

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра математики

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В СРЕДЕ WOLFRAM MATHEMATICA

Методические рекомендации

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2024*

УДК 004.4: 517.1(075.8)
ББК 22.195я73+22.161я73
Р47

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 24.10.2024.

Составители: заведующий кафедрой математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук **Т.Б. Караулова**; студент 4-го курса факультета математики и информационных технологий ВГУ имени П.М. Машерова **Т.Р. Халилов**

Р е ц е н з е н т ы :

заведующий кафедрой «Математика и информационные технологии»
УО «ВГТУ» *Т.В. Никонова*;

заведующий кафедрой прикладного и системного программирования
ВГУ имени П.М. Машерова,
кандидат физико-математических наук, доцент *Е.А. Корчевская*

**Решение задач математического анализа в среде Wolfram
Mathematica : методические рекомендации / сост.: Т.Б. Караулова,
Т.Р. Халилов. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2024. – 27 с.**

Данное издание подготовлено в соответствии с учебными программами дисциплин «Компьютерная математика», «Системы компьютерной алгебры» и «Современные системы компьютерной математики» I ступени высшего образования. В рекомендациях кратко излагается теоретический материал, разобраны примеры решения ключевых задач математического анализа в пакете Wolfram Mathematica, предложены задания для самостоятельного решения. Предназначены для всех специальностей факультета математики и информационных технологий.

УДК 004.4: 517.1(075.8)
ББК 22.195я73+22.161я73

© ВГУ имени П.М. Машерова, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
1. Основы работы в пакете Mathematica	5
2. Математический анализ	10
2.1. Предел функции	10
2.2. Производная функции	14
2.3. Неопределенный интеграл	18
2.4. Определенный интеграл	22
ЛИТЕРАТУРА	26

ПРЕДИСЛОВИЕ

Wolfram Mathematica – это мощная вычислительная среда, активно используемая в научных исследованиях, инженерии, математике и образовании. Она предоставляет пользователям разнообразный набор инструментов для выполнения сложных вычислений, анализа данных, визуализации и программирования. В методических рекомендациях изложены основные принципы использования Wolfram Mathematica для решения задач по основам математического анализа.

Пакет Mathematica обладает широкими возможностями:

- позволяет выполнять точные математические операции с символами, такими как упрощение выражений, решение уравнений и интегрирование;
- поддерживает высокоточные численные методы для решения уравнений, оптимизации и моделирования;
- предоставляет средства для создания двух- и трехмерных графиков, анимации и интерактивных визуализаций;
- включает мощный язык программирования Wolfram Language, который позволяет создавать сложные алгоритмы и автоматизировать задачи.
- поддерживает импорт и экспорт данных в различных форматах, а также работу с базами данных и веб-сервисами;
- позволяет создавать интерактивные документы и приложения, которые можно использовать для обучения и демонстраций.

Использование Wolfram Mathematica для решения математических задач имеет несколько значительных преимуществ:

- высокая точность вычислений и возможность автоматизации;
- имеет средства визуализации, которые помогают лучше понять структуру и свойства математических объектов, а также представлять результаты в наглядной форме;
- поддерживает широкий спектр математических методов и подходов для решения различных типов задач;
- широко используется в образовательных учреждениях и научных исследованиях.

Данные методические рекомендации содержат краткие теоретические сведения, примеры решения задач в пакете Mathematica и задачи для самостоятельного решения.

Адресованы студентам факультета математики и информационных технологий Витебского государственного университета имени П.М. Машерова.

Представленное учебное издание может использоваться для подготовки к занятиям по дисциплинам: «Компьютерная математика», «Системы компьютерной алгебры» и «Современные системы компьютерной математики».

1. ОСНОВЫ РАБОТЫ В ПАКЕТЕ MATHEMATICA

Основные команды и интерфейс

Wolfram Mathematica предоставляет пользователям интуитивно понятный и мощный интерфейс, который включает в себя множество инструментов для выполнения различных математических и вычислительных задач.

Рабочая область – основное пространство для работы, где пользователи могут вводить команды, выполнять вычисления и создавать документы. Рабочая область поддерживает текст, графику, интерактивные элементы и код, что делает её универсальным инструментом для создания динамичных документов.

При запуске программы на экране появляется главное окно (рис. 1.1).

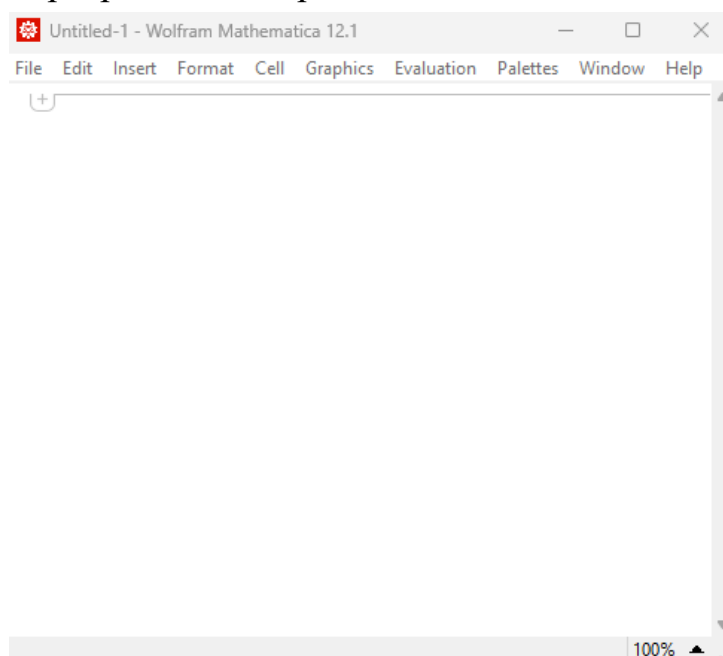


Рисунок 1.1

Главное окно системы содержит строку заголовка, главное меню (File, Edit, Insert, Format, Cell, Graphics, Evaluation, Palettes, Window, Help) и большой экран редактирования.

Приведем основные пункты главного меню системы.

1) **File** – действия с файлами программы:

- **New** – создание нового файла;
- **Open** – открытие из каталога уже созданного файла;
- **Close** – закрытие файла без сохранения;
- **Save** – сохранение файла с прежним именем;
- **Save As** – сохранение файла с новым именем;

- **Printing Settings** – управление параметрами представления данных на экране;

- **Print** – печать документа;
- **Exit** – завершение работы всей программы.

2) **Edit** – операции редактирования:

- **Undo** – отмена операции;
- **Cut** – удаление выделенного фрагмента документа и помещение его в буфер обмена;
- **Copy** – копирование;
- **Paste** – вставка фрагментов из буфера обмена в заданную область документа;
- **Clear** – удаление фрагментов документа без его сохранения в буфере;
- **Copy As** – копирование в заданном формате;
- **Select All** – выделение всего документа;
- **Check Spelling** – проверка орфографии;
- **Find** – задание шаблона для поиска;
- **Find Next** – переход к следующему фрагменту, совпадающему с шаблоном;
- **Find Previous** – переход к предыдущему фрагменту, совпадающему с шаблоном;
- **Preferences** – вызов окна настроек системы.

3) **Insert** – введение данных в окно редактирования. Например, в подпункте **Typesetting**:

- **Superscript** – верхний индекс;
- **Subscript** – нижний индекс;
- **Matching []** – текст в скобках [];
- **Matching ()** – текст в скобках ();
- **Matching { }** – текст в скобках { } и т. д.

Пункт меню **Color** открывает окно выбора цвета, с помощью **Horizontal Line** открывается подменю для вставки линии указанной толщины выше или ниже выбранной ячейки. Кроме того, можно вставлять в текст графику, формулы и т. д.

4) **Format** – изменение формата текста на экране и при печати, установка стилей, управление окном редактирования, стиль ячеек, их содержание, размер, управление шрифтами и т. д.:

- **Style** – установка параметров текста (шрифт, размер символов и т.д.);

- **Screen Environment** – изменение формата текста на экране, имеет следующие установки:

- **Working** – стиль типичный;
- **Slide Show** – создает классическую записную книжку со слайд-шоу;
- **Printout** – оптимальный стиль для печати.

5) **Cell** – работа с ячейками:

- **Convert To** – преобразование формата содержимого ячеек:
- **InputForm** – формат ввода;
- **OutputForm** – формат вывода;
- **StandartForm** – стандартный формат;
- **TradicionalForm** – традиционный формат;
- **Bitmap** – растровый формат изображений.

При работе с большим количеством математических знаков разумно использовать стандартный формат.

- **Cell Properties** – установление формата ячеек:
- **Open** – устанавливает ячейку открытой или закрытой;
- **Editable** – устанавливает ячейку редактируемой или не редактируемой;
- **Evaluatable** – устанавливает ячейку оцениваемой или не оцениваемой;
- **Initialization Cell** – делает ячейку инициализационной или неинициализационной.
- **Grouping** – группировка ячеек:
- **Automatic Grouping** – объединение ячеек в соответствии с их стилем;
- **Manual Grouping** – объединение и разъединение ячеек.

По умолчанию выбран режим **Automatic Grouping**.

- **Divide Cell** – разделение сгруппированных ячеек;
- **Merge Cells** – объединение выделенных ячеек.

6) **Graphics** – работа с графическими данными:

- **New Graphics** – вывод окна для построения графика;
- **Drawing Tools** – вывод окна графического редактора;

7) **Evaluation** – управление процессом вычислений:

- **Evaluate Cells** – вычисление выделенных ячеек;
- **Evaluate in Place** – вычисление выделенных выражений в строке ввода;
- **Evaluate Initialization Cells** – вычисление инициализированных ячеек без их выделения;

- **Evaluate Notebook** – вычисление всех ячеек документа;
- **Interrupt Evaluation** – прерывание текущего вычисления;
- **Abort Evaluation** – сбрасывание текущего вычисления;
- **Remove from Evaluation Queue** – отмена вычисления ячеек, стоящих на «очереди».

Следующие опции связаны с возможностью использования ядра (**Kernel**) другого компьютера:

- **Default Kernel** – выбор ядра, используемого по умолчанию;
- **Notebook's Kernel** – выбор ядра для вычислений в текущем документе;
- **Start Kernel** – запуск выбранного ядра;
- **Quit Kernel** – завершение работы ядра.

8) **Palettes** – управление вводом данных.

Wolfram Mathematica позволяет осуществить ввод данных двумя способами: вручную и с использованием палитр (**Palettes**). Палитры можно выводить на экран и убирать с экрана, создавать собственные палитры с требуемым набором функций (рис. 1.2).

9) **Window** – управление внешним видом окон:

- **Magnification** – это опция для стиля и ячейки, определяющая, какое увеличение использовать для отображения;
- **Toolbar** – открывает подменю для переключения различных панелей инструментов в выбранном блокноте.

10) **Help** – управление справочной системой.



2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2.1. Предел функции

Пример 2.1.1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x}$.

Решение. При подстановке предельной точки в предел возникает неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для устранения этой неопределенности, мы умножаем и делим числитель и знаменатель на $7x$ и $5x$ соответственно. Это позволяет нам использовать первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7x}{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7x}{5x}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin 7x}{7x}}{\frac{\sin 5x}{5x}}\right) = \frac{7}{5}.$$

Пример 2.1.2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}$.

Решение. Для решения используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\text{Имеем: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1+2}{2x-1}\right)^{3x+1} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x-1} + \frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1}.$$

Положим $\frac{2}{2x-1} = \frac{1}{y}$. Тогда $x = y + \frac{1}{2}$ и при $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$.

$$\text{Поэтому } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{3y+5/2} = \\ = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\left((1 + \frac{1}{y})^y\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{5/2}\right) = e^3.$$

Пример 2.1.3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$.

Решение. Исходное выражение имеет неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ при $x \rightarrow -2$. Для устранения этой неопределенности выделяем в числителе и знаменателе множители, которые стремятся к нулю, после чего используем свойства пределов:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x+3}{3x-4} = \frac{7}{10}.$$

Пример 2.1.4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}$.

Решение. Если вместо x подставить ∞ , то имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда в числителе и знаменателе вынесем x^4 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4\left(7+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^4}\right)}{x^4\left(6+\frac{3}{x^2}-\frac{7}{x^3}\right)} = \frac{7}{6}.$$

Пример 2.1.5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^4 + 2x^3 + 1}{3x^3 - 2}$.

Решение. Неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. В этом случае числитель и знаменатель разделим на x^4 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^4 + 2x^3 + 1}{3x^3 - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{7x^4}{x^4} + \frac{2x^3}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\frac{3x^3}{x^4} - \frac{2}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4}}{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^4}} = \frac{7+0+0}{0-0} = \infty.$$

Пример 2.1.6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x - 3}{2x^3 + 4x + 3}$.

Решение. Неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Мы видим, что степень x в числителе меньше чем в знаменателе, вынесем x и x^3 в числителе и знаменателе соответственно:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x - 3}{2x^3 + 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(10 - \frac{3}{x})}{x^3(2 + \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10 - \frac{3}{x}}{x^2(2 + \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3})} = \frac{10}{\infty} = 0.$$

Пример 2.1.7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{21+x} - 5}{x^3 - 64}$.

Решение. Решение предела основано на приеме умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение к числителю и последующем разложении на множители:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{21+x} - 5}{x^3 - 64} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{21+x} - 5)(\sqrt{21+x} + 5)}{(x^3 - 64)(\sqrt{21+x} + 5)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{21+x-25}{(x^3 - 64)(\sqrt{21+x} + 5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(x^2+4x+16)(\sqrt{21+x} + 5)} = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{(x^2+4x+16)(\sqrt{21+x} + 5)} \right) = \frac{1}{480}. \end{aligned}$$

Пример 2.1.8. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x+3}{2x-5} \right)^{1+7x}$.

Решение. Это неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы решить её, разделим числитель и знаменатель на наивысшую степень x в знаменателе, которая равна x : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x+3}{2x-5} \right)^{1+7x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4+\frac{3}{x}}{2-\frac{5}{x}} \right)^{1+7x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{1+7x} = 2^{-\infty} = 0$.

Пример 2.1.9. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(\frac{x}{2})}{\pi^2 - x^2}$.

Решение. Это неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для её разрешения используется тригонометрическое тождество $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$. Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(\frac{x}{2})}{\pi^2 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2})}{\pi^2 - x^2}.$$

Далее используется тождество $1 - \cos(x) = 2\sin^2(x/2)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2\sin^2(\frac{\pi-x}{4})}{(\pi-x)(\pi+x)} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2\sin(\frac{\pi-x}{4})\sin(\frac{\pi-x}{4})}{4 \cdot \frac{\pi-x}{4}(\pi+x)} = \frac{2}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\frac{\pi-x}{4})}{(\pi+x)} \times \\ &\times \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\frac{\pi-x}{4})}{\frac{\pi-x}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\frac{\pi-x}{4})}{\pi+x} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

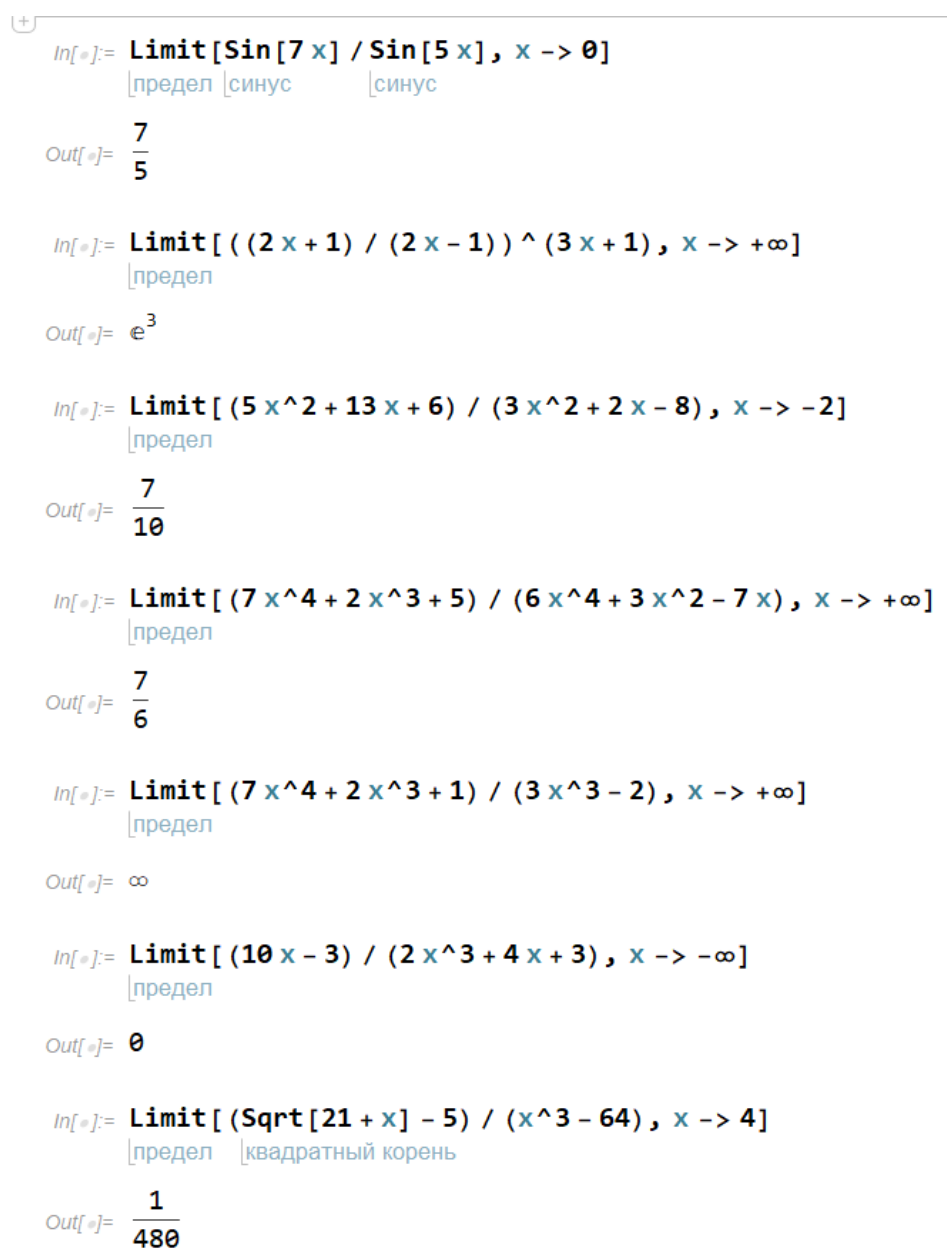
Вычисления в среде Mathematica.

Для вычисления предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ используется функция **Limit**[$f(x)$, $x \rightarrow x_0$].

Запись элементарных функций в системе Mathematica имеет несколько отличий от математических обозначений, например, $\cos x \rightarrow \text{Cos}[x]$, $\sin x \rightarrow \text{Sin}[x]$, $\text{tg } x \rightarrow \text{Tan}[x]$, $\text{ctg } x \rightarrow \text{Cot}[x]$, $\ln x \rightarrow \text{Log}[x]$.

Mathematica вычисляет все элементарные функции как с действительным, так и с комплексным аргументом.

Вычисление пределов функций (примеры 2.1.1-2.1.9) в системе Mathematica приведено на рис. 2.1.1. и 2.1.2



```
(+)
In[ ]:= Limit[Sin[7 x] / Sin[5 x], x -> 0]
      предел [синус] [синус]

Out[ ]:= 7/5

In[ ]:= Limit[( (2 x + 1) / (2 x - 1) ) ^ (3 x + 1), x -> +∞]
      предел

Out[ ]:= e^3

In[ ]:= Limit[(5 x^2 + 13 x + 6) / (3 x^2 + 2 x - 8), x -> -2]
      предел

Out[ ]:= 7/10

In[ ]:= Limit[(7 x^4 + 2 x^3 + 5) / (6 x^4 + 3 x^2 - 7 x), x -> +∞]
      предел

Out[ ]:= 7/6

In[ ]:= Limit[(7 x^4 + 2 x^3 + 1) / (3 x^3 - 2), x -> +∞]
      предел

Out[ ]:= ∞

In[ ]:= Limit[(10 x - 3) / (2 x^3 + 4 x + 3), x -> -∞]
      предел

Out[ ]:= 0

In[ ]:= Limit[(Sqrt[21 + x] - 5) / (x^3 - 64), x -> 4]
      предел [квадратный корень]

Out[ ]:= 1/480
```

Рисунок 2.1.1

In[*]:= **Limit**[((4 x + 3) / (2 x - 5)) ^ (1 + 7 x), x -> -∞]
|предел

Out[*]= 0

In[*]:= **Limit**[(1 - Sin[x / 2]) / (Pi^2 - x^2), x -> Pi]
|предел |синус |число пи |числ

Out[*]= 0

Рисунок 2.1.2

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

№ п/п	$f(x)$	$g(x)$	x_0
1	$3x^2 - 10x - 8$	$4x^2 + 6x - 64$	4
2	$7x^4 + 2x^3 + 5$	$6x^4 + 3x^2 - 7x$	$+\infty$
3	$\sqrt{17+x} - 5$	$x^3 - 32$	4
4	$15x - 7$	$3x^3 + 8x + 1$	$-\infty$
5	$2x^5 + 3x^3 - 4x$	$3x^2 - 4x + 2$	$-\infty$

2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)}$.

№ п/п	$f(x)$	$g(x)$	x_0
1	$\frac{x+2}{7x-1}$	$3x^2$	$+\infty$
2	$1 + \sin^2 3x$	$\frac{1}{1 - \cos 2x}$	0
3	$5-4x$	$\frac{3x}{2-2x}$	1
4	$1 - \frac{2}{x}$	$4x - 5$	$-\infty$
5	$1 - \sin x$	$\frac{1}{\sin x}$	0

2.2. Производная функции

Пример 2.2.1. Найти производную функции $y = \frac{2x}{3x+1}$.

Решение. Выносим постоянный множитель за скобки $(cu)' = c \cdot u'$, далее используем правило дифференцирования частного $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$.

$$\begin{aligned}(y)' &= \left(\frac{2x}{3x+1}\right)' = 2 \left(\frac{x}{3x+1}\right)' = 2 \frac{(x)' \cdot (3x+1) - (3x+1)' \cdot x}{(3x+1)^2} = 2 \frac{1 \cdot (3x+1) - (3 \cdot (x)' + (1)') \cdot x}{(3x+1)^2} = \\&= 2 \frac{3x+1 - (3 \cdot 1 + 0) \cdot x}{(3x+1)^2} = \frac{2}{(3x+1)^2}.\end{aligned}$$

Пример 2.2.2. Найти производную функции $y = (\cos 5x)^{\sin 3x}$.

Решение. Применим метод логарифмического дифференцирования:

$$(\ln y)' = (\ln(\cos 5x)^{\sin 3x})'.$$

Отсюда $\frac{y'}{y} = (\sin 3x \cdot \ln(\cos 5x))'$, выражаем y' :

$$y' = y(\sin 3x \cdot \ln(\cos 5x))'.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}y' &= (\cos 5x)^{\sin 3x} \cdot ((\sin 3x)' \ln(\cos 5x) + \sin 3x (\ln(\cos 5x))') = \\&= (\cos 5x)^{\sin 3x} \left(3 \cos 3x \ln(\cos 5x) + \sin 3x \frac{(\cos 5x)'}{\cos 5x} \right) = \\&= (\cos 5x)^{\sin 3x} \left(3 \cos 3x \ln(\cos 5x) + \sin 3x \frac{-5 \sin 5x}{\cos 5x} \right) = \\&= (\cos 5x)^{\sin 3x} (3 \cos 3x \ln(\cos 5x) - 5 \sin 3x \cdot \operatorname{tg} 5x).\end{aligned}$$

Пример 2.2.3. Найти производную функции $y = x^3 \sin x$.

Решение. Используем правило дифференцирования произведения

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$. Тогда

$$\begin{aligned}(y)' &= (x^3 \sin x)' = (x^3)' \cdot \sin(x) + (\sin(x))' \cdot x^3 = 3x^2 \sin(x) + x^3 \cos(x) = \\&= x^2(3 \sin(x) + x \cos(x)).\end{aligned}$$

Пример 2.2.4. Найти производную функции $y = \sin^2(x^3)$.

Решение. Это сложная функция, поэтому используем свойство

$u^n(x)'_x = n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'_x(x)$, после чего получаем $(\sin(x^3))'$, применяем свойство $f'_x(u(x)) = f'_u(u) \cdot u'_x(x)$.

$$\begin{aligned}(y)' &= (\sin^2(x^3))' = 2 \cdot \sin(x^3) \cdot (\sin(x^3))' = 2 \sin(x^3) \cdot \cos(x^3) \cdot (x^3)' = \\&= 6x^2 \cos(x^3) \sin(x^3).\end{aligned}$$

Пример 2.2.5. Найти производную функции $y = \frac{x^4+1}{x^4-1}$.

Решение. Используем $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

$$\begin{aligned}
(y)' &= \left(\frac{x^4+1}{x^4-1} \right)' = \frac{(x^4+1)' \cdot (x^4-1) - (x^4-1)' \cdot (x^4+1)}{(x^4-1)^2} = \\
&= \frac{((x^4)' + (1)') \cdot (x^4-1) - ((x^4)' - (1)') \cdot (x^4+1)}{(x^4-1)^2} = \frac{(4 \cdot x^3 + 0) \cdot (x^4-1) - (4 \cdot x^3 - 0) \cdot (x^4+1)}{(x^4-1)^2} = \\
&= \frac{4x^3(x^4-1) - 4x^3(x^4+1)}{(x^4-1)^2} = -\frac{8x^3}{(x^4-1)^2}.
\end{aligned}$$

Пример 2.2.6. Найти производную функции $y = 3x^2 \cos(7x + 1)$.

Решение. Выносим постоянный множитель $(cu)' = c \cdot u'$ и используем правило дифференцирования произведения $u \cdot v = u' \cdot v + v' \cdot u$.

$(y)' = (3x^2 \cos(7x + 1))' = 3 \cdot (x^2 \cos(7x + 1))' = 3 \cdot ((x^2)' \cdot \cos(7x + 1) + (\cos(7x + 1))' \cdot x^2)$. Получили сложную функцию $(\cos(7x + 1))'$, используем $f'_x(u(x)) = f'_u(u) \cdot u'_x(x)$:

$$\begin{aligned}
3 \cdot (2 \cdot x \cdot \cos(7x + 1) - \sin(7x + 1) \cdot (7x + 1)' \cdot x^2) &= 3 \cdot (2x \cos(7x + 1) + \\
+ 1) - x^2 \sin(7x + 1) \cdot (7 \cdot (x)' + (1)')) &= 3 \cdot (2x \cos(7x + 1) - \\
- x^2 \sin(7x + 1) \cdot (7 \cdot 1 + 0)) &= 3(2x \cos(7x + 1) - 7x^2 \sin(7x + 1)) = \\
6x \cos(7x + 1) - 7x^2 \sin(7x + 1).
\end{aligned}$$

Пример 2.2.7. Найти производную функции $y = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

Решение. Используем свойство $(au + bv - cw)' = a \cdot u' + b \cdot v' - c \cdot w'$.

$$(y)' = (3x^3 - 2x^2 + 3x - 1)' = 3 \cdot (x^3)' - 2 \cdot (x^2)' + (3x)' = 3 \cdot 3 \cdot x^2 - 2x + 3 = 9x^2 - 4x + 3.$$

Пример 2.2.7. Найти производную функции $y = (x^5 + 3x - 1)^4$.

Решение. Видим сложную функцию и используем свойство

$$u^n(x)'_x = n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'_x(x),$$

получаем $(x^5 + 3x - 1)'$ и используем свойство

$$(au + bv - cw)' = a \cdot u' + b \cdot v' - c \cdot w'.$$

$$\begin{aligned}
(y)' &= ((x^5 + 3x - 1)^4)' = 4 \cdot (x^5 + 3x - 1)^3 \cdot (x^5 + 3x - 1)' = 4(x^5 + 3x - 1)^3 \cdot ((x^5)' + 3 \cdot (x)' - (1)') = \\
&= 4(x^5 + 3x - 1)^3 \cdot (5 \cdot x^4 + 3 \cdot 1 - 0) = 4(5x^4 + 3)(x^5 + 3x - 1)^3.
\end{aligned}$$

Вычисления в среде Mathematica.

Для вычисления производной используется функция **D[f,x]**, где f – функция от переменной x или алгебраическое выражение, содержащее переменную x .

Обязательно необходимо указывать аргумент функции, в противном случае не получится результат. При вычислении n -й производной используется функция **D[f,x,n]**. Используем функцию **Simplify** в конце строки после основной функции, чтобы результат имел вид упрощенного выражения.

Вычисление производных функций (примеры 2.2.1-2.2.7) в системе Mathematica приведено на рис. 2.2.1. и 2.2.2.

```
In[ ]:= D[(2 * x) / (3 * x + 1), x] // Simplify
|дифференцировать|упростить

Out[ ]:=  $\frac{2}{(1 + 3 x)^2}$ 

In[ ]:= D[Cos[5 x]^Sin[3 x], x] // Simplify
|дифференцировать|упростить

Out[ ]:= Cos[5 x]^Sin[3 x] (3 Cos[3 x] × Log[Cos[5 x]] - 5 Sin[3 x] × Tan[5 x])
```

Рисунок 2.2.1

```
In[ ]:= D[x^3 Sin[x], x] // Simplify
|д... |синус|упростить

Out[ ]:= x^2 (x Cos[x] + 3 Sin[x])

In[ ]:= D[Sin[x^3]^2, x]
|дифференцировать|

Out[ ]:= 6 x^2 Cos[x^3] × Sin[x^3]

In[ ]:= D[(x^4 + 1) / (x^4 - 1), x] // Simplify
|дифференцировать|упростить

Out[ ]:=  $-\frac{8 x^3}{(-1 + x^4)^2}$ 

In[ ]:= D[3 x^2 Cos[7 x + 1], x]
|диф... |косинус|

Out[ ]:= 6 x Cos[1 + 7 x] - 21 x^2 Sin[1 + 7 x]

In[ ]:= D[3 x^3 - 2 x^2 + 3 x - 1, x] // Simplify
|дифференцировать|упростить

Out[ ]:= 3 - 4 x + 9 x^2

In[ ]:= D[(x^5 + 3 x - 1)^4, x] // Simplify
|дифференцировать|упростить

Out[ ]:= 4 (3 + 5 x^4) (-1 + 3 x + x^5)^3
```

Рисунок 2.2.2

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти производные заданных функций $y=f(x)$.

№ п/п	$f(x)$
1	$4x^2 \operatorname{ctg}(5x + 1)$
2	$\frac{3e^{7x+2}}{2x + 4}$
3	$(4\sqrt{x} + 3x^2) \operatorname{arctg}^2(2x + 1)$
4	$\ln(2x + \sqrt{7 + 2x^2})$
5	$\arcsin^4(2\sqrt{x} + 1) + 3 \cdot \ln \sqrt{\frac{1 + 2x}{1 - 2x}}$
6	$\ln(3x + 5)$
7	$(4x^3 + 7x + 1) \cos 5x$
8	$\frac{x + 1}{2x + 3}$
9	$(x^3 - 1)e^{5x}$
10	$\sin 2x \cos 3x$

2.3. Неопределенный интеграл

Пример 2.3.1. Найти неопределенный интеграл

$$\int \left(4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^3} + 1 \right) dx.$$

Решение. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от каждой функции:

$$\int \left(4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^3} + 1 \right) dx = 4 \int x^3 dx - 2 \int x^{\frac{2}{3}} dx + 2 \int x^{-3} dx + \int dx.$$

$$\text{Далее интегрируем каждую часть отдельно } \int \left(4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^3} + 1 \right) dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + x + C = x^4 - \frac{6}{5} \sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{x^2} + x + C.$$

Пример 2.3.2. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию на сумму двух дробей:

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} dx + \int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = -\frac{1}{x} + \arctg x + C.$$

Пример 2.3.3. Найти неопределенный интеграл $\int 3^x e^{2x} dx$.

$$\text{Решение. } \int 3^x e^{2x} dx = \int (3e^2)^x dx = \frac{(3e^2)^x}{\ln(3e^2)} + C = \frac{3^x e^{2x}}{2 \ln(3) \ln(e)} + C.$$

Пример 2.3.4. Найти неопределенный интеграл $\int (2x - 7)^9 dx$.

Решение. Решение интеграла $\int (2x - 7)^9 dx$ основано на методе замены переменной (метод подстановки) и формуле интегрирования степенной функции. Введем новую переменную $u = 2x - 7$. Тогда $\frac{du}{dx} = 2$, отсюда $du = 2dx$ и $dx = \frac{du}{2}$. Подставляем u и dx в исходный интеграл:

$$\int (2x - 7)^9 dx = \int u^9 \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^9 du.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{1}{2} \int u^9 du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{10}}{10} \right) + C = \frac{u^{10}}{20} + C.$$

Возвращаемся к исходной переменной x , подставляя $u = 2x - 7$:

$$\frac{u^{10}}{20} + C = \frac{(2x - 7)^{10}}{20} + C.$$

Пример 2.3.5. Найти неопределенный интеграл $\int \cos(7x - 3) dx$.

Решение. Используем метод замены переменной (метод подстановки). Введем новую переменную $u = 7x - 3$. Выразим $du = 7 dx$. Отсюда $dx = \frac{du}{7}$. Подставим u и dx в исходный интеграл: $\int \cos(7x-3) dx = \int \cos(u) \left(\frac{du}{7} \right) = \frac{1}{7} \int \cos(u) du$. Интеграл от $\cos(u)$ – это стандартный табличный интеграл:

$\int \cos(u) du = \sin(u) + C$, где C – константа интегрирования. Подставим обратно $u = 7x - 3$ и получим $\frac{1}{7} \int \cos(u) du = \frac{1}{7} \sin(u) + C = \frac{1}{7} \sin(7x - 3) + C$.

Пример 2.3.6. Найти неопределенный интеграл $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

Решение. Решение интеграла $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$ требует использования интегрирования по частям. Формула интегрирования по частям: $\int u dv = uv - \int v du$

Выразим $u = \operatorname{arctg} x$, отсюда $du = \frac{dx}{1+x^2}$. Тогда $dv = x dx$ и $v = \frac{x^2}{2}$.

Подставляем u , du , v и dv , и в формулу интегрирования по частям:

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2}$$

Второй интеграл можно упростить, разделив числитель на знаменатель:

$$\int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx. \text{ Интегрируем: } \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{x - \operatorname{arctg} x}{2} + C_1.$$

Объединяем результаты: $\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x - \operatorname{arctg} x}{2} + C$, где

$C = C_1$ – константа интегрирования. Можно немного упростить выражение: $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x \cdot (1+x^2) - x) + C$.

Пример 2.3.7. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} \, dx$.

Решение. Заметим, что числитель почти совпадает с производной знаменателя. Производная знаменателя $x^2 + 4x + 5$ равна $2x + 4$. Чтобы использовать замену переменной, нам нужно преобразовать числитель. Мы можем записать числитель как: $x + 2 = \frac{2x + 4}{2}$. Введем замену: $u = x^2 + 4x + 5$. Тогда

дифференциал $du = (2x + 4)dx$. Подставим u и du в интеграл: $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} \, dx =$

$$= \int \frac{\frac{2x+4}{2}}{x^2+4x+5} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}. \text{ Интеграл от } \frac{1}{u} \text{ — это натуральный логарифм:}$$

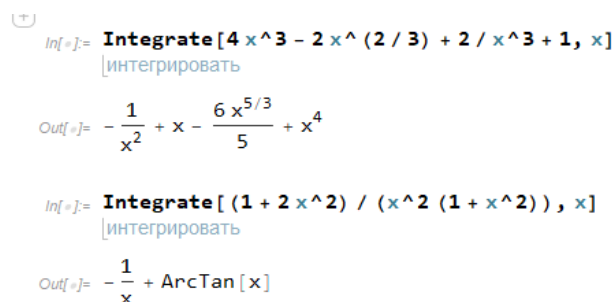
$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C.$$

Подставляем обратно $u = x^2 + 4x + 5$ (поскольку $x^2 + 4x + 5$ всегда положительно, модуль можно опустить): $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x + 5) + C$.

Вычисления в среде Mathematica.

В системе Mathematica неопределенный интеграл вычисляется с помощью функции **Integrate**[*f*,*x*], где *f* – некоторая подынтегральная функция, *x* – переменная интегрирования. Кроме того, интеграл $\int f dx$ может быть введен с помощью команды **Palettes**. В системе Mathematica произвольная константа интегрирования *C* не прибавляется.

Вычисление неопределенных интегралов (примеры 2.3.1-2.3.7) в системе Mathematica приведено на рис. 2.3.1.-2.3.3.



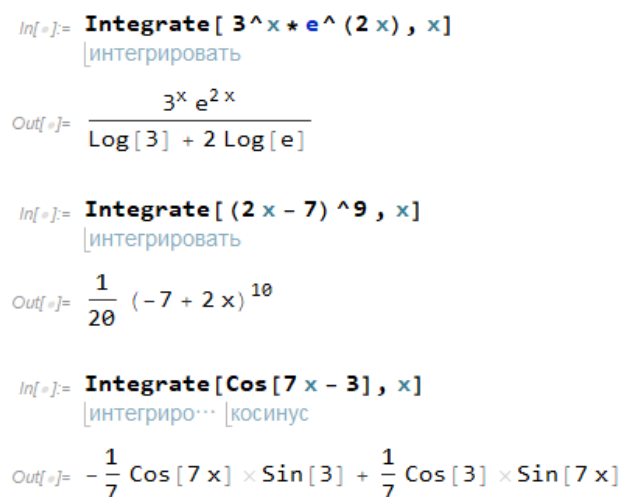
```

In[ ]:= Integrate[4 x^3 - 2 x^(2/3) + 2/x^3 + 1, x]
Out[ ]:= -1/x^2 + x - (6 x^(5/3))/5 + x^4

In[ ]:= Integrate[(1 + 2 x^2) / (x^2 (1 + x^2)), x]
Out[ ]:= -1/x + ArcTan[x]

```

Рисунок 2.3.1



```

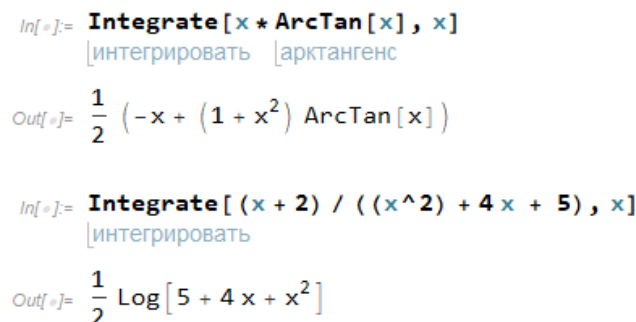
In[ ]:= Integrate[3^x * e^(2 x), x]
Out[ ]:= (3^x e^(2 x)) / (Log[3] + 2 Log[e])

In[ ]:= Integrate[(2 x - 7)^9, x]
Out[ ]:= (1/20) (-7 + 2 x)^10

In[ ]:= Integrate[Cos[7 x - 3], x]
Out[ ]:= (-1/7) Cos[7 x] * Sin[3] + (1/7) Cos[3] * Sin[7 x]

```

Рисунок 2.3.2



```

In[ ]:= Integrate[x * ArcTan[x], x]
Out[ ]:= (1/2) (-x + (1 + x^2) ArcTan[x])

In[ ]:= Integrate[(x + 2) / ((x^2) + 4 x + 5), x]
Out[ ]:= (1/2) Log[5 + 4 x + x^2]

```

Рисунок 2.3.3

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти неопределенные интегралы:

$\text{№ } n/n$	$\int f(x)$
1	$5x^7 - 3\sqrt[5]{x^3} + \frac{3}{x^4}$
2	$\frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}$
3	$3 \sin x + 2^x \cdot 3^{2x} - \frac{1}{9 + x^2}$
4	$\sqrt[7]{(5x + 3)^3}$
5	$\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + 7)^2}}$
6	$\sin 7x - e^{3-2x} + \frac{1}{\cos^2 4x}$
7	$e^{-3x} - \frac{1}{3x + 2} + 3^{2x} - \sin^3 x \cos x$
8	$\operatorname{tg} 3x$
9	$\frac{\arcsin x - x}{\sqrt{1 - x^2}}$
10	$\frac{x - x^3}{\sqrt{9 - x^4}}$

2.4. Определенный интеграл

Пример 2.4.1. Найти определенный интеграл $\int_1^2 3(x-1)^2 dx$.

Решение. Константу 3 можно вынести за знак интеграла, далее вычисляем интеграл и используем формулу: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

$$\begin{aligned}\int_1^2 3(x-1)^2 dx &= 3 \int_1^2 (x-1)^2 dx = (x-1)^3 \Big|_1^2 = (2-1)^3 - (1-1)^3 = \\ &= 1^3 - 0^3 = 1.\end{aligned}$$

Пример 2.4.2. Найти определенный интеграл $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$.

Решение. Исходный интеграл можно разбить на сумму двух интегралов:

$$\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx = \int_0^8 \sqrt{2x} dx + \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx.$$

Решение первого интеграла:

$$\begin{aligned}\int_0^8 \sqrt{2x} dx &= \int_0^8 \sqrt{2} x^{1/2} dx = \sqrt{2} \int_0^8 x^{1/2} dx = \sqrt{2} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Big|_0^8 = \sqrt{2} \left(\frac{2}{3} (8)^{3/2} - \right. \\ &\left. - \frac{2}{3} (0)^{3/2} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{2}{3} (16\sqrt{2}) \right) = \frac{64}{3}.\end{aligned}$$

Решение второго интеграла:

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx = \int_0^8 x^{1/3} dx = \left(\frac{3}{4} x^{4/3} \right) \Big|_0^8 = \frac{3}{4} (8)^{4/3} - \frac{3}{4} (0)^{4/3} = \frac{3 \cdot 16}{4} = 12.$$

$$\text{Складываем результаты двух интегралов: } \frac{64}{3} + 12 = \frac{64+36}{3} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}.$$

Пример 2.4.3. Найти определенный интеграл $\int_1^2 \frac{2x-1}{x^3+x} dx$.

Решение. Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь. Разложим её на простейшие рациональные дроби:

$$\frac{2x-1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = A(x^2+1) + Bx^2+Cx,$$

$$\left. \begin{aligned}x^2 \Big| \quad 0 &= A+B, \\ x^1 \Big| \quad -1 &= A, \\ x^0 \Big| \quad 2 &= C, \end{aligned} \right\}$$

($0 = A + B$): подставляем $x = 0$ в уравнение $2x - 1 = A(x^2+1) + Bx^2 + Cx$. Получаем $A = -1$.

($A = -1$): Подставляем $x = 1$ в уравнение $2x - 1 = A(x^2+1) + Bx^2 + Cx$. Получаем $1 = 2A + B + C$.

($2 = C$): Подставляем $x = 2$ в уравнение $2x - 1 = A(x^2+1) + Bx^2 + Cx$. Получаем $3 = 5A + 4B + 2C$.

Решая эту систему, находим $A = -1$, $B = 1$, $C = 2$.

Подставляем найденные константы в разложение и интегрируем:

$$\int_1^2 \frac{2x-1}{x^3+x} dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} \right) dx = \left(-\ln|x| + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + 2 \operatorname{arctg} x \right) \Big|_1^2 = -\ln 2 + \frac{1}{2} \ln 5 + 2 \operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{5}{8} \right) + 2 \left(\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4} \right) \approx 0.41.$$

Пример 2.4.4. Найти определенный интеграл $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$.

Решение. Используем метод подстановки. Пусть $1+x=t^2$, откуда $x=t^2-1$ и $dx=2t dt$. Пределы интегрирования меняются: при $x=3$, $t=2$, при $x=8$, $t=3$. После подстановки интеграл принимает вид:

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t} &= 2 \int_2^3 (t^2-1)dt = 2 \int_2^3 (t^2-1)dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_2^3 = \\ &= 2 \left(\left(\frac{3^3}{3} - 3 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2 \right) \right) = 2 \left((9-3) - \left(\frac{8}{3} - 2 \right) \right) = 2 \left(6 - \frac{2}{3} \right) = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Пример 2.4.5. Найти определенный интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \cos x + 3}$.

Решение. Пусть $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) = u$. Тогда $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ и $dx = \frac{2du}{1+u^2}$. Пределы интегрирования: $a = \operatorname{tg} 0 = 0$, $\beta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$. Следовательно:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \cos x + 3} = \int_0^1 \frac{2du/(1+u^2)}{2(1-u^2)/(1+u^2)+3} = \int_0^1 \frac{2du}{u^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{5}} \Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Пример 2.4.6. Найти определенный интеграл $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$.

Решение. Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \\ &= -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Вычисления в среде Mathematica.

В системе Mathematica определенный интеграл вычисляется с помощью функции **Integrate**[*f*,{*x*,*a*,*b*}], где *f* – некоторая подынтегральная функция, *x* – переменная интегрирования, *a* – нижний предел интегрирования, *b* – верхний предел интегрирования.

Вычисление определенных интегралов (примеры 2.4.1-2.4.6) в системе Mathematica приведено на рис. 2.4.1. и 2.4.2.

```
In[ ]:= NIntegrate[3 (x - 1) ^2, {x, 1, 2}]
      |квadrатурное интегрирование

Out[ ]:= 1.

In[ ]:= NIntegrate[Sqrt[2 x] + x^(1/3), {x, 0, 8}]
      |квadrатурн... |квadrатный корень

Out[ ]:= 33.3333
```

Рисунок 2.4.1

```
In[ ]:= NIntegrate[(2 x - 1) / (x^3 + x), {x, 1, 2}]
      |квadrатурное интегрирование

Out[ ]:= 0.408499

In[ ]:= Integrate[x / Sqrt[1 + x], {x, 3, 8}]
      |интегрировать |квadrатный корень

Out[ ]:= 32/3

In[6]:= NIntegrate[1 / (2 Cos[x] + 3), {x, 0, Pi/2}]
      |квadrатурное инте... |косинус |число пи

Out[ ]:= 0.376137

In[ ]:= Integrate[x Cos[x], {x, 0, Pi/2}]
      |интегриров... |косинус |число пи

Out[ ]:= 1/2 (-2 + π)
```

Рисунок 2.4.2

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти определенные интегралы:

№ п/п	$\int_a^b f(x) dx$	a	b
1	$\sqrt{x}$	1	4
2	$\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$	1	e^3
3	$\frac{1}{x^2+4x+5}$	0	1
4	$\sqrt{\cos x - \cos^3 x}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
5	$\frac{1}{1+\sqrt{2x+1}}$	0	4
6	$x^5\sqrt{1+x^2}$	0	$\sqrt{3}$
7	$\sqrt{4-x^2}$	0	2
8	$\frac{1}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$	1	3
9	$\frac{1}{2x+\sqrt{3x+1}}$	0	5
10	$2x + \frac{3}{\sqrt{x}}$	1	4

ЛИТЕРАТУРА

1. Рябушко, А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 1 // А.П. Рябушко. – Минск. Выш. шк., 1990. – 271 с.
2. Вагнер, О.А. Математика. Применение пакета Mathematica. В 2-х ч. Ч. 1 : Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ : пособие / О.А. Вагнер, Л.А. Фомичёва. – Минск : БГУИР, 2019. – 182 с.
3. Фомичёва, Л.А. Математика. Применение пакета Mathematica. В 2 ч. Ч. 2 : Дифференцирование функций нескольких переменных. Интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных. Дифференциальные уравнения. Ряды. Операционное исчисление : пособие / Л. А. Фомичёва [и др.]. – Минск : БГУИР, 2021. – 147 с.
4. Иванова, Ж. В. Математический анализ. Введение в анализ. Производная : курс лекций / Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин, С.В. Шерегов ; [в авторской ред.] ; М-во образования РБ, УО "ВГУ им. П. М. Машерова". – Витебск : Изд-во УО "ВГУ им. П. М. Машерова", 2008. – 82 с.
5. Иванова, Ж.В. Математический анализ. Применение дифференциального исчисления. Интегральное исчисление. Функции одной переменной : курс лекций / Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин, С.В. Шерегов ; М-во образования РБ, УО "ВГУ им. П.М. Машерова", Каф. геометрии и математического анализа. – Витебск : УО "ВГУ им. П.М. Машерова", 2009. – 97 с.

Учебное издание

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
В СРЕДЕ WOLFRAM MATHEMATICA**

Методические рекомендации

Составители:

КАРАУЛОВА Татьяна Борисовна

ХАЛИЛОВ Тимур Русланович

Технический редактор

Г.В. Разбоева

Компьютерный дизайн

А.В. Табанюхова

Подписано в печать 09.12.2024. Формат 60х84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 1,57. Уч.-изд. л. 0,62. Тираж 25 экз. Заказ 179.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.