F}/G_\mathcal{X}) \subseteq G_\mathcal{F}$.*

Доказательство. Предположим от противного, что $C_G(G_\mathcal{F}/G_\mathcal{X})$ не является подгруппой $G_\mathcal{F}$. Тогда в группе G найдется такая нормальная подгруппа $K \subseteq C$, что главный фактор $K/K\cap G_f$ является нетривиальным. Действительно, согласно предположению $C \cap G_f \neq K$ для некоторой нормальной подгруппы K.

Очевидно, что $C \cap G_f = K \cap G_f$ и поэтому $K/C \cap G_f \simeq KG_\mathcal{F}/G_\mathcal{F}$. Итак, $K/K\cap G_f$–нетривиальная элементарная абелева p-группа. Так как $K \subseteq C_G(G_\mathcal{F}/G_\mathcal{X})$, то $K \subseteq C_G(K \cap G_\mathcal{F}/G_\mathcal{X})$. Но тогда $[K^\mathcal{A}, K] \subseteq [G_\mathcal{F} \cap K, K] \subseteq G_\mathcal{X}$. Следовательно, $K/G_\mathcal{X}$ – нильпотентная группа класса нильпотентности не более 2.

Пусть $P/G_\mathcal{X}$ – неединичная нормальная силовская p-подгруппа группы $K/G_\mathcal{X}$. Тогда, очевидно, $P \lhd G$ и $PG_\mathcal{F} = KG_\mathcal{F}$. Для доказательства леммы достаточно выяснить, что $P \in \mathcal{F}$.

Пусть q – любое простое число из π. Тогда имеем две следующие возможности:

1. $q \neq p$.

Тогда $\mathcal{N}_p \subseteq \mathcal{E}_{q'}$. Следовательно, $P/G_\mathcal{X} \in \mathcal{E}_{q'}$ и поэтому, ввиду изоморфизма

$P/G_\mathcal{X} \simeq (G_\mathcal{X})^{q'} P/G_\mathcal{X}/(G_\mathcal{X})^{q'}$, получаем, что $P/(G_\mathcal{X})^{q'}$ является q'-группой.

Значит, $P^{q'} \subseteq (G_\mathcal{X})^{q'}$.

С другой стороны, $G_\mathcal{X}/P^{q'} \cap G_\mathcal{X} \cong$ $\cong G_\mathcal{X}P^{q'}/P^{q'} \in \mathcal{E}_{q'}$, поэтому $(G_\mathcal{X})^{q'} \subseteq P^{q'} \cap$ $\cap G_\mathcal{X} \subseteq P^{q'}$.

Итак, $(G_\mathcal{X})^{q'} = P^{q'}$ для всех $q \in \pi$ и $q \neq p$. Значит, $P \in f(p)\mathcal{E}_{p'} = f(p)\mathcal{N}_p\,\mathcal{E}_{p'}$, для $q \neq p$ из π.

2. $q = p$.

Рассуждая аналогично, как и в случае 1, получаем равенство $P^{\mathcal{N}_p} = (G_\mathcal{X})^{q'}$ и $P^{\mathcal{N}_p} \in f(p)$, следовательно, $P \in f(p)\mathcal{N}_p$ и $P \in f(p)\mathcal{N}_p\,\mathcal{E}_{p'}$.

Таким образом, из 1 и 2 имеем, что $P \in \bigcap_{p\in\pi} f(p)\,\mathcal{N}_p\,\mathcal{E}_{p'} = \mathcal{F}$. Лемма доказана.

Лемма 3.9. *Пусть $\mathcal{F} = SLR(f)$ для некоторой полной постоянной Н-функции f и $\pi = Supp(f) \neq \emptyset$. Если X – некоторая $\mathcal{F}$-подгруппа группы G и $X \supseteq G_f$, то $X/G_f \in \mathcal{E}_{\pi'}$.*

Доказательство. Так как $G_\mathcal{F} \trianglelefteq X$, то $G_{f(p)} = (G_\mathcal{F})_{f(p)} = G_\mathcal{F} \cap X_{f(p)}$.

Тогда $[X_{f(p)}, G_\mathcal{F}] \subseteq G_{f(p)}$ и поэтому $X_{f(p)} \subseteq C_G(G_\mathcal{F}/G_{f(p)})$. Так как функция f постоянна, то, по лемме 3.8, $C_G(G_\mathcal{F}/G_{f(p)}) \subseteq G_\mathcal{F}$. Следовательно, $X_{f(p)} = G_{f(p)}$ для всех простых p из π. Из того, что $X \in \mathcal{F}$, следует, что $X/X_{f(p)}$ является p'-группой для каждого простого $p \in \pi$ и поэтому, $X/X_f \in \bigcap_{p\in\pi} \mathcal{E}_{p'} = \mathcal{E}_{\pi'}$. Лемма доказана.

4. Инъекторы в полулокальных классах

Основной результат работы представляет

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{X}$ – непустой класс Фиттинга и $\mathcal{F} = SLR(f)$ для полной $\mathcal{X}$-постоянной Н-функции f с носителем π, и G такая группа, что $G/G_\mathcal{X}$ разрешима. Тогда и только тогда подгруппа V является $\mathcal{F}$-инъектором группы G, когда V/G_f – холлова π'-подгруппа группы G/G_f.*

Доказательство. По условию теоремы $f(p) = \mathcal{X}$ для всех простых $p \in Supp(f)$ и $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{F}$. Следовательно, по лемме 2.1, $G_\mathcal{X} \subseteq G_\mathcal{F}$. Так как по условию $G/G_\mathcal{X}$ разрешима, то факторгруппа $G/G_\mathcal{X}/G_\mathcal{F}/G_\mathcal{X}$ также разрешима. Согласно лемме 1.9, $G/G_\mathcal{X}/G_\mathcal{F}/G_\mathcal{X} \cong G/G_\mathcal{F}$. Так как $\mathfrak{S}$ является классом групп, то наряду с каждой группой он содержит ей изоморфную группу. Следовательно, $G/G_\mathcal{F}$ – разрешимая группа, а значит, в ней, по теореме 1.12, для класса Фиттинга $\mathcal{F}$ существуют $\mathcal{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.

Пусть V – $\mathcal{F}$-инъектор группы G. Тогда V является $\mathcal{F}$-максимальной подгруппой группы G. Так как $V \cap G_\mathcal{F}$ является $\mathcal{F}$-инъектором группы $G_\mathcal{F}$, то $V \cap G_\mathcal{F} = G_\mathcal{F}$. Отсюда $V \supseteq G_\mathcal{F}$. Тогда, по лемме 3.9, $V/G_f \in \mathcal{E}_{\pi'}$. Кроме того, так как G/G_f – разрешимая группа, то она σ-разрешимая группа для любого множества простых чисел σ. Следовательно, она π'-разрешима и поэтому в G/G_f, по теореме 1.13, существуют π'-холловы подгруппы и любые две из них сопряжены.

Если теперь $V/G_f \subset F/G_f$, где F/G_f – некоторая π'-холлова подгруппа группы G/G_f, то $V \subset F$ и $F \in \mathcal{F}$, по лемме 3.7, что противоречит $\mathcal{F}$-максимальности V в G. Следовательно, $V = F$ и V/G_f – π'-холлова подгруппа G/G_f.

Докажем обратное утверждение. Пусть G — контрпример минимального порядка и М — произвольная максимальная нормальная подгруппа группы G. Пусть V/G_f — π'-холлова подгруппа G/G_f. Так как H-функция f постоянна, то $G_{f(p)} = G_f$ для всех простых $p \in \pi$. Тогда из того, что $\mathrm{M} \lhd G$, следует $\mathrm{M}_f = G_f \cap \mathrm{M}$.

Если $G_f \nsubseteq \mathrm{M}$, тогда $\mathrm{M} \lhd \mathrm{M}G_f \lhd G$. Последнее противоречит выбору М в качестве максимальной подгруппы, следовательно, $\mathrm{M}G_f = G$. Из $\mathrm{M}_f = G_f \cap \mathrm{M}$ и $\mathrm{M}G_f = G$ получаем $G/G_f \cong \mathrm{M}/\mathrm{M}_f$. Следовательно, по утверждению 2 леммы 1.10, подгруппа $V \cap \mathrm{M}/\mathrm{M}_f$ является π'-холловой подгруппой M/M_f. Так как $|\mathrm{M}| < |G|$, то по индукции $V \cap \mathrm{M}$ – $\mathcal{F}$-инъектор группы М. Чтобы доказать, что V — $\mathcal{F}$-инъектор группы G, мы должны установить, что V — $\mathcal{F}$-максимальная подгруппа группы G. Так как $V/G_f \in \mathfrak{E}_{\pi'}$, то, по лемме 3.7, $V \in \mathcal{F}$. Пусть, от противного, $V \subset F$, где F — $\mathcal{F}$-максимальная подгруппа группы G. Так как $F \supseteq G_{\mathcal{F}}$, то, по лемме 4.4, $F/G_f \in \mathfrak{E}_{\pi'}$. Но тогда из того, что V/G_f — π'-холлова подгруппа G/G_f, следует $V/G_f = F/G_f$. Итак, V является $\mathcal{F}$-максимальной подгруппой группы G и $V \cap \mathrm{M}$ – $\mathcal{F}$-инъектор группы М для любой максимальной нормальной подгруппы М группы G. Следовательно, по утверждению 3 леммы 1.10, V— $\mathcal{F}$-инъектор пы G. Получили противоречие.

Предположим теперь, что G_f является подгруппой М. Тогда $\mathrm{M}_f = G_f$ и, по утверждению 1 леммы 1.10, $V \cap \mathrm{M}/\mathrm{M}_f$ является π'-холловской подгруппой M/M_f. Следовательно, по индукции $V \cap \mathrm{M}$ – $\mathcal{F}$-инъектор группы М. Рассуждая аналогично, снова заключаем, что V – $\mathcal{F}$-инъектор группы G. Полученное противоречие доказывает теорему. Теорема доказана.

В универсуме $\mathcal{S}$ – всех конечных разрешимых групп, из теоремы 4.1 получаем ряд следствий:

Следствие 4.2. *Для любого класса Фиттинга $\mathcal{F}$ = SLR(f) с полной постоянной H-функцией f, π=Supp(f)$\neq \emptyset$ и любой группы G ее $\mathcal{F}$-инъекторами являются, в точности, подгруппы вида $G_{\pi'} G_f$, где $G_{\pi'}$ – некоторая π'-холловская подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть $V/G_{\mathcal{F}}$ – холлова π'-подгруппа группы G/G_f. Но тогда, по теореме Холла–Чунихина [2], $V/G_f = G_{\pi'}G_f/G_f$ для некоторой холловой π'-подгруппы $G_{\pi'}$ группы G. Теперь следствие вытекает непосредственно из теоремы 4.1.

Следствие 4.3. *Для класса Фиттинга $\mathcal{F}$ = SLR(f) с полной постоянной H-функцией f, π=Supp(f)$\neq \emptyset$ и любой группы G ее $\mathcal{F}$-инъектор характеризуется следующим образом: подгруппа V является $\mathcal{F}$-инъектором G в том и только в том случае, когда V $\mathcal{F}$-максимальна в G и $V \supseteq G_{\mathcal{F}}$.*

Доказательство. Пусть $V \supseteq G_{\mathcal{F}}$, V $\mathcal{F}$-максимальна в G; тогда, по лемме 3.9, $V/G_{\mathcal{F}}$ является π'-подгруппой. Если $V/G_{\mathcal{F}} \subset F/G_{\mathcal{F}}$, где $F/G_{\mathcal{F}}$ π'-холловская подгруппа группы $G/G_{\mathcal{F}}$, то, по лемме 3.7, $F \in \mathcal{F}$ и поэтому, ввиду $\mathcal{F}$-максимальности V в G, подгруппа $V/G_{\mathcal{F}}$ является π'-холловской подгруппой группы $V/G_{\mathcal{F}}$. Следовательно, по теореме 4.1 V является $\mathcal{F}$-инъектором группы G. Обратное утверждение вытекает непосредственно из определения $\mathcal{F}$-инъектора.

Следствие 4.4. *Подгруппа V группы G является π-замкнутым инъектором G тогда и только тогда, когда V максимальная из π-замкнутых подгрупп G и содержит π-замкнутый радикал.*

Доказательство. Легко видеть, что класс $\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{E}_{\pi'}$ – π-замкнутых групп, совпадающий с *SLR(f)*, для полной постоянной H-функции f такой, что $f(p) = \mathfrak{E}_{\pi}$, для всех простых $p \in \pi$. Теперь утверждение вытекает из следствия 4.3. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fischer, B. Injector endicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gashuts, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.
2. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Cruyter, 1992. – 891 p.
3. Шеметков, Л.А. О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков // Конечные группы. Труды Гомельского семинара. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 207–212.
4. Сементовский, В.Г. Инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1984.
5. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. Esquerro. – Amsterdam: Springer, 2006. – 386 p.
6. Воробьев, Н.Т. Метод Хартли для инъекторов / Н.Т. Воробьев, И.В. Дудкин // Учен. зап. УО «ВГУ имени П.М. Машерова». – 2002. – Т. 1. – С. 181–193.
7. Hertley, B. On Fisher's dualization of formation theory / B. Hertley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
8. Ведерников, В.А. Элементы теории классов групп / В.А. Ведерников. – Смоленск, 1988. – С. 96.
9. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: учеб. пособие / В.С. Монахов. – Минск: Высшая школа, 2006. – 207 с.
10. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. – 158 с.
11. Воробьев, Н.Т. О предположении Хоукса для радикальных классов / Н.Т. Воробьев // Сибирск. матем. журнал. – 1996. – Т. 37, № 5. – Р. 1296–1302.

R E F E R E N C E S

1. Fischer B. Injector endicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gashuts, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102. № 5. S. 337–339.
2. Doerk K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Cruyter, 1992. – 891 p.
3. Shemetkov L.A. *O podgruppakh π-razreshimikh gruppakh* // *Konechniye gruppi. Trudi Gomelskogo seminara* [On subgroups of π-soluble groups // Finite groups. Works of the Gomel seminar], Minsk: Science and technology, 1975, P. 207–212.
4. Sementovsky V.G. *Inyektori konechnikh grupp // Issledovaniye normalnogo i podgruppovogo stroyeniya konechnikh grupp* [Injectors of finite groups // Research of a normal and subgroup structure of final groups], Minsk: Science and technology, 1984.
5. Ballester-Bolinches A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. Esquerro. – Amsterdam: Springer, 2006. – 386 p.
6. Vorobyev N.T., Dudkin I.V. *Ucheniye zapiski VGU* [Scientific Notes of Vitebsk State University], 2002, 1, pp. 181–193.
7. Hertley B. On Fisher's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. Vol. 3, № 2. P. 193–207.
8. Vedernikov V.A. *Elementi teorii klassov grupp* [Elements of the Theory of Classes of Groups], Smolensk, 1988, 96 p.
9. Monahov V.S. *Vvedeniye v teoriyu konechnikh grupp i ikh klassov: uchebnoye posobiye* [Introduction into the Theory of Finite Groups and their Classes: Manual], Minsk: Visshaya shkoila, 2006, 207 p.
10. Chunihin S.A. *Podgruppi konechnikh grupp* [Subgroups of Finite Groups], Minsk: Nauka i tekhnika, 1964, 158 p.
11. Vorobyev N.T. *Sibirski matematicheski zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1996, 37(5), pp. 1296–1302.

Поступила в редакцию 25.06.2014. Принята в печать 18.08.2014
Адрес для корреспонденции: e-mail: kochergina_olga-l@mail.ru – Кочергина О.Ю.