Матэматыка

УДК 539.3

Асимптотическое интегрирование системы уравнений свободных колебаний вязкоупругих слоистых оболочек при действии неоднородных осевых сил

Е.А. Корчевская

Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

В статье с использованием комплексного ВКБ-метода краевая задача для полубезмоментных уравнений, описывающих свободные локализованные колебания шарнирно опертой слоистой цилиндрической вязкоупругой оболочки, находящейся под действием неоднородных осевых статических сил, сведена к последовательности алгебраических уравнений. Для решения поставленной краевой задачи, соответствующей низкочастотным колебаниям, предложена методика, которая сочетает асимптотический метод и метод обратного преобразования Фурье и позволяет найти искомую частоту колебаний и соответствующую моду, локализованную вблизи образующей, где осевая сила максимальна.

Анализ полученных формул для собственных частот колебаний слоистых композитных оболочек при осевом сжатии, локализованных возле «слабой» образующей, показал их сильную зависимость как от характера распределения осевой нагрузки, так и от параметров поперечного сдвига.

Ключевые слова: *слоистые вязкоупругие цилиндрические оболочки, частота колебаний, асимптотический комплексный ВКБ-метод.*

Asymptotic integration of the system of equations of free vibrations of viscous elastic laminated shells at the action of non-uniform axial compression

E.A. Korchevskaya

Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

In the article, with the use of complex WKB-method the boundary value problem for the semi momentless equations which describe the free localized vibrations of laminated viscous elastic cylindrical shells, under the action of the non-uniform axial compression, is reduced to a sequence of algebraic equations. To solve the set boundary value problem, which corresponds to low-frequency vibrations, the technique which combines a complex WKB-method and Fourier method is offered; it allows finding the required oscillation frequency and the appropriate mode localized near the forming, where axial force is maximal.

The analysis of the received formulas for natural frequencies of vibrations of laminated viscous elastic cylindrical shells, under action of the non-uniform axial compression, which are localized near «weakest» generatrix, has shown their strong dependence both on character of allocation of axial loading, and on parameters of cross shift.

Key words: *laminated viscous elastic cylindrical shells, frequency of vibration, asymptotic complex WKB-method.*

Тонкие слоистые композитные оболочки широко используются в различных областях современной техники. Образованные из слоистых оболочек конструкции сочетают в себе легкость с высокой прочностью, что объясняет широкое применение оболочек в судостроении, авиа- и ракетостроении, в промышленном строительстве и других областях. Необходимость использования многослойных оболочек часто продиктована конструктивными и эксплуатационными понятиями и позволяет добиваться многофункциональности. Существуют большие перспективы практического использования оболочек. Реализация этих возможностей происходит в результате расширения области применения оболочек, совершенствования методов их расчетов и более основательного рассмотрения их свойств. Использование полимерных материалов в современном производстве вызывает необходимость учитывать вязкоупругие свойства при изучении низкочастотных колебаний оболочек. Стремление получить наименьшую материалоемкость изделий при требуемой прочности и жесткости, а также возможность варьирования свойств материала привели к необходимости использования композитных балок, пластин и оболочек слоистой структуры в качестве составляющих элементов тонкостенных инженерных сооружений в различных отраслях народного хозяйства (в машино-, тракторо- и судостроении, в авиационной и ракетно-космической технике и т.п.). Важнейшей задачей на стадии проектирования подобных конструкций является задача о виброзащите самой конструкции или ее элементов с сохранением заданной несущей способности.

К настоящему моменту число публикаций по данным проблемам чрезвычайно велико. Однако в подавляющем большинстве исследований рассматриваются, как правило, «идеальные» оболочки с постоянными геометрическими и физическими характеристиками. Вместе с тем, тонкостенные элементы, составляющие реальную инженерную конструкцию (любое транспортное средство), имеют сложную конфигурацию. При их расчете следует принимать во внимание условия сопряжения составляющих элементов, наличие косых краев, непостоянство кривизн, толщины оболочки, а также неоднородность испытываемых нагрузок. Перечисленные и другие факторы приводят к сильной неоднородности напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкостенной конструкции. Неоднородность напряженно-деформированного состояния оболочки может быть причиной появления на поверхности оболочки «наиболее слабых» областей, которые приводят к сильной локализации собственных форм колебаний.

Исследования свободных колебаний предварительно напряженных тонких изотропных цилиндрических оболочек проводились в ряде работ [1–4]. В частности, в [1] изучено влияние однородных начальных окружных мембранных усилий, обусловленных внешним или внутренним давлением, на собственные частоты колебаний бесконечной цилиндрической оболочки. Экспериментальные исследования собственных колебаний шарнирно опертой круговой цилиндрической оболочки, сжатой в осевом направлении равномерно распределенными осевыми силами, выполнены в статье [2]. Аналогичный теоретический анализ влияния осевых сил на собственные частоты колебаний изотропных цилиндрических оболочек проведен в [3–4], при этом в [4] были использованы трехмерные уравнения оболочек с учетом поперечных сдвигов и нормальных напряжений. В приведенных публикациях начальные напряжения, вызванные действием внешних статических сил, предполагались однородными, независящими от криволинейных координат оболочки. Как следствие, в таких задачах свободные колебания сопровождаются образованием волн, покрывающих всю поверхность оболочки. Случай нагружения цилиндрической оболочки переменными в окружном направлении осевыми силами был рассмотрен в работе [5]. Теоретические и численные расчеты с использованием метода конечных элементов, выполненные в [6], показали, что влияние поперечных сдвигов на собственные частоты колебаний слоистой цилиндрической оболочки является более заметным в случае нагружения последней осевыми силами (постоянными в окружном направлении). Свободные колебания слоистой круговой конической оболочки при воздействии постоянной по окружности растягивающей или сжимающей осевой силы были рассмотрены в [7]. Так же, как и в [3], установлено, что осевое растяжение повышает собственные частоты, а сжатие понижает.

Таким образом, представляются актуальными исследования колебаний вязкоупругих слоистых композитных оболочек.

Цель работы – разработать методику построения форм локализованных собственных колебаний и определения соответствующих собственных частот слоистой цилиндрической вязкоупругой оболочки, находящейся под действием статической осевой силы, неравномерно распределенной по контуру края, с учетом поперечных сдвигов в первом приближении и наличия на поверхности оболочки «слабой» образующей; с помощью разработанной методики найти собственные частоты колебаний длинной, короткой оболочки и оболочки средней длины.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку длины L, состоящую из N изотропных слоев, характеризующихся толщиной h_k, модулем Юнга E_k, плотностью ρ_k и коэффициентом Пуассона ν_k, $k=1,2,\ldots,N$. В качестве исходной поверхности примем срединную поверхность какого-либо k-ого слоя, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам $\alpha_1 = Rs$, $\alpha_2 = R\varphi$. Здесь R – радиус цилиндра исходной поверхности, φ и s – окружная и продольная координаты соответственно.

Будем считать, что выполняются гипотезы теории слоистых оболочек, сформулированные Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым [8]. В частности, принимается, что тангенциальные перемещения распределены по толщине пакета слоев по нелинейному закону согласно обобщенной кинематической гипотезе Тимошенко.

В рамках принятых гипотез в [8] выведена система двенадцати уравнений, описывающих движение слоистой анизотропной оболочки. В случае, когда физические характеристики слоев различаются незначительно и в предположении об образовании большого количества волн малой длины в окружном или осевом направлении, данная система сведена к системе трех уравнений [8]:

$$\begin{cases} \dfrac{Eh^3\eta_3}{12\,(1-\nu^2)}\left(1-\dfrac{\theta h^2}{b}\Delta\right)\Delta^2\chi^* + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial^2 F^*}{\partial\alpha_1^2} - T_1^0\dfrac{\partial^2 W^*}{\partial\alpha_1^2} - \rho h\Omega^2 W^* = 0, \\ \Delta^2 F^* = \dfrac{Eh}{R}\dfrac{\partial^2 W^*}{\partial\alpha_1^2}, \quad W^* = \left(1-\dfrac{h^2}{b}\Delta\right)\chi^*. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $\Delta-$ оператор Лапласа в криволинейной системе координат α_1, α_2, E, ν, ρ – осредненные модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала соответственно, F^*, χ^*- функции напряжений и перемещений, W^*- нормальный прогиб, Ω – частота собственных колебаний, T_1^0- мембранное осевое усилие, η_3, θ, $b-$ параметры, учитывающие поперечные сдвиги и вязкоупругие свойства материала, определяемые по формулам [8–9].

Положим

$$K/\pi^2 = \varepsilon^3\kappa, \quad K\theta/\pi^2 = \varepsilon^3\tau, \quad \kappa,\tau \sim 1 \text{ при } \varepsilon \to 0 \qquad (2)$$

где $K = \pi^2 h^2/(bR^2)$, а $\varepsilon^4 = h^2\eta_3/[12R^2(1-\nu^2)]$ – малый параметр.

Уравнения (1) перепишем в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \varepsilon^4(1-\varepsilon^3\tau\Delta)\Delta^2\chi + \varepsilon^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \varepsilon^2 t(\varphi)\dfrac{\partial^2}{\partial s^2}(1-\varepsilon^3\kappa\Delta)\chi - \Lambda(1-\kappa\varepsilon^3\Delta)\chi = 0, \\ \varepsilon^2\Delta^2 F - \dfrac{\partial^2}{\partial s^2}(1-\varepsilon^3\kappa\Delta)\chi = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь

$T_1^0(\varphi) = -Eh\varepsilon^2 t(\varphi)$, $\Lambda = \dfrac{\rho R^2}{E}\Omega^2$, $l = L/R$, $\chi^* = R\chi$, $F^* = \varepsilon^2 EhR^2 F$, $\Lambda = \omega + i\alpha$, $\omega-$ безразмерная собственная частота колебаний, $\alpha-$ безразмерный декремент колебаний.

В качестве граничных условий на краях рассмотрим условия шарнирного опирания

$$F = \Delta F = \chi = \Delta\chi = \Delta^2\chi = 0, \text{ при } s=0,\, l. \qquad (4)$$

Зависимость мембранного осевого усилия от окружной координаты является причиной появления на поверхности оболочки «наиболее слабых» областей, которые приводят к сильной локализации форм колебаний.

Метод решения. Принимая во внимание неоднородность нагружения по окружной координате, будем исследовать формы собственных колебаний, локализованные в окрестности «наиболее слабой» образующей $\varphi = \varphi_0$. Введем растяжение масштаба в окрестности этой образующей:

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon^{1/2}\xi. \qquad (5)$$

Согласно [10] решение задачи (3)–(4) будем искать в виде

$$\chi = \chi_m(\varphi)\sin(p_m s/\varepsilon), \quad F = \Phi_m(\varphi)\sin(p_m s/\varepsilon),$$
$$p_m = m\pi\varepsilon/l, \quad m = 1,2,\ldots, \qquad (6)$$

где

$$(\chi_m, \Phi_m) = \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}\left(\chi_{mj}(\xi), \Phi_{mj}(\xi)\right)\exp\left\{i\left(\varepsilon^{-1/2}q\xi + \frac{1}{2}a\xi^2\right)\right\}.$$

Разложим параметры, характеризующие собственную частоту колебаний и декремент по степеням малого параметра ε:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots, \quad \alpha = \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \ldots \qquad (7)$$

Параметры, характеризующие поперечные сдвиги и учитывающие вязкоупругие свойства слоев, представим в виде:

$$\kappa = \kappa_r + i\kappa_i, \quad \tau = \tau_r + i\tau_i. \qquad (8)$$

Функцию $t(\varphi)$, зависящую от окружной координаты, разложим в окрестности $\varphi = \varphi_0$ в ряд:

$$t(\varphi) = t(\varphi_0) + \varepsilon^{1/2}t'(\varphi_0)\xi + \frac{1}{2}\varepsilon t''(\varphi_0)\xi^2 + \ldots \qquad (9)$$

Подставляя (5)–(9) в (3)–(4), получим последовательность алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{j}\mathbf{B}_k\mathbf{X}_{j-k} = 0, \quad j = 0,1,2,\ldots \qquad (10)$$

относительно вектор-функции $\mathbf{X}_j = (\chi_{mj}, f_{mj})^T$.

Здесь $\mathbf{B}_0$ – (2×2) – матрица с элементами:

$$B_0^{(11)} = (p_m^2 + q^2)^2 - t(\varphi_0)p_m^2 - \omega_0,$$
$$B_0^{(12)} = -p_m^2, \quad B_0^{(21)} = p_m^2, \quad B_0^{(22)} = (p_m^2 + q^2)^2.$$

При $j = 0$ имеем однородную систему алгебраических уравнений:

$$\mathbf{B}_0\mathbf{X}_0 = 0.$$

Из условия существования нетривиального решения этой системы находим формулу для действительной части частотного параметра нулевого приближения:

$$\omega_0(q,\varphi_{0,}p_m) = (p_m^2+q^2)^2 + \frac{p_m^4}{(p_m^2+q^2)^2} - t(\varphi_0)p_m^2 . \quad (11)$$

Из условий

$$\frac{\partial\omega_0}{\partial q} = \frac{\partial\omega_0}{\partial\varphi_0} = 0 \qquad (12)$$

находим волновое число q^0 и «наиболее слабую» образующую φ_0^0, а также выражение для нулевого приближения наименьшей частоты ω_0^0.

При отыскании минимума возможны три существенно разных случая:

a) $p_m > 1$,

b) $p_m < 1$,

c) $p_m \approx 1$.

При $p_m \approx 1$ нарушается асимптотический характер построенных решений. И этот случай требует перестройки асимптотического решения.

При $p_m > 1$ имеем

$$\omega_0^0 = 1 - t(\varphi_0)p_m^2 + p_m^4 ,\ q^0 = 0 . \qquad (13)$$

При $p_m < 1$ получаем

$$\omega_0^0 = 2p_m^2 - t(\varphi_0)p_m^2 ,\ q^0 = \sqrt{p_m(1-p_m)} . \qquad (14)$$

При $j = 2$ система (10) является неоднородной. Условие ее совместности приводит к соотношению для вычисления параметра a

$$a = i\left(\omega_{\varphi\varphi}^0 / \omega_{qq}^0\right)^{1/2} ,$$

а также к уравнению относительно $P_0(\xi)$:

$$-\frac{1}{2}\cdot\omega_{qq}^0\cdot\frac{d^2P_0}{d\xi^2} - ia\xi\omega_{qq}^0\frac{dP_0}{d\xi} +$$

$$+\left[-\frac{ia}{2}\omega_{qq}^0 - \omega_1 + i\alpha_1 + \eta\right]P_0 = 0,$$

где

$$\eta = p_m^6(\tau_r + i\tau_i - \kappa_r - i\kappa_i) \text{ при } p_m > 1,$$

$$\eta = p_m^3(\tau_r + i\tau_i - \kappa_r - i\kappa_i) \quad \text{при} \quad p_m < 1.$$

При

$$\omega_1 + i\alpha_1 = \left(\frac{1}{2} + n\right)\sqrt{\omega_{qq}^0\omega_{\varphi\varphi}^0} + \eta ,\ n=0,1,2,\ \ldots \quad (15)$$

уравнение имеет решение в виде полинома Эрмита степени n.

$$P_0(\xi) = H_n(\theta) ,\ \theta = \sqrt{c}\xi ,\ c = -ia .$$

Рассмотрим теперь систему (3) в случае, когда $p_m \approx 1$, и выполним перестройку формы потери устойчивости. Для этого в уравнениях (3) осуществим переход к новому малому параметру $\tilde\varepsilon$ следующим образом:

$$\varepsilon = \tilde\varepsilon^{3/2} . \qquad (16)$$

Решение уравнений (3) ищем в том же виде (6).

Положим:

$$\omega = \omega_* + \tilde\varepsilon^2\omega' ,\ \alpha = \tilde\varepsilon^2\alpha_* + \tilde\varepsilon^3\alpha' ,\ \varphi - \varphi_0 = \tilde\varepsilon\eta ,$$

$$f(\varphi) = f(\varphi_0) + \tilde\varepsilon f'(\varphi_0)\eta + \frac{1}{2}\tilde\varepsilon^2 f''(\varphi_0)\eta^2 + \ldots \quad (17)$$

Так как рассматривается случай, когда $p_m \approx 1$, то p_m представим в виде:

$$p_m = 1 + \tilde\varepsilon p' .$$

Для того чтобы учесть параметры поперечного сдвига в первом приближении, примем:

$$\tau' = \tau\varepsilon^{-1/2} ,\ \kappa' = \kappa\varepsilon^{-1/2} . \qquad (18)$$

После разделения переменных равномерно пригодное асимптотическое решение, затухающее при удалении от образующей $\varphi = \varphi_0$, может быть найдено в виде:

$$\chi_m = \sum_{k=0}^{\infty}\tilde\varepsilon^k\chi_m^{(k)}(\eta) ,\ F_m = \sum_{k=0}^{\infty}\tilde\varepsilon^k F_m^{(k)}(\eta) . \quad (19)$$

После подстановки (16)–(19) в систему (3) в нулевом приближении приходим к системе алгебраических уравнений, из условия существования нетривиального решения которой находим:

$$\omega_* = 2 - f(\varphi_0) . \qquad (20)$$

Можно заметить, что ω_* совпадает с (14)–(15) при $p_m = 1$.

Во втором приближении приходим к дифференциальному уравнению относительно $\chi_m^{(0)}$:

$$4\frac{d^4\chi_m^{\ 0}}{d\eta^4} - 8p'\frac{d^2\chi_m^{\ 0}}{d\eta^2} + \qquad (21)$$

$$+\chi_m^{\ 0}\left\{(\tau' - \kappa') + 4p'^2 - \frac{f''(\varphi_0)}{f(\varphi_0)}\eta^2 - (\omega' + i\alpha_*)\right\} = 0.$$

Решение уравнения (21), удовлетворяющее условию затухания $\chi_m^{(0)} \to 0$ при $\eta \to \pm\infty$, ищем с помощью обратного преобразования Фурье:

$$\chi_m^{(0)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} W^F(\tilde\omega)\exp(i\tilde\omega\eta)d\tilde\omega . \quad (22)$$

Применив преобразование (22), получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2W^F}{d\tilde x^2} + \left[\tilde\Lambda - (\tilde x^2 + \tilde l^{\,2})\right]W^F = 0 , \qquad (23)$$

где

$$\tilde{\Lambda} = \frac{\omega' + i\alpha_*}{2} \cdot \frac{f(\varphi_0)}{(\tilde{f})^{2/3}} + \frac{(t' - \tau')}{(\tilde{f})^{2/3}}, \quad \tilde{x} = \left(\frac{\tilde{f}}{4}\right)^{-1/6} \tilde{\omega},$$

$$\tilde{l} = p'\left(\frac{4}{\tilde{f}}\right)^{1/3}, \quad \tilde{f} = -\frac{f''(\varphi_0)}{f(\varphi_0)}. \qquad (24)$$

Для каждого $\tilde{l}$ существует счетное множество $\tilde{\Lambda}_i(\tilde{l})$ значений $\tilde{\Lambda}$, при которых имеются нетривиальные решения уравнения (23), стремящиеся к нулю, при $\tilde{x} \to \pm\infty$.

В [11] найдено, что функция $\tilde{\Lambda}_0(\tilde{l})$ принимает наименьшее значение $\tilde{\Lambda}_0 = 0{,}905$ при $\tilde{l} = -0{,}44$.

Тогда

$$\omega' + i\alpha_* = 2\frac{(\tilde{f})^{2/3}}{f(\varphi_0)}\left(0{,}905 - \frac{(t' - \tau')}{(\tilde{f})^{2/3}}\right),$$

$$p_m = 1 - 0{,}44\varepsilon^{2/3}\left(\frac{\tilde{f}}{4}\right)^{1/3}. \qquad (25)$$

Заключение. С использованием комплексного ВКБ-метода краевая задача для полубезмоментных уравнений, описывающих свободные локализованные колебания шарнирно опертой слоистой цилиндрической вязкоупругой оболочки, находящейся под действием неоднородных осевых статических сил, сведена к последовательности алгебраических уравнений. Для решения поставленной краевой задачи, соответствующей низкочастотным колебаниям, предложена методика, которая сочетает асимптотический метод и метод обратного преобразования Фурье и позволяет найти искомую частоту колебаний и соответствующую моду, локализованную вблизи образующей, где осевая сила максимальна. С использованием развитых асимптотических методов получены в явном виде формулы для собственных частот колебаний неоднородно преднапряженных в осевом направлении цилиндрических оболочек с учетом наличия слабой образующей, поперечных сдвигов слоев и вязкости материала. Анализ формул для собственных частот показал их сильную зависимость как от характера распределения осевой нагрузки, так и от параметров поперечного сдвига.

ЛИТЕРАТУРА

1. Armenakas, A.E. Vibrations of infinitely long cylindrical shells under initial stress / A.E. Armenakas, G. Herrmann // AIAA Journal. – 1963. – Vol. 1, № 1. – P. 100–106.
2. Herrmann, G. Vibration of thin shells under initial stress / G. Herrmann, J. Shaw // J. of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers. – 1965. – Vol. 91, № EM5. – P. 37–59.
3. Thompson, J.R. The vibrations of a thin walled elastic cylinder under axial stress / J.R. Thompson, A.J. Willson // Int. J. Eng. Sci. – 1979. – Vol. 17, № 6. – P. 725–733.
4. Neu, W.L. Dynamics of the prestressed solid with application to thin shells / W.L. Neu, H. Reismann // Solid Mechanics Archives. – 1982. – Vol. 7. – P. 97–129.
5. Mikhasev, G.I. Free and parametric vibrations of cylindrical shells under static and periodic axial loads / G.I. Mikhasev // Technische Mechanik. – 1997. – Band 17, Heft 3. – P. 209–216.
6. Mikhasev, G. Local buckling, stationary and non-stationary vibrations of thin composite laminated shells having the weakest spots / G. Mikhasev, E. Korchevskaya, U. Gabbert, D. Marinkovich // The Fourth International Conference on Thin–Walled Structures: proceedings of the conference, UK, Loughbourough, 22–24 June 2004 / Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia; edited by: J. Loughlan [et al.]. – Loughbourough, 2004. – P. 769–776.
7. Tong, L. Free vibration of axially loaded laminated conical shells / L. Tong // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1999. – Vol. 66, № 3. – P. 758–763.
8. Григолюк, Э.И. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
9. Ботогова, М.Г. Свободные колебания слоистых вязкоупругих цилиндрических оболочек / М.Г. Ботогова, Г.И. Михасев, Е.А. Корчевская // Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. С, Фунд. науки. Механика. – 2006. – № 10. – С. 125–133.
10. Михасев, Г.И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы / Г.И. Михасев, П.Е. Товстик. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 292 с.
11. Товстик, П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П.Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.

Поступила в редакцию 22.09.2011. Принята в печать 28.10.2011
Адрес для корреспонденции: 210038, г. Витебск, ул. П. Бровки, д. 7, корп. 1, кв. 93, e-mail: Korchevskaya.Elena@tut.by – Корчевская Е.А.