Матэматыка

УДК 512.542

О характеризациях инъекторов конечных групп

Н.Т. Воробьев, О.Ю. Кочергина
Учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В данной работе описаны □-инъекторы конечных групп для полулокальных классов Фиттинга, а также расширен результат Дёрка–Хоукса на случай □-разрешимой группы □, где □ – множество всех простых делителей порядков всех групп из □. Основные результаты представляют следующие теоремы:

Теорема. *Пусть □ – множество Фиттинга □-разрешимой группы □, где □ – множество всех простых делителей порядков всех групп из □, и □□□□. Тогда:*

а) множество □$_{□/□□}$={S□□/□□: S – □-инъектор S□□} является множеством Фиттинга группы □/□□;

б) если □ – □-инъектор группы □, то □□/□□ является □$_{□/□□}$-инъектором группы □/□□.

Следствием данной теоремы является результат Дёрка–Хоукса:

Следствие. *Пусть □ – множество Фиттинга разрешимой группы □ и □□□□. Тогда:*

а) множество □$_{□/□}$={S□/□: S – □-инъектор S□} является множеством Фиттинга группы □/□;

б) если □ – □-инъектор группы □, то □□/□ является □$_{□/□□}$ -инъектором группы □/□.

Теорема. *Если □ – полулокальный класс Фиттинга для некоторой полной □-постоянной H-функции f с носителем □ и □□ такая группа, что □/□□$_□$ разрешима, то подгруппа □ является □-инъектором группы □ тогда и только тогда, когда □/□$_□$ является холловой □′- подгруппой группы □/□$_□$.*

Ключевые слова: *класс Фиттинга, произведение классов Фиттинга, множество Фиттинга, □-инъектор, полулокальный радикал.*

On Characterization of Injectors of Finite Groups

N.T. Vorobyev, O.Y. Kochergina
Education establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

In this paper we describe □-injectors of finite groups for semilocal classes of Fitting and we expanded Doerk–Hawkes's result for a case of □-soluble group □, where □ is a set of all simple dividers of orders of all groups from □. The main results follow from the following theorems:

Theorem. *Let □ be a Fitting set of □-soluble group □, where □ is a set of all simple dividers of orders of all groups from □, and let □□□. Then:*

a) the set □$_{□/□}$={S□/□: S is an □-injector of S□} is a Fitting set of □/□;

b) if □ is an □-injector of □, then □□/□ is an □$_{□/□}$-injector of □/□.

Doerk–Hawkes's result is a consequence of this theorem:

Consequence. *Let □ be a Fitting set of soluble group □, let and □□□. Then:*

a) the set □$_{□/□}$={S□/□: S is an □-injector of S□} is a Fitting set of □/□;

b) if □ is an □-injector of □, then □□/□ is an □$_{□/□}$-injector of □/□.

Theorem. *If □ is a semilocal class of Fitting for some full □-constant of H-function f with the function carrier □ and □ such group that □/□$_□$ is a soluble group, then a subgroup □ is an □-injector of □ if and only if □/□$_□$ is a □′-subgroup of Holl of □/□$_□$.*

Key words: *Fitting class, product of Fitting classes, Fitting set, □-injector, semilocal radical.*

Основополагающим результатом в теории классов конечных разрешимых групп является теорема Гашюца–Фишера–Хартли [1] о том, что в любой конечной разрешимой группе для любого класса Фиттинга □ существуют □-инъекторы и любые два из них сопряжены. Заметим, если □=□$_p$ – класс всех p-групп и □= □$_□$ – класс конечных разрешимых □-групп, из указанной теоремы вытекают фундаментальные теоремы Силова и Холла [2].

Цель работы – нахождение новых классов сопряженных инъекторов в частично разрешимой группе и их характеризация.

Напомним, что класс групп □ называется классом Фиттинга, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных □-подгрупп. Подгруппа □ группы □ называется ее -инъектором, если V N является -максимальной подгруппой группы N для любой субнормальной подгруппы N группы □.

Теорема Гашюца–Фишера–Хартли обобщалась на случай частично разрешимых групп в работах Шеметкова [3], Сементовского [4] и Баллестера-Болинше [5]. Вместе с тем возникает задача нахождения характеризации -инъекторов в терминах радикалов групп и холловых подгрупп для групп, в общем случае, не обязательно разрешимых. Данная задача в случае конечных разрешимых групп была решена Н.Т. Воробьевым и И.В. Дудкиным [6]. При решении указанной задачи важно выяснить: будет ли каждая □-максимальная подгруппа, содержащая □-радикал группы, ее □-инъектором?

Для решения указанной задачи мы используем метод локализации, который был впервые предложен Хартли [7] и состоит в следующем. Пусть *P* – множество всех простых чисел. Тогда *H*-функцией *f* называют отображение множества *P* во множество классов Фиттинга. Следуя Хартли, мы определим полулокальные классы Фиттинга и изучим свойства полулокальных радикалов. Основной результат работы – критерий □-инъектора в терминах полулокальных радикалов и холловых подгрупп. Доказано, что если □ – полулокальный класс Фиттинга для некоторой полной □-постоянной *H*-функции *f* с носителем и такая группа, что $G/$ разрешима, то подгруппа □ является □-инъектором группы тогда и только тогда, когда V/G холлова □′- подгруппа группы G.

1. Предварительные сведения

Определение 1.1 [8]. *Классом Фиттинга* называется класс групп , удовлетворяющий следующим требованиям:

1) каждая нормальная подгруппа любой группы из также принадлежит ;

2) из того, что нормальные подгруппы *M* и *N* принадлежат , всегда следует, что их произведение *MN* принадлежит .

Определение 1.2 [8]. Пусть – непустой класс Фиттинга. Подгруппа группы называется □-*радикалом* группы, если она является максимальной из нормальных подгрупп группы , принадлежащих .

Определение 1.3 [8]. Пусть и классы Фиттинга. *Произведением* классов Фиттинга и называется класс всех тех групп , для которых / принадлежит .

Определение 1.4 [3]. Класс групп называется *формацией*, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in$ и *H* $\lhd$, то /*H* $\in$;

2) если *H/A* $\in$ и *H/B* $\in$, то *H/*(*A* *B*) $\in$.

Определение 1.5 [9]. *p-Группой* называется группа, порядок которой есть степень простого числа p.

Обозначим через некоторое множество простых чисел и □′ – дополнение множества в *P*.

Группа называется □-группой, если ее порядок есть □- число, т.е. все простые делители порядка группы □ принадлежат □.

Определение 1.6 [10]. Группа называется □-*разрешимой*, если она удовлетворяет одному из следующих равносильных условий:

1) порядки композиционных факторов группы являются либо простыми числами из , либо -числами;

2) каждый главный фактор группы имеет своим порядком либо степень простого числа из , либо -число.

Определение 1.7 [11]. Всякое отображение *f*: *P* {классы Фиттинга} называют *функцией Хартли* или *локальной H-функцией*.

Определение 1.8 [2]. Подгруппа *V* группы называется ее □-*инъектором*, если *V* *N* является □-максимальной подгруппой группы *N* для любой субнормальной подгруппы *N* группы .

Лемма 1.9 [10]. *Если N и H – нормальные подгруппы группы , причем H N, то /N изоморфна /H/N/H.*

Лемма 1.10 [2]. *Пусть □ – класс Фиттинга. Для любой группы справедливы следующие утверждения:*

1) если V – □-инъектор □ и □□ □, то V является □-инъектором группы ;

2) если V – □-инъектор □ и : $G \rightarrow$ изоморфизм, то является □-инъектором группы ;

3) если V – □-максимальная подгруппа и V M является □-инъектором M, для любой максимальной нормальной подгруппы M группы , то V – □-инъектор .

Лемма 1.11 [2]. *Если □ субнормальна в и Inj ( ), то K является □-инъектором группы .*

Теорема 1.12 [4]. *Пусть – класс Фиттинга. Тогда, если / разрешимая группа, то в группе существуют □-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Теорема 1.13 [10]. *В любой* □*-разрешимой группе существуют холловы* □*-подгруппы и любые две из них сопряжены.*

Теорема 1.14 [3]. *Пусть* □ *– множество Фиттинга и* □ *является* □*-разрешимой группой, где π – множество всех простых делителей порядков всех групп из* □*, тогда* □ *обладает хотя бы одним* □*-инъектором и любые два из них сопряжены.*

Теорема 1.15 (Фишер, Гашюц и Хартли) [2]. $\mathfrak{I}$ *множество Фиттинга конечной разрешимой группы . Тогда существует единственный класс сопряженных -инъекторов.*

Другие определения и обозначения при необходимости можно найти в [2; 9].

2. Множества Фиттинга и инъекторы

Определение 2.1 [2]. Непустое множество подгрупп группы называется *множеством Фиттинга* группы , если выполняются следующие условия:

1) если $\trianglelefteq$ и S $\in$, то T $\in$
2) если S, T $\in$ и S, T ST, то ST $\in$;
3) если S $\in \mathcal{F}$ и $x \in G$, S^x $\in$

Определение 2.2 [2]. Если U $\leq$ и U $\in$, то U называют □*-подгруппой* □.

Определение 2.3 [2]. Пусть □ класс Фиттинга, G – груп *Следом* класса Фиттинга □ в называют множество подгрупп $Tr_□$ ( )= $\{H \leq G : H \in$ группы .

Теорема 2.4. *Для любого непустого класса Фиттинга и любой группы след* $Tr_□$ ( ) *является множеством Фиттинга.*

Доказательство. Обозначим $Tr_□$ ( )= , т.е. $\mathcal{F}$это множество всех □□подгрупп группы . Если $\trianglelefteq$ и S $\in$, т.е. S $\in$ и S $\leq$,то, по определению класса Фиттинга, T $\in$, значит, $T \in$. Первое условие определения 2.1 для множества доказано.

Пусть S, T ST и S, T $\in$. Тогда S,T $\in$ и ST $\in$, т.к. класс замкнут относительно произведений нормальных подгрупп. Следовательно, т.к. ST $\leq$, имеем ST $\in$. Второе условие определения 2.1 для множества выполняется.

Если S $\in$, т.е. S $\in$ и S $\leq$,ввиду того, что □ – класс групп, S^x □ □, для любого x $\in$. Следовательно, S^x $\in$. Ввиду того, что S^x $\leq$, заключаем, что S^x $\in$ Третье условие определения 2.1 доказано. Следовательно, $\mathfrak{I}$ множество Фиттинга группы . Теорема доказана.

Из данной теоремы следует, что каждому классу Фиттинга группы соответствует множество $Tr_□$( ), которое является множеством Фиттинга; однако не каждое множество Фиттинга является следом класса Фиттинга.

Примеры [2]:

1. По теореме 2.1 все следы классов Фиттинга в группе □ являются примерами множеств Фиттинга.

2. Если N $\leq$, то множество всех субнормальных подгрупп группы N является множеством Фиттинга.

3. Если □ – p-группа, то множествами Фиттинга группы , которые являются следами классов Фиттинга, будут множества и $\{U: U \leq$.

Теорема 2.5. *Пусть* □ *– множество Фиттинга* □*-разрешимой группы* □*, где* □ *– множество всех простых делителей порядков всех групп из* □*, и* □□□□*. Тогда:*

а) множество $□_{□/□}$*={S*□*/*□*:S –* □*-инъектор S*□*} является множеством Фиттинга группы* □*/*□*;*

б) если □ *–* □*-инъектор группы* □*, то* □□*/*□ *является* $□_{□/□}$ *-инъектором группы* □*/*□*.*

Доказательство. Пусть является -разрешимой группой. Тогда также -разрешимая группа. Согласно теореме 1.14 в группе существуют инъекторы и любые два из них сопряжены в этой группе. Теперь мы можем построить следующее множество подгрупп группы G:

$□_{□/□}$={S□/□:S – □-инъектор S□}.

Пусть $K/N \trianglelefteq SN$, где $S \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{F}}(S$.

Так как $K \trianglelefteq$, то $S \cap K \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{F}}$, по лемме 1.11. Кроме того, $K = SN \cap K = (S \cap K$. Значит, K= $(S \cap K)N/N \in \mathcal{F}$. Следовательно, для множества $\mathcal{F}$ выполняется первое условие определения множества Фиттинга.

Пусть $S_iN/N \in \mathcal{F}$, а значит, $S_i \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{F}}(S$ и $S_iN \trianglelefteq (S_1N)(S_2$, где $i \in \{1$. Обозначим $T = (S_1N)(S_2$, и $\mathcal{F}$-инъек: и $R_i = W$, для $i \in \{1$. Так как $S_iN \leq$, то $R_i \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{F}}(S$ и $S_i \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{F}}(S_i$. Следовательно, , сопряжены в по теореме 1.12. В частности, получаем $R_iN =$. Значит, $T = S_1NS$ = $R_1R_2N \leq WN$. Отсюда T $= WN/N \in \mathcal{F}$, а значит, $\mathcal{F}$ удовлетворяет второму условию определения 2.1.

Так как $\mathfrak{I}$ множество Фиттинга, то $\mathcal{F} =$, для любого g $\in$, что означает, что $S^g \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{F}}(S^g$. Следовательно, $□_{□/□}$ удовлетворяет третьему условию определения 2.1. Итак, $\mathcal{F}_{G/}$ множество Фиттинга группы G.

Пусть $K/N \trianglelefteq\trianglelefteq G$, то $V \cap K \in \mathrm{Inj}_{\mathcal{F}}$, что следует из того, что □□□□ и леммы 1.11. Кроме того $V \cap K \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}((V \cap K)$, ввиду $KN =$. Следовательно, группа $(V \cap K)N/N \in \mathfrak{F}$; покажем, что и эта группа $\mathfrak{F}_i$-максимальна в K.

Очевидно, что SN есть $\mathfrak{F}_C$-подгруппа группы K, включающей $(V \cap K)N$, при условии, что $S \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}$, к тому же, согласно теореме 1.15, $V \cap K \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}($, а значит, V и сопряжены в , и, как следствие этого, $(V \cap K)/N = SN$. Это доказывает, что $(V \cap K)N/N = VN/N \cap K$ является $\mathfrak{F}_i$-максимальной в K. Поэтому VN является $\mathfrak{F}$-инъектором для G. Теорема доказана.

Следствием данной теоремы в разрешимом случае является результат Дёрка–Хоукса, который приведем как

Следствие 2.6 [2]. *Пусть □ – множество Фиттинга разрешимой группы □ и □□□□. Тогда:*

а) *множество □□/□={S□/□: S – □-инъектор S□} является множеством Фиттинга группы □/□;*

б) *если □ – □-инъектор группы □, то □□/□ является □□/□ -инъектором группы □/□.*

3. Некоторые свойства полулокальных радикалов

Приведем вначале в качестве лемм простейшие свойства произведений классов Фиттинга и радикалов, которые будем использовать для доказательства основной теоремы.

Лемма 3.1. *Если и – классы Фиттинга и* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $G_{\mathfrak{F}} \subseteq G$

Доказательство. По определению -радикала группы и условию леммы $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F} \subseteq$, а также $G_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq$. По определению -радикала группы , $G_{\mathfrak{H}}$ максимальная из нормальных подгрупп группы принадлежащих . Следовательно, $G_{\mathfrak{F}} \subseteq$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть* $\{\mathfrak{F}_i | i\}$ *– множество классов Фиттинга, где I – произвольное непустое множество. Тогда для любой группы справедливо равенство* $G_{\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i} = \bigcap_{i \in I} G$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I}$. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq$ для любого i и по лемме 3.1 для любого i справедливо включение $G_{\mathfrak{F}} \subseteq G$ Следовательно, $G_{\mathfrak{F}} \subseteq \bigcap_{i \in I}$, т.е. $G_{\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i} \subseteq \bigcap_{i \in I}$.

С другой стороны, $\bigcap_{i \in I} G_{\mathfrak{F}_i} \trianglelefteq G_{\mathfrak{F}_i} \in$ для любого i. Тогда $\bigcap_{i \in I} G_{\mathfrak{F}_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i =$. Так как $\bigcap_{i \in I} G_{\mathfrak{F}_i}$, то, по определению -радикала, $\bigcap_{i \in I} G_{\mathfrak{F}_i} \subseteq G_{\mathfrak{F}} = G_{\bigcap_{i \in I}}$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть и – классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F} \subseteq$ *для любого и* $\mathfrak{X}$*;*

2) *если – класс, замкнутый относительно факторгрупп, то* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$

Доказательство. 1) если = , то произведение = и включение $\mathfrak{F} \subseteq$ выполняется. Пусть $\mathfrak{F} \neq$ тогда существует группа G, и, по определению -радикала, = ; но $\mathfrak{X}$, следовательно, существует группа X $\in$. Ввиду того, что E , $E \in$. Итак, = / $G_{\mathfrak{F}} \in$. Отсюда, по определению произведения классов Фиттинга, $G \in$ и поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$

2) возьмем $G \in$. Так как класс Фиттинга замкнутый относительно факторгрупп, то / $G_{\mathfrak{F}} \in$. По определению произведения классов Фиттинга, $G \in$. Лемма доказана.

Обозначим через $SLR(f) = \bigcap_{p \in \pi} f(p)$, где – носитель H-функции f.

Определение 3.4. Класс Фиттинга называется *полулокальным*, если = $SLR(f)$ для некоторой полной H-функции f.

Определение 3.5. H-функцию f полулокального класса Фиттинга назовем:

1) *приведенной*, если $f(p) \subseteq$ для каждого простого p;

2) *полной*, если $f(p)$ = $f(p)$ для каждого простого p;

3) *полной приведенной*, если она одновременно является и приведенной, и полной, т.е. $f(p)$ $= f(p)$ $\subseteq$ для каждого простого p;

4) □-*постоянной*, если □ – непустой класс Фиттинга и $f(p)= f(q)$, для всех простых p и q из $Supp(f)$.

Пусть *полулокальный класс* Фиттинга, определяемый H-функцией f, т.е. = $\bigcap_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{E}$

Определение 3.6. Назовем подгруппу $G_f = \prod_{p \in \pi} G_f$ *полулокальным радикалом* группы , для некоторой приведенной H-функции f, где $= Supp(f)$ $\neq$

Нами установлен ряд свойств, которые приведем в качестве лемм.

Лемма 3.7. *Если – -радикал группы и V – подгруппа группы □ такая, что V/* $G_f \in$ *то* V $\in$

Доказательство. Рассмотрим $(G_f)_{f(p)}$ – f-радикал группы .

Так как $G_f \trianglelefteq G$, то $(G_f)_i =$ $G_f \cap G_i =$ G_i.

Так как $G_f \in$ то $G_f/(G_f)_i =$ $G_f/G_{f(p)} \in$

Ввиду изоморфизма $V_{f(p)}G_f/V_f \cong G_f/G_f \cap V_f \cong G_f/G_{f(p)}/G_f \cap V_{f(p)}/G_f$ вытекает, что $V_{f(p)}G_f/V_{f(p)} \in$. По условию леммы $V/G_f \in$.

Используя изоморфизм $V/V_{f(p)} \cong V/G_f/V_{f(p)}G_f$, получаем, что $V/V_{f(p)}G_f \in$. Но тогда и группа $V/V_{f(p)}/V_{f(p)}G_f/V_{f(p)} \in$. Следовательно, $V/V_{f(p)} \in$, для всех простых $p \in$.

Значит, $V \in \bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{E}_{p'} =$ Лемма доказана.

Лемма 3.8. *Если* $= SLR(f)$ *для некоторой полной H-функции f и* $\pi = Supp(f) \neq$ *то для любого класса Фиттинга* $\mathfrak{X} \subseteq \bigcap_{p\in\pi} f$ *имеет место включение* $C_G(G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{X}}) \subseteq$.

Доказательство. Предположим от противного, что $C_G(G_{\mathfrak{F}}/G$ не является подгруппой . Тогда в группе найдется такая нормальная подгруппа $K \subseteq$ что главный фактор $K/K \cap$ является нетривиальным. Действительно, согласно предположению $C \cap G_f \neq$ для некоторой нормальной подгруппы .

Очевидно, что $C \cap G_f = K \cap$ и поэтому $K/C \cap G_f \cong KG_{\mathfrak{F}}/$. Итак, $/ \cap$ нетривиальная элементарная абелева p-группа. Так как $K \subseteq C_G(G_{\mathfrak{F}}/C$, то $K \subseteq C_G(K \cap G_{\mathfrak{F}}/C$. Но тогда $[K^{\dots}, K] \subseteq [G_{\mathfrak{F}} \cap K, K] \subseteq$. Следовательно, $K/$ – нильпотентная группа класса нильпотентности не более 2.

Пусть P / – неединичная нормальная силовская p-подгруппа группы $K/$. Тогда, очевидно, $P \trianglelefteq P$ $G_{\mathfrak{F}} = K$ Для доказательства леммы достаточно выяснить, что P .

Пусть q любое простое число из . Тогда имеем две следующие возможности:

1. q p.

Тогда $\mathfrak{N}_p \subseteq$. Следовательно, P $/G_{\mathfrak{X}} \in$ и поэтому, ввиду изоморфизма P $/G_{\mathfrak{X}} \cong (G_{\mathfrak{X}})^{q'}$ $P/G_{\mathfrak{X}}/(G_{\mathfrak{X}}$, получаем, что $P/(G_{\mathfrak{X}}$ является q-группой.

Значит, $P^{q'} \subseteq (G_{\mathfrak{X}}$.

С другой стороны, $G_{\mathfrak{X}}/P^{q'} \cap G_{\mathfrak{X}} \cong G_{\mathfrak{X}}P^{q'}/P^{q'} \in$, поэтому $(G_{\mathfrak{X}})^{q'} \subseteq P^{q'} \cap G_{\mathfrak{X}} \subseteq$.

Итак, $(G_{\mathfrak{X}})^{q'} = E$ для всех $q \in$ и q p. Значит, $P \in f(p)\mathfrak{E}_{p'} = f(p)\mathfrak{N}_p$, для $q \neq p$ и

2. $q=p$.

Рассуждая аналогично, как и в случае 1, получаем равенство $P^{\mathfrak{N}_p} = (G_{\mathfrak{X}}$ и $P^{\mathfrak{N}_p} \in f$, следовательно, $P \in f(p)$ и $P \in f(p)\mathfrak{N}_p$.

Таким образом, из 1 и 2 имеем, что $P \in \bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'} =$ Лемма доказана.

Лемма 3.9. *Пусть* $\mathfrak{F} = SLR$ *для некоторой полной постоянной H-функции f и* $= Supp(f) \neq$ *. Если X некоторая -подгруппа группы* G *и* $X \supseteq G_f$, *то* $X/G_f \in$.

Доказательство. Так как $G_{\mathfrak{F}}X$, то $G_{f(p)} = (G_{\mathfrak{F}})_f = G_{\mathfrak{F}} \cap X_f$

Тогда $[X_{f(p)}, G_{\mathfrak{F}}] \subseteq G_f$ и поэтому $X_{f(p)} \subseteq C_G(G_{\mathfrak{F}}/G_f$. Так как функция f постоянна, то, по лемме 3.8, $C_G(G_{\mathfrak{F}}/G_{f(p)}) \subseteq$ Следовательно, $X_{f(p)} = G_{f(p)}$ для всех простых p из Из того, что X , следует, что X/X_f является -группой для каждого простого $p \in$ и поэтому, $X/X_f \in \bigcap_{p\in\pi}$ = . Лемма доказана.

4. Инъекторы в полулокальных классах

Основной результат работы представляет

Теорема 4.1. *Пусть – непустой класс Фиттинга и* $\mathfrak{F} = SLR$ *для полной -постоянной H-функции f с носителем и такая группа, что* $G/$ *разрешима. Тогда и только тогда подгруппа V является -инъектором группы , когда* V/G_f *холлова -подгруппа группы* G_f.

Доказательство. По условию теоремы $f(p)=$ для всех простых $p \in Supp$ и $\mathfrak{X} \subseteq$. Следовательно, по лемме 2.1, $G_{\mathfrak{X}} \subseteq$. Так как по условию $G/$ разрешима, то факторгруппа $G/G_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{F}}/$ также разрешима. Согласно лемме 1.9, $G/G_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{X}} \cong G/$. Так как является классом групп, то наряду с каждой группой он содержит ей изоморфную группу. Следовательно, G/G_f разрешимая группа, а значит, в ней, по теореме 1.12, для класса Фиттинга существуют -инъекторы и любые два из них сопряжены.

Пусть V –-инъектор группы Тогда V является -максимальной подгруппой группы. Так как $V \cap$ является -инъектором группы , то $V \cap G_{\mathfrak{F}} =$. Отсюда $V \supseteq$. Тогда, по лемме 3.9, $V/G_f \in$. Кроме того, так как G/G_f разрешимая группа, то она -разрешимая группа для любого множества простых чисел . Следовательно, она -разрешима и поэтому в G_f, по теореме 1.13, существуют -холловы подгруппы и любые две из них сопряжены.

Если теперь $V/G_f \subseteq F$, где F/G_f некоторая -холлова подгруппа группы G_f, то

$V \subset$ и $F \in$ по лемме 3.7, что противоречит -максимальности V в . Следовательно, $V =$ и V/G_f – -холлова подгруппа $G/$

Докажем обратное утверждение. Пусть G контрпример минимального порядка и M произвольная максимальная нормальная подгруппа группы Пусть V/G_f – -холлова подгруппа G_f. Так как H-функция f постоянна, то $G_{f(p)} =$ для всех простых p $\in$. Тогда из того, что $M \lessdot$ следует $M_f = G_f \cap$.

Если $G_f \nsubseteq$, тогда $M \lessdot MG_f$. Последнее противоречит выбору в качестве максимальной подгруппы, следовательно, $MG_f =$. Из $M_f = G_f \cap$ и $MG_f =$ получаем $G/G_f \cong M/$. Следовательно, по утверждению 2 леммы 1.10, подгруппа $V \cap M/$ является -холловой подгруппой $M/$ Так как $|M| <$, то по индукции $V \cap$ – -инъектор группы Чтобы доказать, что V – -инъектор группы G, должны установить, что V – -максимальная подгруппа группы . Так как $V/G_f \in$ то, по лемме 3.7, $V \in$. Пусть, от противного, $V \subset$, где F – -максимальная подгруппа группы . Так как $F \supseteq$, то, по лемме 4.4, $F/G_f \in$. Но тогда из того, что V/G_f – -холлова подгруппа $G/$, следует $V/G_f = F/$. Итак, является -максимальной подгруппой группы и $V \cap$ – -инъектор группы для любой максимальной нормальной подгруппы группы . Следовательно, по утверждению 3 леммы 1.10, V – -инъектор группы . Получили противоречие.

Предположим теперь, что является подгруппой . Тогда $M_f =$ и, по утверждению 1 леммы 1.10, $V \cap M/$ является -холловской подгруппой $M/$. Следовательно, по индукции $V \cap$ – -инъектор группы Рассуждая аналогично, снова заключаем, что V – -инъектор группы . Полученное противоречие доказывает теорему. Теорема доказана.

В универсуме – всех конечных разрешимых групп, из теоремы 4.1 получаем ряд следствий:

Следствие 4.2. *Для любого класса Фиттинга $\mathcal{F}$ = SLR(f) с полной постоянной H-функцией f, π=Supp(f) $\neq \emptyset$ и любой группы ее $\mathcal{F}$-инъекторами являются, в точности, подгруппы вида $G_{\pi'} G_f$, где $G_{\pi'}$ – некоторая π'-холловская подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть $V/$ – холлова -подгруппа группы . Но тогда, по теореме Холла–Чунихина [2], $V/ = G_{\pi'}G$ для некоторой холловой -подгруппы группы . Теперь следствие вытекает непосредственно из теоремы 4.1.

Следствие 4.3. *Для класса Фиттинга $\mathcal{F}$ =* SLR(*f*) *с полной постоянной H-функцией f, π*=Supp(*f*) $\neq \emptyset$ *и любой группы G ее -инъектор характеризуется следующим образом: подгруппа является $\mathcal{F}$-инъектором G в том и только в том случае, когда -максимальна в G и $\supseteq G_{\mathcal{F}}$.*

Доказательство. Пусть $V \supseteq G_{\mathcal{F}}$, V -максимальна в G; тогда, по лемме 3.9, $V/G_{\mathcal{F}}$ является π'-подгруппой. Если $V/G_{\mathcal{F}} \subset F/G_{\mathcal{F}}$, где $F/G_{\mathcal{F}}$ π'-холловская подгруппа группы $G/G_{\mathcal{F}}$, то, по лемме 3.7, $F \in \mathcal{F}$ и поэтому, ввиду $\mathcal{F}$-максимальности V в G, подгруппа $V/G_{\mathcal{F}}$ является π'-холловской подгруппой группы $V/G_{\mathcal{F}}$. Следовательно, по теореме 4.1 V является $\mathcal{F}$-инъектором группы . Обратное утверждение вытекает непосредственно из определения $\mathcal{F}$-инъектора.

Следствие 4.4. *Подгруппа □ группы G является □-замкнутым инъектором G тогда и только тогда, когда □ максимальная из □-замкнутых подгрупп G и содержит □-замкнутый радикал.*

Доказательство. Легко видеть, что класс $\mathfrak{E}$ – □-замкнутых групп, совпадающий с *SLR(f)*, для полной постоянной H-функции f такой, что f(p) = , для всех простых p. Теперь утверждение вытекает из следствия 4.3. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fischer, B. Injector endicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gashuts, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.
2. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Cruyter, 1992. – 891 p.
3. Шеметков, Л.А. О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков // Конечные группы. Труды Гомельского семинара. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 207–212.
4. Сементовский, В.Г. Инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1984.
5. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. Esquerro. – Amsterdam: Springer, 2006. – 386 p.
6. Воробьев, Н.Т. Метод Хартли для инъекторов / Н.Т. Воробьев, И.В. Дудкин // Учен. зап. УО «ВГУ имени П.М. Машерова». – 2002. – Т. 1. – С. 181–193.
7. Hertley, B. On Fisher's dualization of formation theory / B. Hertley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
8. Ведерников, В.А. Элементы теории классов групп / В.А. Ведерников. – Смоленск, 1988. – С. 96.
9. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: учеб. пособие / В.С. Монахов. – Минск: Высшая школа, 2006. – 207 с.
10. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. – 158 с.
11. Воробьев, Н.Т. О предположении Хоукса для радикальных классов / Н.Т. Воробьев // Сибирск. матем. журнал. – 1996. – Т. 37, № 5. – Р. 1296–1302.

REFERENCES

1. Fischer B. Injector endicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gashuts, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102. № 5. S. 337–339.
2. Doerk K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Cruyter, 1992. – 891 p.
3. Shemetkov L.A. *O podgruppakh π-razreshimikh gruppakh // Konechniye gruppi. Trudi Gomelskogo seminara* [On subgroups of π-soluble groups // Finite groups. Works of the Gomel seminar], Minsk: Science and technology, 1975, P. 207–212.
4. Sementovsky V.G. *Inyektori konechnikh grupp // Issledovaniye normalnogo i podgruppovogo stroyeniya konechnikh grupp* [Injectors of finite groups // Research of a normal and subgroup structure of final groups], Minsk: Science and technology, 1984.
5. Ballester-Bolinches A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. Esquerro. – Amsterdam: Springer, 2006. – 386 p.
6. Vorobyev N.T., Dudkin I.V. *Ucheniye zapiski VGU* [Scientific Notes of Vitebsk State University], 2002, 1, pp. 181–193.
7. Hertley B. On Fisher's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. Vol. 3, № 2. P. 193–207.
8. Vedernikov V.A. *Elementi teorii klassov grupp* [Elements of the Theory of Classes of Groups], Smolensk, 1988, 96 p.
9. Monahov V.S. *Vvedeniye v teoriyu konechnikh grupp i ikh klassov: uchebnoye posobiye* [Introduction into the Theory of Finite Groups and their Classes: Manual], Minsk: Visshaya shkoila, 2006, 207 p.
10. Chunihin S.A. *Podgruppi konechnikh grupp* [Subgroups of Finite Groups], Minsk: Nauka i tekhnika, 1964, 158 p.
11. Vorobyev N.T. *Sibirski matematicheski zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1996, 37(5), pp. 1296–1302.

Поступила в редакцию 25.06.2014. Принята в печать 18.08.2014
Адрес для корреспонденции: e-mail: kochergina_olga-l@mail.ru – Кочергина О.Ю.