УДК 514.765

Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой

М.Н. Подоксенов

Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Рассматривается однородное многообразие группы Гейзенберга, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой. Сама группа Гейзенберга действует на этом многообразии с помощью левых сдвигов как группа движений – просто и транзитивно. Произвольное подобие и движение данного многообразия можно представить в виде композиции левого сдвига и преобразования, оставляющего неподвижной единицу группы. В работе найдены формулы, по которым действуют подобия и движения, оставляющие неподвижной единицу группы, но не утверждается, что приведенный список является исчерпывающим. В случае, когда одномерный центр алгебры Ли группы Гейзенберга является изотропным, рассматриваемое многообразие допускает однопараметрическую группу гомотетий, оставляющую неподвижной единицу группы.

Ключевые слова: *группа Гейзенберга, подобия и изометрии.*

Homothetic and isometric transformations of homogeneous manifold of the Heisenberg group upplied with left-invariant Lorenzian metrics

M.N. Podoksenov

Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

We consider the homogeneous manifold of the Heisenberg group with left-invariant Lorenzian metrics. The Heisenberg group itself acts on this manifold simply and transitively by means of left shifts, as an isometric group. An arbitrary motion or homothetic transformation of the given manifold could be represented as a composition of left shift and transformation, that leaves the identity of the group immovable. The formulas describing the action of motions and homothetic transformations are found in the paper, but it isn't claimed, that the adduced list is exhaustive. The examined manifold admits a one-parameter homothety group, which leaves the identity of the group immovable, in the case, when the center of the Heisenberg Lie algebra is isotropic.

Key words: *Heisenberg group, homothetic transformations and motions.*

Группа Ли G, снабженная левоинвариантной метрикой g, представляет собой однородное многообразие (G, g), на котором сама группа Ли G действует как группа движений – просто и транзитивно. В связи с этим возникает вопрос: существуют ли другие движения многообразия (G, g), не входящие в G? Мы поставим более общий вопрос: допускает ли многообразие (G, g) преобразования подобия – и рассмотрим его для случая трехмерной связной односвязной нильпотентной группы Ли, снабженной левоинвариантной римановой или лоренцевой метрикой.

Преобразование $f: M \to M$ риманова или лоренцева многообразия (M, g) называется подобием, если $f^*g = e^{-2\mu}g$, т.е. $g_{f(p)}((f_*)_pX, (f_*)_pY) = e^{2\mu}g_p(X,Y)$, $\mu \in \boldsymbol{R}$, для любых касательных векторов $X,Y \in T_pM$. В частности, при $\mu = 0$ подобие будет движением.

Пусть $f: G \to G$ – подобие однородного пространства (G, g) группы Ли, и $f(e) = a \in G$, где e – единица группы. Тогда f можно представить в виде композиции преобразования h, оставляющего единицу e на месте, и левого сдвига L_a: $f = L_a \circ h$. Тогда h тоже будет подобием. Поэтому поставленная задача сводится к поиску подобий, которые оставляют неподвижной единицу группы Ли.

Связные односвязные группы Ли могут быть классифицированы в соответствии с их алгебрами Ли. Автору известны две классификации трехмерных алгебр Ли: по типам Бианки [1] и классификация, изложенная в работе Дж. Милнора [2]. Согласно этим классификациям существует с точностью до изоморфизма только одна трехмерная связная односвязная коммутативная группа Ли. Это $\boldsymbol{R}^3$ с обычной операцией сложения векторов. Вопрос о движениях и подобиях данного пространства хорошо изучен.

Существует с точностью до изоморфизма только одна трехмерная связная односвязная нильпотентная группа Ли. Это группа Гейзенберга Hs. Она состоит из матриц вида

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & y^2 & y^1 \\ 0 & 1 & y^3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с обычной операцией умножения матриц. Алгебра Ли $\mathcal{Hs}$ этой группы состоит из матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x^2 & x^1 \\ 0 & 0 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если на группе Hs задать карту $\varphi\colon Hs \to \boldsymbol{R}^3$, приписывающую матрице Y координаты $(y^1,\ y^2,\ y^3)$, а на алгебре Ли $\mathcal{Hs}$ задать карту $\psi\colon \mathcal{Hs} \to \boldsymbol{R}^3$, приписывающую матрице X координаты $(x^1,\ x^2,\ x^3)$, то запись отображений $\exp\colon Hs \to \mathcal{Hs}$ и $\exp^{-1}\colon \mathcal{Hs} \to Hs$ в этих картах выглядит так:

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + x^2x^3/2, \\ y^2 = x^2, \\ y^3 = x^3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^1 = y^1 - y^2y^3/2, \\ x^2 = y^2, \\ x^3 = y^3. \end{cases} \tag{1}$$

Эти формулы показывают, что группа Ли Hs является экспоненциальной. Операция умножения в группе имеет следующую запись в карте φ:

$$(a^1, a^2, a^3)\cdot(b^1, b^2, b^3) = \\ = (a^1 + b^1 + a^2b^3,\ a^2 + b^2,\ a^3 + b^3). \tag{2}$$

В алгебре Ли $\mathcal{Hs}$ можно выбрать базис $\{E_1, E_2, E_3\}$, где

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда операция скобки будет задаваться одним равенством

$$[E_2, E_3] = E_1, \tag{3}$$

а остальные произведения равны нулевому вектору. Одномерное подпространство $\mathcal{Z} = \boldsymbol{R}E_1$ представляет собой центр алгебры Ли $\mathcal{Hs}$.

Пусть теперь $\{E_1, E_2, E_3\}$ – произвольный базис, в котором операция скобки задается одним равенством (3). На алгебре Ли $\mathcal{Hs}$ зададим естественную карту $\psi\colon \mathcal{Hs} \to \boldsymbol{R}^3$, приписывающую вектору $X = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3$ координаты (x_1, x_2, x_3). На Hs зададим карту $\varphi\colon Hs \to \boldsymbol{R}^3$, приписывающую элементам $\exp E_1$, $\exp E_2$, $\exp E_3$ координаты (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) соответственно. Тогда, как уже отмечено в [4], в выбранных картах отображения $\exp\colon Hs \to \mathcal{Hs}$ и $\exp^{-1}\colon \mathcal{Hs} \to Hs$ будут задаваться равенствами (1), а групповое умножение – формулами (2).

Левоинвариантная метрика на группе Ли Hs индуцирует скалярное произведение в ее алгебре Ли $\mathcal{Hs}$, и наоборот, скалярное произведение в $\mathcal{Hs}$ однозначно определяет левоинвариантную метрику на Hs. Канонический вид матрицы скалярного произведения зависит от того, является ли центр $\mathcal{Z}$ алгебры Ли $\mathcal{Hs}$ времениподобным, пространственноподобным или изотропным (см. [3]).

По причинам, указанным выше, в следующей теореме речь идет только о движениях и подобиях, оставляющих неподвижными единицу группы. К сожалению, нам не известны ссылки на результат: любое преобразование группы Ли, сохраняющее операцию скобки векторных полей, переводит левоинвариантные векторные поля в левоинвариантные векторные поля. Поэтому мы воздержимся утверждать, что приведенный список подобий и движений является исчерпывающим.

Теорема. *Пусть на группе Ли* Hs *задана левоинвариантная лоренцева метрика* g *сигнатуры* $(+,+,-)$.

1. *Пусть центр* $\mathcal{Z}$ *алгебры Ли* $\mathcal{Hs}$ *является времениподобным. Тогда однородное пространство* (Hs, g) *допускает движения, которые в подходящей карте на группе Ли* Hs *задаются одной из формул:*

$$\begin{cases} y'^1 = y^1 - y^2y^3\cdot\sin^2\alpha + \\ \qquad + \frac{1}{4}((y^2)^2 - (y^3)^2)\cdot\sin 2\alpha, \\ y'^2 = y^2\cdot\cos\alpha - y^3\cdot\sin\alpha, \\ y'^3 = y^2\cdot\sin\alpha + y^3\cdot\cos\alpha,\ \alpha\in\boldsymbol{R}; \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} y'^1 = -y^1 + y^2y^3\cdot\cos^2\alpha + \\ \qquad + \frac{1}{4}((y^3)^2 - (y^2)^2)\cdot\sin 2\alpha, \\ y'^2 = y^2\cdot\cos\alpha + y^3\cdot\sin\alpha, \\ y'^3 = -y^2\cdot\sin\alpha + y^3\cdot\cos\alpha,\ \alpha\in\boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{4.2}$$

2. *Пусть центр* $\mathcal{Z}$ *алгебры Ли* $\mathcal{Hs}$ *является пространственноподобным. Тогда однородное пространство* (Hs, g) *допускает движения, которые в подходящей карте на группе Ли* Hs *задаются одной из формул:*

$$\begin{cases} y'^1 = y^1 + y^2 y^3 \cdot \mathrm{sh}^2 t - \\ \quad -\frac{1}{4}((y^2)^2 + (y^3)^2)\mathrm{sh}2t, \\ y'^2 = \pm(y^2 \cdot \mathrm{ch}t - y^3 \cdot \mathrm{sh}\,t), \\ y'^3 = \pm(-y^2 \cdot \mathrm{sh}t + y^3 \cdot \mathrm{ch}\,t), \ t \in \boldsymbol{R}; \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} y'^1 = -y^1 - y^2 y^3 \cdot \mathrm{sh}^2 t + \\ \quad +\frac{1}{4}((y^2)^2 + (y^3)^2)\mathrm{sh}2t, \\ y'^2 = \pm(y^2 \cdot \mathrm{ch}\,t - y^3 \cdot \mathrm{sh}\,t), \\ y'^3 = \pm(y^2 \cdot \mathrm{sh}\,t - y^3 \cdot \mathrm{ch}\,t), \ t \in \boldsymbol{R}. \end{cases} \quad (5.2)$$

3. *Пусть центр $\mathcal{Z}$ алгебры Ли $\mathcal{Hs}$ является пространственноподобным. Тогда однородное пространство* (Hs, g) *допускает преобразования подобия, которые в подходящей карте на группе Ли Hs задаются одной из формул:*

$$\begin{cases} y_1' = e^{3\nu t} y_1, \\ y_2' = \pm e^{2\nu t} y_2, \\ y_3' = \pm e^{\nu t} y_3; \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} y_1' = -e^{3\nu t} y_1, \\ y_2' = \pm e^{2\nu t} y_2, \\ y_3' = \mp e^{\nu t} y_3. \end{cases} \quad (6.2)$$

$\nu = \mathrm{const}$, $t \in \boldsymbol{R}$. *Преобразования* (6.1) *образуют однопараметрическую подгруппу.*

Доказательство. Пусть A: $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ – линейное преобразование, которое является автоморфизмом алгебры Ли и ее гомотетией. Предположим, что групповая экспонента exp: $\mathcal{G} \to G$ является гомеоморфизмом. Рассмотрим преобразование $h = \exp \circ A \circ \exp^{-1}: G \to G$ и покажем, что оно является подобием.

Пусть $\mathcal{B} = \{\vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n\}$ – базис в $\mathcal{G}$, $\vec{\mathbf{e}}_1' = A\vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n' = A\vec{\mathbf{e}}_n$. Тогда $\mathcal{B}' = \{\vec{\mathbf{e}}_1', \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n'\}$ – тоже базис, при этом структурные константы алгебры Ли в этих базисах совпадают: $c_{jk}^i = c'^i_{jk}$. Каждый из базисов определяет систему координат: $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(x'^1, \ldots, x'^n)$. С помощью карты $\exp^{-1}$: $G \to \mathcal{G}$ мы можем перенести их на G. Тогда запись отображения h в этих координатах будет $x'^1 = x^1, \ldots, x'^n = x^n$. Запись левого сдвига в этих координатах одинакова, а коэффициенты метрического тензора в единице группы $(g_{ij})_e$ и $(g'_{ij})_e$ отличаются лишь множителем. Поэтому результат их разнесения по группе с помощью левого сдвига тоже будет отличаться лишь множителем. Поскольку для каждого $a \in G$ дифференциал $(h_*)_a$ задается единичной матрицей, то преобразование $h: G \to G$ будет подобием.

Уточняя это рассуждение следует заметить, что элементы $a(x^1, \ldots, x^n)$ (в первой системе координат) и $b(x^1, \ldots, x^n)$ (во второй системе координат) могут быть разными, но преобразования L_a и L_b действуют в соответствующей системе координат по одинаковым формулам, т.к. совпадают структурные константы алгебры Ли в этих базисах.

Пусть на группе Ли Hs задана левоинвариантная лоренцева метрика g сигнатуры (+,+,–), при которой центр $\mathcal{Z}$ алгебры Ли $\mathcal{Hs}$ является времениподобным. В работе [3] доказано, что матрица скалярного произведения в $\mathcal{Hs}$ с помощью автоморфизмов алгебры может быть приведена к виду

$$(g_{ij})_e = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 \end{pmatrix}, \ \varepsilon \neq 0, \ \nu_1 = \pm 1, \ \nu_2 = \pm 1.$$

Рассматриваемому случаю соответствуют значения $\varepsilon < 0$, $\nu_1 = \nu_2 = 1$. Любой автоморфизм алгебры Ли $\mathcal{Hs}$ должен оставлять инвариантным центр $\mathcal{Z}$. Разобьем эти автоморфизмы на два типа:

1) автоморфизмы, которые сохраняют направление центра;

2) автоморфизмы, которые меняют направление центра.

Предположим, что подобие A: $\mathcal{Hs} \to \mathcal{Hs}$ является автоморфизмом первого типа. Тогда A может быть только композицией вращения вокруг центра и гомотетии, т.е все такие преобразования A: $\mathcal{Hs} \to \mathcal{Hs}$ описываются формулами

$$\begin{cases} E_1' = e^{\mu} E_1, \\ E_2' = e^{\mu}(E_2 \cdot \cos\alpha + E_3 \cdot \sin\alpha), \\ E_3' = e^{\mu}(-E_2 \cdot \sin\alpha + E_3 \cdot \cos\alpha). \end{cases} \quad (7)$$

Находим, что

$$[E_2', E_3'] = e^{2\mu}\cos^2\alpha[E_2, E_3] - e^{2\mu}\sin^2\alpha[E_3, E_2] =$$
$$= e^{2\mu}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)[E_2, E_3] = e^{2\mu}E_1 = e^{\mu} E_1'.$$

Значит, A: $\mathcal{Hs} \to \mathcal{Hs}$ является автоморфизмом, только в случае $\mu = 0$. Поэтому алгебра Ли $\mathcal{Hs}$ с евклидовым скалярным произведением допускает автоморфизмы, которые являются движениями, но не допускает автоморфизмов, которые являются подобиями.

Согласно [4] риманова левоинвариантная метрика на группе Hs задается так:

$$(g_{ij}(y)) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & -\varepsilon y^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon y^2 & 0 & 1 + \varepsilon (y^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $A_\alpha\colon \mathcal{Hs}\to\mathcal{Hs}$ задается формулами (7) при $\mu=0$. Тогда координаты в $\mathcal{Hs}$ преобразуются по правилу

$$\begin{cases} x'^1=x^1, \\ x'^2=x^2\cdot\cos\alpha-x^3\cdot\sin\alpha, \\ x'^3=x^2\cdot\sin\alpha+x^3\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Используя (1) находим, что

$$h_\alpha=\exp\circ A_\alpha\circ\exp^{-1}\colon Hs\to Hs$$

действует по формулам (4.1). Матрица дифференциала этого отображения $\mathbf{J}_\alpha(y)$ в произвольной точке и обратная к ней матрица $\mathbf{I}_\alpha(y)$ имеют вид

$$\mathbf{J}_\alpha(y)=\begin{pmatrix} 1 & -y^3\cdot\sin^2\alpha+\dfrac{y^2}{2}\sin2\alpha & -y^2\cdot\sin^2\alpha+\dfrac{y^3}{2}\sin2\alpha \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I}_\alpha(y)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -y^2\cdot\sin\alpha & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ y^3\cdot\sin\alpha & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Непосредственным вычислением находим, что

$$\mathbf{I}_\alpha^T(y)\cdot(g_{ij}(y))\cdot\mathbf{I}_\alpha(y)=$$

$$=\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & -\varepsilon(y^2\cdot\cos\alpha-y^3\cdot\sin\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon(y^2\cdot\cos\alpha-y^3\cdot\sin\alpha) & 0 & 1+\varepsilon(y^2\cdot\cos\alpha-y^3\cdot\sin\alpha)^2 \end{pmatrix},$$

И эта матрица, очевидно, совпадает с матрицей $(g_{ij}(y'))$. Значит, преобразование $h_\alpha\colon Hs\to Hs$, которое действует по формулам (4), действительно является движением для любого $\alpha\in\boldsymbol{R}$. В число таких преобразований входит также и преобразование S_1, которое определяется следующим автоморфизмом алгебры Ли $\mathcal{Hs}$:

$$\begin{cases} E_1'=E_1, \\ E_2'=-E_2, \quad (\alpha=\pi). \\ E_3'=-E_3 \end{cases} \tag{8.1}$$

Обозначим этот автоморфизм S_1. Заметим, что алгебра Ли $\mathcal{Hs}$ допускает еще автоморфизмы S_2 и S_3, которые действуют по формулам

$$\begin{cases} E_1'=-E_1, \\ E_2'=E_2, \\ E_3'=-E_3 \end{cases} \quad\text{и}\quad \begin{cases} E_1'=-E_1, \\ E_2'=-E_2, \\ E_3'=E_3. \end{cases} \tag{8.2}$$

и они тоже являются движениями. При этом очевидно, что $S_3 = S_2\circ S_1$. Любой автоморфизм второго типа, являющийся подобием, можно представить в виде композиции $S_2\circ(e^\mu A_\alpha)$. Так же, как и для первого типа, убеждаемся, что $\mu=0$. Обозначим $B_\alpha = S_2\circ A_\alpha$. Тогда это преобразование действует по формулам

$$\begin{cases} E_1'=-E_1, \\ E_2'=E_2\cdot\cos\alpha+E_3\cdot\sin\alpha, \\ E_3'=E_2\cdot\sin\alpha-E_3\cdot\cos\alpha. \end{cases} \tag{9}$$

(В частности, при $\alpha=\pi$ мы получаем S_3). Соответствующее преобразование $b_\alpha\colon Hs\to Hs$ группы Ли задается формулами (4.1).

Заметим, что $A_\alpha\circ S_2= S_2\circ A_{-\alpha}$. Поэтому формулы (4.1) охватывают и случай преобразований группы Ли Hs, соответствующих $A_\alpha\circ S_2$.

Легко проверить, что преобразования (7) при $\mu=0$ образуют однопараметрическую подгруппу, и отсюда можно вывести, что преобразования (4.1) тоже образуют однопараметрическую подгруппу. Композиция двух автоморфизмов второго типа алгебры Ли Hs является автоморфизмом первого типа. Поэтому эти автоморфизмы подгруппы не образуют. Следовательно, и преобразования (9) не образуют подгруппы в группе движений однородного пространства (Hs,g).

Пусть на группе Ли Hs задана левоинвариантная лоренцева метрика g сигнатуры (+,+,–), при которой центр $\mathcal{Z}$ алгебры Ли $\mathcal{Hs}$ является пространственноподобным. Тогда [3] матрица скалярного произведения в $\mathcal{Hs}$ с помощью автоморфизмов алгебры может быть приведена к виду

$$(g_{ij})_e=\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \varepsilon>0.$$

Предположим, что подобие алгебры Ли $\mathcal{Hs}$ является автоморфизмом первого типа. Тогда оно действует по формулам

$$\begin{cases} E_1'= e^\mu E_1, \\ E_2'= e^\mu(E_2\cdot\mathrm{ch}t + E_3\cdot\mathrm{sh}t), \\ E_3'= e^\mu(E_2\cdot\mathrm{sh}t + E_3\cdot\mathrm{ch}t); \end{cases} \tag{10.1}$$

или

$$\begin{cases} E_1'= e^\mu E_1, \\ E_2'=- e^\mu(E_2\cdot\mathrm{ch}t + E_3\cdot\mathrm{sh}t), \\ E_3'=- e^\mu(E_2\cdot\mathrm{sh}t + E_3\cdot\mathrm{ch}t). \end{cases} \tag{10.2}$$

В любом из этих случаев находим, что

$$[E_2',E_3'] = e^{2\mu}\mathrm{ch}^2t[E_2,E_3] - e^{2\mu}\mathrm{sh}^2t[E_3,E_2] =$$

$$= e^{2\mu}(\mathrm{ch}^2t-\mathrm{sh}^2t)[E_2,E_3] = e^{2\mu}E_1 = e^\mu E_1'.$$

Мы опять приходим к выводу, что рассматриваемые преобразования являются автоморфизмами только в случае $\mu=0$. Поэтому они являются движениями. Обозначим C_t и D_t – движения алгебры Ли $\mathcal{H}s$, которые задаются формулами (10.1) и (10.2) при $\mu=0$. Соответствующие преобразования группы Ли c_t и d_t задаются формулами (5.1). Знак «+» соответствует c_t, а знак «–» соответствует d_t.

Заметим, что автоморфизмы (8.1) и (8.2) тоже являются движениями для рассматриваемой метрики. Автоморфизм (8.1) уже входит во множество преобразований (10.2) при $\mu=0$, поэтому S_3 будет входить во множество преобразований $D_t\circ S_2$. Преобразования $C_t\circ S_2$ и $D_t\circ S_2$ действуют соответственно по формулам

$$\begin{cases} E_1'=-e^{\mu}E_1, \\ E_2'=e^{\mu}(E_2\cdot\mathrm{ch}\,t-E_3\cdot\mathrm{sh}\,t), \\ E_3'=e^{\mu}(E_2\cdot\mathrm{sh}\,t-E_3\cdot\mathrm{ch}\,t); \end{cases} \tag{11.1}$$

$$\begin{cases} E_1'=-e^{\mu}E_1, \\ E_2'=e^{\mu}(-E_2\cdot\mathrm{ch}\,t+E_3\cdot\mathrm{sh}\,t), \\ E_3'=e^{\mu}(-E_2\cdot\mathrm{sh}\,t+E_3\cdot\mathrm{ch}\,t). \end{cases} \tag{11.2}$$

Соответствующие преобразования группы Ли Hs действуют по формулам (5.2). Нетрудно заметить, что $S_2\circ C_t=C_{-t}\circ S_2$, а $S_2\circ D_t=D_{-t}\circ S_2$. Поэтому формулы (5.2) охватывают и случай преобразований группы Ли Hs, соответствующих преобразованиям $S_2\circ C_t$ и $S_2\circ D_t$.

Пусть на группе Ли Hs задана левоинвариантная лоренцева метрика g сигнатуры, при которой центр $\mathcal{Z}$ алгебры Ли $\mathcal{H}s$ является изотропным. Тогда (см. [3]) матрица скалярного произведения в $\mathcal{H}s$ с помощью автоморфизмов алгебры может быть приведена к виду

$$(g_{ij})_e=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},\ \varepsilon>0.$$

Совершим в алгебре Ли $\mathcal{H}s$ замену базиса

$$V_1=E_1,\ V_2=-\lambda E_3,\ V_3=E_2,\ \lambda=\varepsilon^{-1/2}>0.$$

Тогда матрица скалярного произведения примет вид

$$(g_{ij})_e=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

а операция скобки – вид $[V_2,V_3]=\lambda V_1$.

В соответствии с [5] любое подобие первого типа задается одной из формул

$$\begin{cases} V_1'=e^{(\mu+\nu)t}V_1, \\ V_2'=\pm e^{\mu t}V_2, \\ V_3'=\pm e^{(\mu-\nu)t}V_3; \end{cases} \tag{13.1}$$

$$\begin{cases} V_1'=e^{\mu t}V_1, \\ V_2'=\pm e^{\mu t}(V_1+tV_2), \\ V_3'=\pm e^{\mu t}((t^2/2)V_1+tV_2+V_3). \end{cases} \tag{13.2}$$

$\mu=\mathrm{const}$, $\nu=\mathrm{const}$, $t\in\boldsymbol{R}$. Находим, что в первом случае

$$[V_2',V_3']=e^{\mu t}e^{(\mu-\nu)t}[V_2,V_3]=e^{(2\mu-\nu)t}\lambda V_1=$$
$$=e^{(2\mu-\nu)t}e^{-(\mu+\nu)t}\lambda V_1'=e^{(\mu-2\nu)t}\lambda V_1'.$$

Значит, преобразование (13.1) будет автоморфизмом только при $(\mu-2\nu)t=0$. Случай $t=0$ соответствует тождественному преобразованию. Значит, при $\mu=2\nu$ формулы (13.1) задают автоморфизм алгебры Ли $\mathcal{H}s$, являющийся гомотетией с коэффициентом $e^{\mu t}$.

Для преобразования (13.2) находим, что

$$[V_2',V_3']=te^{2\mu t}[V_2,V_3]=te^{2\mu t}\lambda V_1=te^{\mu t}\lambda V_1'.$$

Значит, формулы (13.2) не задают автоморфизма алгебры Ли $\mathcal{H}s$, кроме случая $t=0$.

Итак, в случае изотропного центра алгебра Ли $\mathcal{H}s$ допускает однопараметрическую группу подобий u_t, являющихся автоморфизмами, которые действуют по формулам

$$V_1'=e^{3\nu t}V_1,\ V_2'=e^{2\nu t}V_2,\ V_3'=e^{\nu t}V_3,\ \nu=\mathrm{const},\ t\in\boldsymbol{R},$$

а также она допускает подобия-автоморфизмы вида $W_t=U_t\circ S_1=S_1\circ U_t$, которые вместе с U_t можно задать едиными формулами

$$V_1'=e^{3\nu t}V_1,\ V_2'=\pm e^{2\nu t}V_2,\ V_3'=\pm e^{\nu t}V_3,\quad \nu=\mathrm{const},\ t\in\boldsymbol{R}. \tag{14.1}$$

Заменим теперь базис $\{V_1,V_2,V_3\}$ на $\{V_1,\varepsilon^{1/2}V_2,V_3\}$. Для удобства обозначим последний базис как $\{E_1,E_2,E_3\}$. В этом базисе операция скобки имеет вид (3), матрица скалярного произведения имеет вид

$$(g_{ij})_e=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

а преобразования (14.1) будут действовать по таким же формулам:

$$E_1'=e^{3\nu t}E_1,\ E_2'=\pm e^{2\nu t}E_2,\ E_3'=\pm e^{\nu t}E_3,\quad \nu=\mathrm{const},\ t\in\boldsymbol{R}. \tag{14.2}$$

Соответствующие подобия пространства (Hs,g) действуют по формулам (6.1). Преобразования, которым соответствует знак «+», образуют однопараметрическую группу u_t подобий пространства (Hs, g). Непосредственным вычислением (способ вычисления см. в [4]) находим, что метрический тензор на Hs задается матрицей

$$(g_{ij}(y)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & -2y^2 \end{pmatrix}, \ \varepsilon > 0. \tag{15}$$

Матрица, обратная к матрице Якоби преобразования u_t:

$$\mathbf{I}_t(y) = \begin{pmatrix} e^{-3\nu t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\nu t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\nu t} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{I}_\alpha{}^T(y)\cdot(g_{ij}(y))\cdot\mathbf{I}_\alpha(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-4\nu t} \\ 0 & e^{-4\nu t}\varepsilon & 0 \\ e^{-4\nu t} & 0 & -2e^{-2\nu t}y^2 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-4\nu t}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & -2(y_2') \end{pmatrix} = e^{-4\nu t}(g_{ij}(y')).$$

Значит, $u_t^* g = e^{-4\nu t} g$, т.е. преобразования u_t действительно являются подобиями пространства (Hs, g) с коэффициентом $e^{2\nu t}$.

Любое подобие-автоморфизм второго типа алгебры Ли $\mathcal{H}s$ для скалярного произведения (15) можно представить в виде композиции $U_t \circ S_2 = S_2 \circ U_t$ либо в виде композиции $W_t \circ S_2 = S_2 \circ W_t$. Соответствующие подобия пространства (Hs, g) задаются формулами (6.2).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Петров, А.З. Новые методы в общей теории относительности / А.З. Петров. – М.: Наука, 1966.
2. Milnor, J. Curvatures of left-invariant metrics on Lie groups / J. Milnor // Adv. Math. – 1976. – Vol. 21. – P. 293–329.
3. Гаврилов, С.П. Приведение симметрической невырожденной билинейной формы на двумерных и трехмерных алгебрах Ли к каноническому виду автоморфизмами алгебр Ли / С.П. Гаврилов // Гравит. и теор. относит. – 1980. – Вып. 17. – С. 12–23.
4. Гаврилов, С.П. Геодезические левоинвариантных метрик на односвязной трехмерной группе Ли II типа Бианки / С.П. Гаврилов // Гравит. и теор. относит. – 1982. – Вып. 19. – С. 37–47.
5. Alekseevski, D. Self-similar Lorentzian manifolds / D. Alekseevski // Ann. of Global Anal. Geom. – 1985. – Vol. 3, № 1. – С. 59–84.

Поступила в редакцию 10.09.2011. Принята в печать 28.10.2011
Адрес для корреспонденции: 210038, г. Витебск, пр-т Победы, д. 4, кв. 236,
e-mail: P._Michael@mail.ru; geom.@vsu.by – Подоксенов М.Н.