УДК 517.988

Об инвариантах итерационного процесса Вейерштрасса

Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко
Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Доказано, что алгоритм итерационного процесса Вейерштрасса одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения в точности совпадает с методом Ньютона–Канторовича, где $F'(x)^{-1}F(x)$ представляет собой начало разложения в ряд Тейлора обратного оператора, записанное в терминах исходного оператора. Другими словами, доказано, что метод Ньютона–Канторовича, примененный к оператору $F: C^n \to C^n$, порождаемому соотношениями Виета, приводит к процессу Вейерштрасса. По мнению авторов, представляет интерес нахождение для данного оператора в явном координатном виде второго слагаемого этого ряда, т.е. $F'(x)^{-1}F''(x)\left[F'(x)^{-1}F(x),\ F'(x)^{-1}F(x)\right]$, где $F''(x)$ – вторая производная оператора F. Найдены инварианты итерационного процесса Вейерштрасса. Полученные соотношения могут быть применены для доказательства нелокальной сходимости процесса и выяснения структуры множества тех начальных значений, при которых процесс не сходится.

Ключевые слова: *полином, итерационный процесс, метод Ньютона–Канторовича.*

On the invariants of Veierstrass iteration process

Y.V. Trubnikov, O.V. Pyshnenko
Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

It is proved that the algorythm of Veierstrass iteration process of the simultaneous finding all the roots of an algebraic equation corresponds exactly with Newton–Kantorovich method, where $F'(x)^{-1}F(x)$ is the beginning of the expansion into Taylor row of reverse operator, which is written down in terms of the initial operator.In other words, it is proved that Newton–Kantorovich method applied to operator $F: C^n \to C^n$, produced by Viett ratio, results in Veierstrass process. The authors consider that finding for the given operator in apparent coordinate type the second item of this row, i.e. $F'(x)^{-1}F''(x)\left[F'(x)^{-1}F(x),\ F'(x)^{-1}F(x)\right]$, where $F''(x)$ – second derivative of F operator, presents certain interest. Invariants of Veierstrass iteration process have been found. The received ratio can be applied to prove non local meeting of the process and finding out the structure of multitude of the initial parameters at which the process does not meet.

Key words: *polynome, iteration process, Newton–Kantorovich method.*

Первый шаг для одновременного определения всех корней многочлена был сделан в 1891 году Вейерштрассом и более чем 50 лет спустя этот подход был снова обнаружен многими авторами. Итерационная формула одновременного нахождения всех корней полинома, полученная Вейерштрассом в 1903 году в связи с доказательством основной теоремы алгебры [1], была заново открыта в 1960–1962 гг. [2–3]. Таким образом, этот метод называется методом Вейерштрасса, методом Дюрана–Кернера или методом Вейерштрасса–Дочева [4].

Многие попытки были сделаны для ускорения скорости сходимости метода Вейерштрасса и для получения различных решений в случае кратных корней. Методы разложения многочлена на линейные и квадратичные множители [5–6] являются удобным инструментом для определения всех корней и широко используются по настоящее время.

Условия для выбора начального приближения, обеспечивающие сходимость метода типа Ньютона и методы типа классического метода Вейерштрасса, появились в работах многих авторов, например [7–9] и др.

Заметим прежде всего, что по существу алгоритм Вейерштрасса в точности совпадает с методом Ньютона–Канторовича, т.е. $F'(x)^{-1}F(x)$ представляет собой начало разложения в ряд Тейлора обратного оператора, записанное в терминах исходного оператора.

По мнению авторов, представляет интерес нахождение для данного оператора в явном координатном виде второго слагаемого этого ряда, т.е. слагаемого вида

$$F'(x)^{-1}F''(x)\left[F'(x)^{-1}F(x),\ F'(x)^{-1}F(x)\right].$$

Актуальным вопросом теории итерационных процессов является описание множества тех начальных значений, при которых процесс сходится к нужному решению соответствующего операторного уравнения. Итерационный процесс Вейерштрасса, предложенный им в 1891 году, предназначен для одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения и имеет следующий вид:

$$x_j(k+1) = x_j(k) - \frac{P_n\left[x_j(k)\right]}{\prod\limits_{s\neq j}\left[x_j(k) - x_s(k)\right]},$$

где $j = 1, 2, ..., n;\ k = 1, 2, ...,$ а полином

$$P_n(x) \equiv x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n \qquad (1)$$

с комплексными, вообще говоря, коэффициентами имеет простые корни. В данной статье доказано, что метод Ньютона–Канторовича, примененный к оператору $F: C^n \to C^n$, порождаемому соотношениями Виета, приводит к процессу Вейерштрасса, кроме того, найдены инварианты процесса, что позволяет осуществлять контроль вычислений и использовать эту полезную информацию для различных целей, например, для нахождения структуры множества допустимых начальных значений.

Материал и методы. Объектом исследования является итерационный процесс Вейерштрасса. В качестве метода исследования применяются теория определителей, свойства неявных функций и некоторые общие теоремы функционального анализа.

Результаты и их обсуждение. Напомним, что следующие n симметрических многочленов от n комплексных переменных называются элементарными симметрическими многочленами:

$$\sigma_1 \equiv x_1 + x_2 + ... + x_n;$$
$$\sigma_2 \equiv x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n;$$
$$\sigma_3 \equiv x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sigma_{n-1} \equiv x_1x_2\cdot...\cdot x_{n-1} + x_1x_2\cdot...\cdot x_{n-2}x_n + ... + x_2x_3\cdot...\cdot x_n;$$
$$\sigma_n \equiv x_1x_2\cdot...\cdot x_n.$$

Алгоритм приближенного нахождения корней уравнения (1) основан на применении метода Ньютона–Канторовича к оператору

$$F \equiv \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ ... \\ f_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1 + a_1 \\ \sigma_2 - a_2 \\ ... \\ \sigma_n - (-1)^n a_n \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

представляющему содержание формул Виета. Рассмотрим оператор F как оператор $F: C^n \to C^n$, где $C-$ множество комплексных чисел. Для изучения свойств итерационного процесса Вейерштрасса нам потребуются следующие алгебраические тождества.

Лемма 1. П*усть* $x_j \in C \ (j = 1, 2, ..., n)$ – *произвольные комплексные числа и*

$$x_j - x_k \neq 0 \quad (1 \le j < k \le n).$$

Тогда справедливы следующие тождества:

$$x_1^m \prod_{\substack{j,k\neq 1\\ j<k}} (x_j - x_k) - x_2^m \prod_{\substack{j,k\neq 2\\ j<k}} (x_j - x_k) + ... + (-1)^{n-1} x_n^m \prod_{\substack{j,k\neq n\\ j<k}} (x_j - x_k) = 0, \qquad (3)$$

где $m = 0, 1, ..., n-2;$

$$x_1^{n-1} \prod_{\substack{j,k\neq 1\\ j<k}} (x_j - x_k) - x_2^{n-1} \prod_{\substack{j,k\neq 2\\ j<k}} (x_j - x_k) + ... + (-1)^{n-1} x_n^{n-1} \prod_{\substack{j,k\neq n\\ j<k}} (x_j - x_k) = \prod_{1\le j<k\le n} (x_j - x_k); \quad (4)$$

$$x_1^n \prod_{\substack{j,k\neq 1\\ j<k}} (x_j - x_k) - x_2^n \prod_{\substack{j,k\neq 2\\ j<k}} (x_j - x_k) + ... + (-1)^{n-1} x_n^n \prod_{\substack{j,k\neq n\\ j<k}} (x_j - x_k) =$$
$$= (x_1 + x_2 + ... + x_n) \prod_{1\le j<k\le n} (x_j - x_k). \qquad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Левая часть тождества (3) представляет собой разложение определителя

$$\begin{vmatrix} x_1^m & x_1^{n-2} & x_1^{n-3} & ... & x_1 & 1 \\ x_2^m & x_2^{n-2} & x_2^{n-3} & ... & x_2 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_n^m & x_n^{n-2} & x_n^{n-3} & ... & x_n & 1 \end{vmatrix} \qquad (6)$$

по элементам первого столбца. При $m = 0, 1, 2, ..., n-2$ такой определитель содержит два одинаковых столбца и, следовательно, равен нулю. При $m = n-1$ определитель (6) превращается в определитель Вандермонда, т.е. справедливо равенство (4).

При $m = n$ получаем определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1^n & x_1^{n-2} & x_1^{n-3} & ... & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-2} & x_2^{n-3} & ... & x_2 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_n^n & x_n^{n-2} & x_n^{n-3} & ... & x_n & 1 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Пусть $x_1 = x$, тогда определитель (7) представляет собой многочлен степени n от переменной x с корнями $x_2, x_3, \dots, x_n$, т.е. имеет вид

$$\Delta_n = (x - r)(x - x_2)(x - x_3) \times \dots \times$$
$$\times (x - x_n) \prod_{2 \le j < k \le n} (x_j - x_k), \qquad (8)$$

где r – еще один, пока неизвестный нам корень.

Далее воспользуемся методом математической индукции. При $n = 2$ получаем равенство

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & 1 \\ x_2^2 & 1 \end{vmatrix} = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2).$$

По индукции предположим, что

$$\begin{vmatrix} x_2^{n-1} & x_2^{n-3} & x_2^{n-4} & \dots & x_2 & 1 \\ x_3^{n-1} & x_3^{n-3} & x_3^{n-4} & \dots & x_3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-3} & x_n^{n-4} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= (x_2 + x_3 + \dots + x_n) \prod_{2 \le j < k \le n} (x_j - x_k). \qquad (9)$$

Рассмотрим определитель (7) при $x_1 = 0$, тогда

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-2} & x_2^{n-3} & \dots & x_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-2} & x_n^{n-3} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} x_2^n & x_2^{n-2} & x_2^{n-3} & \dots & x_2^2 & x_2 \\ x_3^n & x_3^{n-2} & x_3^{n-3} & \dots & x_3^2 & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-2} & x_n^{n-3} & \dots & x_n^2 & x_n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-1} x_2 x_3 \cdot \dots \cdot x_n \begin{vmatrix} x_2^{n-1} & x_2^{n-3} & x_2^{n-4} & \dots & x_2 & 1 \\ x_3^{n-1} & x_3^{n-3} & x_3^{n-4} & \dots & x_3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-3} & x_n^{n-4} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix},$$

т.е. в силу равенства (9)

$$\Delta_n = (-1)^{n-1} (x_2 x_3 \cdot \dots \cdot x_n)(x_2 + x_3 + \dots + x_n) \times$$
$$\times \prod_{2 \le j < k \le n} (x_j - x_k). \qquad (10)$$

С другой стороны, при $x = 0$ выражение (10) должно быть равно правой части равенства (8), т.е.

$$\Delta_n = (-1)^{n-1} x_2 x_3 \cdot \dots \cdot x_n (x_2 + x_3 + \dots + x_n) \times$$
$$\times \prod_{2 \le j < k \le n} (x_j - x_k) =$$
$$= (-1)^n r x_2 x_3 \cdot \dots \cdot x_n \prod_{2 \le j < k \le n} (x_j - x_k), \qquad (11)$$

т.е. $r = -(x_2 + x_3 + \dots + x_n)$ и, следовательно,

$$\Delta_n = (x + x_2 + \dots + x_n)(x - x_2)(x - x_3) \times \dots \times$$
$$\times (x - x_n) \prod_{2 \le j < k \le n} (x_j - x_k).$$

При $x = x_1$ получаем тождество (5).

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $x_j \ne 0$ $(j = 1, 2, \dots, n)$. *Имеет место тождество*

$$\frac{1}{x_1} \prod_{\substack{j,k \ne 1 \\ j<k}} (x_j - x_k) - \frac{1}{x_2} \prod_{\substack{j,k \ne 2 \\ j<k}} (x_j - x_k) + \dots + (-1)^{n-1} \times$$

$$\times \frac{1}{x_n} \prod_{\substack{j,k \ne n \\ j<k}} (x_j - x_k) = \frac{(-1)^{n-1} \prod\limits_{1 \le j < k \le n} (x_j - x_k)}{\prod\limits_{j=1}^{j=n} x_j}. \qquad (12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Левая часть тождества (12) представляет собой определитель

$$\delta_1(n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & x_1^{n-2} & x_1^{n-3} & \dots & x_1 & 1 \\ \frac{1}{x_2} & x_2^{n-2} & x_2^{n-3} & \dots & x_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{x_n} & x_n^{n-2} & x_n^{n-3} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}.$$

Проведем следующее преобразование:

$$\delta_1(n) = \frac{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & x_1^{n-2} & x_1^{n-3} & \dots & x_1 & 1 \\ \frac{1}{x_2} & x_2^{n-2} & x_2^{n-3} & \dots & x_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{x_n} & x_n^{n-2} & x_n^{n-3} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} x_j}\begin{vmatrix} 1 & x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \dots & x_1^2 & x_1 \\ 1 & x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \dots & x_2^2 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \dots & x_n^2 & x_n \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{j=1}^{n} x_j}\prod_{1\le j<k\le n}(x_j - x_k).$$

Лемма доказана.

Далее обозначим

$$\tau_2(n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{n} & x_1^{n-1} & \dots & x_1^3 & x_1^2 \\ 1 & x_2^{n} & x_2^{n-1} & \dots & x_2^3 & x_2^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^{n} & x_n^{n-1} & \dots & x_n^3 & x_n^2 \end{vmatrix}.$$

Лемма 3. *Справедливо следующее тождество*

$$\tau_2(n) = (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)\times$$
$$\times\prod_{1\le j<k\le n}(x_j - x_k). \qquad (13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем методом математической индукции. При $n = 2$

$$\tau_2(2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 \\ 1 & x_2^2 \end{vmatrix} = x_2^2 - x_1^2 = (-1)(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) =$$

$$= (-1)^{2-1}\sigma_{2-1}(x_1, x_2)\cdot(x_1 - x_2).$$

По индукции предположим, что

$$\tau_2(n-1) =$$
$$= (-1)^{n-2}\sigma_{n-2}(x_2, x_3, \dots, x_n)\prod_{2\le j<k\le n}(x_j - x_k), \qquad (14)$$

тогда, положив $x_1 = x$, мы видим, что $\tau_2(n)$ представляет собой полином степени n с корнями $x_2, x_3, \dots, x_n$. Кроме того, существует еще один корень $x = r$. Таким образом, мы можем записать равенство

$$\tau_2(n) = (-1)\cdot\tau_2(n-1)\left[\prod_{j=2}^{j=n}(x - x_j)\right](x - r). \qquad (15)$$

В соответствии с предположением индукции (14) получаем, что

$$\tau_2(n) = (-1)^{n-1}\sigma_{n-2}(x_2, x_3, \dots, x_n)\times$$
$$\times\left[\prod_{2\le j<k\le n}(x_j - x_k)\right]\left[\prod_{2\le j\le n}(x - x_j)\right](x - r). \qquad (16)$$

При $x = 0$ определитель $\tau_2(n)$ будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_2^{n} & x_2^{n-1} & \dots & x_2^3 & x_2^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^{n} & x_n^{n-1} & \dots & x_n^3 & x_n^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 x_3\cdot\ldots\cdot x_n)^2\prod_{2\le j<k\le n}(x_j - x_k). \qquad (17)$$

Приравняем правую часть равенства (16), взятую при $x = 0$, к выражению (17):

$$(x_2 x_3\cdot\ldots\cdot x_n)^2\prod_{2\le j<k\le n}(x_j - x_k) =$$
$$= (-1)^{n-1}\sigma_{n-2}(x_2, x_3, \dots, x_n)\prod_{2\le j<k\le n}(x_j - x_k)\times$$
$$\times(-1)^{n-1}\left(\prod_{j=2}^{j=n} x_j\right)(-r). \qquad (18)$$

Сокращая обе части равенства (18) на выражения

$$\prod_{2\le j<k\le n}(x_j - x_k), \quad \prod_{j=2}^{j=n} x_j,$$

получаем, что

$$-r = \frac{x_2 x_3\cdot\ldots\cdot x_n}{\sigma_{n-2}(x_2, x_3, \dots, x_n)}. \qquad (19)$$

Подставим найденное значение r в равенство (16). Тогда при $x = x_1$ будем иметь

$$\tau_2(n) = (-1)^{n-1}\sigma_{n-2}(x_2, x_3, \dots, x_n)\left[\prod_{2\le j<k\le n}(x_j - x_k)\right]\times$$

$$\times\left[\prod_{2\le k\le n}(x_1 - x_k)\right]\left[x_1 + \frac{x_2 x_3\cdot\ldots\cdot x_n}{\sigma_{n-2}(x_2, x_3, \dots, x_n)}\right] =$$

$$= (-1)^{n-1}\prod_{2\le j<k\le n}(x_j - x_k)\times$$
$$\times\left[x_1\sigma_{n-2}(x_2, x_3, \dots, x_n) + x_2 x_3\cdot\ldots\cdot x_n\right] =$$
$$= (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\prod_{1\le j<k\le n}(x_j - x_k),$$

что соответствует предположению индукции.

Лемма 4. *Пусть* $x_j \ne 0$ $(j = 1, 2, \dots, n)$. *Справедливо следующее тождество*

$$\frac{1}{x_1^2}\prod_{\substack{j,k\ne 1\\ j<k}}(x_j - x_k) - \frac{1}{x_2^2}\prod_{\substack{j,k\ne 2\\ j<k}}(x_j - x_k) + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{x_n^2}\prod_{\substack{j,k\neq n\\ j<k}}(x_j-x_k)=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)\prod\limits_{1\le j<k\le n}(x_j-x_k)}{\sigma_n^2(x_1,x_2,\dots,x_n)}. \quad (20)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим прежде всего, что

$$\frac{1}{x_1^2}\prod_{\substack{j,k\neq 1\\ j<k}}(x_j-x_k)-\frac{1}{x_2^2}\prod_{\substack{j,k\neq 2\\ j<k}}(x_j-x_k)+\dots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{x_n^2}\prod_{\substack{j,k\neq n\\ j<k}}(x_j-x_k)=$$

$$=\frac{(x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n)^2}{(x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n)^2}\begin{vmatrix}\frac{1}{x_1^2} & x_1^{n-2} & x_1^{n-3} & \dots & x_1 & 1\\ \frac{1}{x_2^2} & x_2^{n-2} & x_2^{n-3} & \dots & x_2 & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{1}{x_n^2} & x_n^{n-2} & x_n^{n-3} & \dots & x_n & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\tau_2(n)}{\sigma_n^2}.$$

Далее, применяя равенство (13), получаем

$$\frac{\tau_2(n)}{\sigma_n^2}=\frac{(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}}{\sigma_n^2}\cdot\prod_{1\le j<k\le n}(x_j-x_k),$$

т.е. требуемое тождество (20).

Итерационный процесс Ньютона–Канторовича.

Пусть

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{bmatrix}. \quad (21)$$

Запишем итерационный процесс Ньютона–Канторовича приближенного решения уравнения $F(x)=0$, где $F-$ оператор, определяемый правой частью равенства (2), в координатной форме.

Лемма 5. *Справедливы следующие равенства:*

$$\frac{\partial\sigma_1(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_1}=1\equiv\sigma_{0,1};$$

$$\frac{\partial\sigma_1(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_2}=1\equiv\sigma_{0,2};$$

…

$$\frac{\partial\sigma_1(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_n}=1\equiv\sigma_{0,n};$$

$$\frac{\partial\sigma_2(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_1}=\sigma_1(x_2,x_3,\dots,x_n)\equiv\sigma_{1,1};$$

…

$$\frac{\partial\sigma_2(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_n}=\sigma_1(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})\equiv\sigma_{1,n};$$

…

$$\frac{\partial\sigma_n(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_1}=\sigma_{n-1}(x_2,x_3,\dots,x_n)\equiv\sigma_{n-1,1};$$

…

$$\frac{\partial\sigma_n(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_n}=\sigma_{n-1}(x_2,x_3,\dots,x_n)\equiv\sigma_{n-1,n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно.

Таким образом,

$$F'(x)=\begin{pmatrix}\sigma_{0,1} & \sigma_{0,2} & \dots & \sigma_{0,n}\\ \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sigma_{n-1,1} & \sigma_{n-1,2} & \dots & \sigma_{n-1,n}\end{pmatrix}. \quad (22)$$

Рассмотрим далее матрицу T вида

$$T=\begin{pmatrix}x_1^{n-1} & -x_1^{n-2} & x_1^{n-3} & \dots & (-1)^{n-2}x_1 & (-1)^{n-1}\\ x_2^{n-1} & -x_2^{n-2} & x_2^{n-3} & \dots & (-1)^{n-2}x_2 & (-1)^{n-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_n^{n-1} & -x_n^{n-2} & x_n^{n-3} & \dots & (-1)^{n-2}x_n & (-1)^{n-1}\end{pmatrix}$$

и матрицу

$$K=\begin{pmatrix}\frac{1}{\prod\limits_{j\neq 1}(x_1-x_j)} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{1}{\prod\limits_{j\neq 2}(x_2-x_j)} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\prod\limits_{j\neq n}(x_n-x_j)}\end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\left[F'(x)\right]^{-1}=(KT)\equiv G(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть матрица A определяется равенством

$$A=TF'(x), \quad (23)$$

тогда

$$a_{11} = \sigma_{0,1}x_1^{n-1} - \sigma_{1,1}x_1^{n-2} + \sigma_{2,1}x_1^{n-3} + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-2}\sigma_{n-2,1}x_1 + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1,1}. \qquad (24)$$

Запишем более подробно выражение в правой части равенства (24):

$$x_1^{n-1} - (x_2 + x_3 + \ldots + x_n)x_1^{n-2} +$$
$$+ (x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n)x_1^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-2} \times$$
$$\times (x_3x_4 \cdot \ldots \cdot x_n + x_2x_4 \cdot \ldots \cdot x_n + \ldots + x_2x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-1})x_1 +$$
$$+ (-1)^{n-1}x_2x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}x_n.$$

Мы видим, что a_{11} представляет собой полином степени $n-1$ с корнями $x_2, x_3, \ldots, x_n$, вычисленный в точке x_1, т.е.

$$a_{11} = \prod_{j\neq 1}(x_1 - x_j).$$

Аналогично

$$a_{12} = x_1^{n-1} - (x_1 + x_3 + \ldots + x_n)x_1^{n-2} + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1}x_1x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}x_n = 0$$

и т.д.

Так как $KA = KTF'(x) = I$, то

$$\left[F'(x)\right]^{-1} = KT. \qquad (25)$$

Теорема доказана.

Далее

$$\left[TF(x)\right]_1 = x_1^{n-1}\left[\sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + a_1\right] -$$
$$- x_1^{n-2}\left[\sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) - a_2\right] +$$
$$+ x_1^{n-3}\left[\sigma_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) + a_3\right] - \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-2}x_1\left[\sigma_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - (-1)^{n-1}a_{n-1}\right] +$$
$$+ (-1)^{n-1}\left[\sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) - (-1)^n a_n\right] =$$
$$= x_1^{n-1}\left[x_1 + \sigma_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) + a_1\right] -$$
$$- x_1^{n-2}\left[x_1\sigma_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) + \sigma_2(x_2, x_3, \ldots, x_n) - a_2\right] +$$
$$+ x_1^{n-3}\left[x_1\sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sigma_3(x_2, x_3, \ldots, x_n) + a_3\right] -$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{n-2}x_1\left[x_1\sigma_{n-2}(x_2, x_3, \ldots, x_n)\right] +$$
$$+ (-1)^{n-2}x_1\left[\sigma_{n-1}(x_2, x_3, \ldots, x_n) - (-1)^{n-1}a_{n-1}\right] +$$
$$+ (-1)^{n-1}\left[x_1\sigma_{n-1}(x_2, x_3, \ldots, x_n) - (-1)^n a_n\right] =$$
$$= x_1^n + a_1x_1^{n-1} + a_2x_1^{n-2} + a_3x_1^{n-3} + \ldots +$$
$$+ (-1)^{2n-2}a_{n-1}x_1 + (-1)^{2n}a_n + \sigma_1x_1^{n-1} -$$
$$- \sigma_1x_1^{n-1} - \sigma_2x_1^{n-2} + \sigma_2x_1^{n-2} + \sigma_3x_1^{n-3} - \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-2}x_1^2\sigma_{n-2} + (-1)^{n-2}x_1\sigma_{n-1} +$$
$$+ (-1)^{n-1}x_1\sigma_{n-1} = P(x_1).$$

Остальные координаты имеют вид

$$\left[TF(x)\right]_j = P(x_j) \quad (j = 2, 3, \ldots, n).$$

Теорема доказана.

Запишем более подробно шаг итерационного процесса:

$$x_1(k+1) = x_1(k) - \frac{P\left[x_1(k)\right]}{\prod_{j\neq 1}\left[x_1(k) - x_j(k)\right]},$$
$$x_2(k+1) = x_2(k) - \frac{P\left[x_2(k)\right]}{\prod_{j\neq 2}\left[x_2(k) - x_j(k)\right]}, \qquad (26)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n(k+1) = x_n(k) - \frac{P\left[x_n(k)\right]}{\prod_{j\neq n}\left[x_n(k) - x_j(k)\right]},$$

где $k = 1, 2, \ldots$.

Для сокращения записи индекс k в правой части системы (26) указывать не будем, тогда правая часть системы (26) примет вид:

$$x_1 - \frac{P(x_1)}{\prod_{j\neq 1}(x_1 - x_j)} \equiv x_1 - \frac{P(x_1)}{\omega'(x_1)},$$
$$x_2 - \frac{P(x_2)}{\prod_{j\neq 2}(x_2 - x_j)} \equiv x_2 - \frac{P(x_2)}{\omega'(x_2)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n - \frac{P(x_n)}{\prod_{j\neq n}(x_n - x_j)} \equiv x_n - \frac{P(x_n)}{\omega'(x_n)},$$

где $\omega(t) = (t - x_1)(t - x_2)\cdot\ldots\cdot(t - x_n)$.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1 \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

т.е., начиная с $k = 2$, *выполняется соотношение*

$$x_1(k) + x_2(k) + \ldots + x_n(k) = -a_1 \quad (k = 2, 3, \ldots). \qquad (27)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Просуммируем выражения (26) последовательно по степеням $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т.е., например, применяя тождество (3), получаем

$$a_n\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{\omega'(x_s)} = 0, \qquad a_{n-m}\sum_{s=1}^{n}\frac{x_s^m}{\omega'(x_s)} = 0$$
$$(m = 1, 2, \ldots, n-2).$$

При $m=n-1$ применим тождество (4):

$$a_1 \sum_{s=1}^{n} \frac{x_s^{n-1}}{\omega'(x_s)} = a_1.$$

При $m=n$ тождество (5) приводит к равенству

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{x_s^{n}}{\omega'(x_s)} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Сложив левые и правые части равенств (26), получаем

$$x_1(k+1) + x_2(k+1) + \ldots + x_n(k+1) =$$
$$= x_1(k) + x_2(k) + \ldots + x_n(k) - a_1 -$$
$$- x_1(k) - x_2(k) - \ldots - x_n(k) = -a_1,$$

что означает выполнение равенства (27).

Теорема 2 доказана.

Тождества (3)–(5), (12), (20) позволяют устанавливать самые различные соотношения между величинами

$$x_j(k),\ x_j(k+1) \quad (j=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots).$$

Приведем пример такого рода соотношений.

Теорема 3. *Справедливо равенство*

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{x_s(k+1)}{x_s(k)} = n-1 + \frac{(-1)^n a_n}{\prod\limits_{j=1}^{n} x_j(k)}. \qquad (28)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим обе части первого равенства (26) на $\prod\limits_{j\neq 1} x_j(k)$, второго равенства (26) на $\prod\limits_{j\neq 2} x_j(k)$ и т.д., а затем сложим, тогда

$$\sum_{s=1}^{n} x_s(k+1) \prod_{j\neq s} x_j(k) =$$
$$= n\prod_{j=1}^{n} x_j(k) - \sum_{s=1}^{n} \frac{P[x_s(k)]}{\omega'[x_s(k)]} \cdot \prod_{j\neq s} x_j(k).$$

Используя тождества (3)–(5), (12), (20), получаем, что

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{P[x_s(k)]}{\omega'[x_s(k)]} \cdot \prod_{j\neq s} x_j(k) = \prod_{j=1}^{n} x_j(k) + (-1)^{n-1} a_n.$$

Таким образом,

$$\sum_{s=1}^{n} x_s(k+1) \prod_{j\neq s} x_j(k) = (n-1)\prod_{j=1}^{n} x_j(k) + (-1)^n a_n.$$

Разделив последнее равенство на $\prod\limits_{j=1}^{n} x_j(k)$, получим

$$\frac{x_1(k+1)}{x_1(k)} + \frac{x_2(k+1)}{x_2(k)} + \ldots + \frac{x_n(k+1)}{x_n(k)} =$$
$$= n-1 + \frac{(-1)^n a_n}{\prod\limits_{j=1}^{n} x_j(k)}.$$

Заключение. В настоящей статье доказано, что алгоритм Вейерштрасса в точности совпадает с методом Ньютона–Канторовича. Кроме того, установлены инварианты процесса, позволяющие контролировать правильность вычислений и применять их для доказательства нелокальной сходимости процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Weierstrass, K. Neuer Beweis des Satzes, dass jede Ganze Rationale Funktion einer Veranderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus Linearen Funktionen derselben Veranderlichen / K. Weierstrass // Ges. Werke. – 1903. – № 3. – P. 251–269.
2. Durand, E. Solution Numerique des Equations Algebraique / E. Durand // Masson et Compagnie, Paris. – 1960.
3. Dochev, K. A modified Newton method for simultaneous approximate calculation of all roots of a given equation / K. Dochev // Phys. Math. J. – 1962. – № 5. – P. 136–139.
4. Sendov, Bl. Numerical Solution of Polynomial Equations / Bl. Sendov, A. Andreev, N. Kjurkchiev // Bulgarian Academy of Sciences. – 1994. – 778 p.
5. Bairstow, L. Investigations relating to the stability of the aeroplane / L. Bairstow // Reports and Memoranda 154, Advisory Committee for Aeronautics. – 1914.
6. Hitchkock, E. An improvement on the G. C. D. method for complex roots / E. Hitchkock // J. Math. and Phys. – 1944. – № 23. – P. 69–74.
7. Iliev, L. Uber Newtonsche Iterationen / L. Iliev, K. Dochev // Wiss. Z. Tech. Univ. Dresden. – 1963. – № 12. – P. 117–118.
8. Kjurkchiev, N. Two interval methods for algebraic equations with real roots / N. Kjurkchiev, S. Markov // Pliska. – 1983. – № 5. – P. 118–131.

Поступила в редакцию 03.10.2011. Принята в печать 28.10.2011

Адрес для корреспонденции: 210026, г. Витебск, ул. Коммунистическая, д. 12/23, кв. 16,
e-mail: Yurii_Trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.