УДК 512.542

Об операторах Локетта и произведениях π-нормальных классов Фиттинга

А.В. Турковская, Н.Т. Воробьев
Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Пусть π – непустое множество простых чисел. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем π-нормальным или нормальным в классе $\mathfrak{S}_\pi$ всех конечных разрешимых π-групп, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и для любой π-группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G. Доказано, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ классы Фиттинга, такие, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, то справедливы следующие утверждения: класс Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ является π-нормальным тогда и только тогда, когда класс $\mathfrak{F}\mathfrak{G}^*$ π-нормален; класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}$ является π-нормальным тогда и только тогда, когда класс $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}^* = \mathfrak{S}_n$; если существует множество простых чисел σ, такое, что $\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{G}^* = \mathfrak{S}_\pi$, где $\sigma \subseteq \pi$, то $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}^* = \mathfrak{S}_n$; когда хотя бы один из классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{G}$ π-нормален, то их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ является π-нормальным классом Фиттинга.

Ключевые слова: *класс Фиттинга, $\mathfrak{F}$-радикал, произведение классов Фиттинга, нормальный класс Фиттинга, π-нормальный класс Фиттинга, оператор Локетта.*

On Lockett's operation and products of π-normal Fitting classes

A.V. Turkouskaya, N.T. Vorob'ev
Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

Let π be a non-empty set of primes. A Fitting class $\mathfrak{F}$ is said to be π-normal or normal in a class of all finite soluble π-groups $\mathfrak{S}_\pi$, if $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ and $G_\mathfrak{F}$ is $\mathfrak{F}$-maximal in G for all $G \in \mathfrak{S}_\pi$. It is proved that if $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{G}$ are Fitting classes, such that $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ and $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, then the following statements hold: a Fitting class $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ is normal in $\mathfrak{S}_\pi$ if and only if $\mathfrak{F}\mathfrak{G}^*$ is π-normal; a Fitting class $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}$ is normal in $\mathfrak{S}_\pi$ if and only if $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}^* = \mathfrak{S}_n$; if exists a set $\sigma \subseteq \pi$ of primes such that $\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{F}^*$ and $\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{G}^* = \mathfrak{S}_\pi$, then $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}^* = \mathfrak{S}_n$; if either $\mathfrak{F}$ or $\mathfrak{G}$ is normal in $\mathfrak{S}_n$, then $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ is $\mathfrak{S}_n$-normal.

Key words: *Fitting class, $\mathfrak{F}$-radical, products of Fitting classes, normal Fitting class, π-normal Fitting class, Lockett's operation.*

В основополагающей работе Блессеноля–Гашюца [1] было введено понятие нормального класса Фиттинга. На основании результатов об инъекторах частично разрешимых групп, полученных Л.А. Шеметковым [2], В.Г. Сементовским [3] и Го Вэньбинем [4], нами в работе [5] это понятие расширяется следующим образом. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем $\mathfrak{X}$-нормальным или нормальным в $\mathfrak{X}$, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ ее $\mathfrak{F}$-радикал является максимальной из подгрупп группы G, принадлежащих $\mathfrak{F}$.

В настоящей работе мы изучаем $\mathfrak{X}$-нормальные классы Фиттинга в случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_\pi$ – классу всех разрешимых π-групп. Для характеризации таких классов, которые естественно называть нормальными в $\mathfrak{S}_\pi$ или просто π-нормальными, мы будем использовать оператор Локетта [6]. Ориентиром для подобных исследований является работа Хаука [7], где найдены характеризации произведений разрешимых нормальных классов Фиттинга. Таким образом, возникает и актуальна задача построения алгебры π-нормальных классов Фиттинга.

Основная цель настоящей работы – нахождение признаков π-нормальности произведений π-нормальных классов Фиттинга посредством операторов Локетта. В частности, в случае, когда $\pi = P$ – множеству простых чисел, следствием полученного результата является теорема Косси (см. [8], а также [9, теорема 3.11 в главе X]) о характеризации произведений нормальных классов Фиттинга.

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы. В определениях и обозначениях мы следуем монографии [9].

1. **Предварительные сведения**

Классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$ [9], удовлетворяющий следующим требованиям:

1) каждая нормальная подгруппа группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) из $N_1 \triangleleft G$ и $N_1 \in \mathfrak{F}$; $N_2 \triangleleft G$ и $N_2 \in \mathfrak{F}$ всегда следует $N_1 N_2 \in \mathfrak{F}$.

Определение 1.1. Пусть π – множество простых чисел. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем π*-нормальным или нормальным в классе* $\mathfrak{S}_\pi$ всех π-групп, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и для любой π-группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G.

Заметим, что если $\pi = P$ множеству всех простых чисел, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является нормальным [1].

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}$-радикалом группы G называется такая подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ группы G, которая является наибольшей из нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G.

Произведением классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G / G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$.

Будем обозначать, что $H \triangleleft \cdot G$, если группа H является максимальной нормальной подгруппой группы G.

Формацией называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений, то есть выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{X}$ и $N \triangleleft G$, то $G / N \in \mathfrak{X}$;

2) если $N_1 \triangleleft G$ и $N_2 \triangleleft G$, то $G / N_1 \bigcap N_2 \in \mathfrak{X}$.

Другие определения и обозначения в случае необходимости можно найти в [2, 9].

2. **Операторы Локетта и фиттинговы произведения**

Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольный непустой класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}^*$ – наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что для любых групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ [6]. Оператор верхняя “*” называется оператором Локетта.

Классом Локетта называется класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ такой, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ [6].

Приведем также в качестве лемм некоторые простейшие свойства произведений и радикалов, которые мы будем использовать для доказательства основной теоремы.

Лемма 2.1. *Если* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– непустые классы Фиттинга, то* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Докажем, что $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$.

Так как группа G является нормальной подгруппой в G и $G \in \mathfrak{F}$, то, по определению $\mathfrak{F}$-радикала, $G = G_{\mathfrak{F}}$. Тогда факторгруппа $G / G_{\mathfrak{F}} = G / G = 1$, где 1 – единичная группа.

Покажем, что единичная группа содержится в классе Фиттинга $\mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H}$ – непустой класс Фиттинга, то в нем содержится некоторая группа X. Но любая группа имеет единичную нормальную подгруппу 1. Таким образом, $X \in \mathfrak{H}$ и $1 \triangleleft X$. Так как класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ замкнут относительно нормальных подгрупп, то $1 \in \mathfrak{H}$.

Отсюда получаем, что $G / G_{\mathfrak{F}} = 1 \in \mathfrak{H}$. Следовательно, по определению произведения классов Фиттинга, $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– непустые классы Фиттинга и* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, *то* $G_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{H}}$.

Доказательство. По определению $\mathfrak{F}$-радикала группы G получаем $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $G_{\mathfrak{F}} \triangleleft G$. Так как по условию леммы $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$.

Из определения $\mathfrak{H}$-радикала $G_{\mathfrak{H}}$ группы G следует, что $G_{\mathfrak{H}}$ – наибольшая из нормальных подгрупп группы G, принадлежащая классу Фиттинга $\mathfrak{H}$. Следовательно, $G_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{H}}$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Если* $\sigma \subseteq \pi$ и $\sigma = \{p \in \pi : \mathfrak{F}^* \mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}^*\}$, *то* $\mathfrak{F}^* \mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{F}^*$.

Доказательство. Покажем, что $\mathfrak{F}^* \mathfrak{S}_\sigma \subseteq \mathfrak{F}^*$.

Действительно, по лемме 2.1 заключаем, что $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}^* \mathfrak{S}_\sigma$.

Докажем обратное включение: $\mathfrak{F}^* \mathfrak{S}_\sigma \subseteq \mathfrak{F}^*$. Предположим, что это не верно. Тогда существует группа X, такая, что $X \in \mathfrak{F}^* \mathfrak{S}_\sigma$ и $X \notin \mathfrak{F}^*$. Выберем среди этих групп группу G минимального порядка, то есть $G \in \mathfrak{F}^* \mathfrak{S}_\sigma \setminus \mathfrak{F}^*$. Пусть

M – максимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $|M|<|G|$ и $M \in \mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma$, то по индукции получаем, что $M \in \mathfrak{F}^*$. По предположению M – максимальная нормальная подгруппа группы G, следовательно, по определению $\mathfrak{F}^*$-радикала $M \le G_{\mathfrak{F}^*}$. Но тогда ввиду максимальности нормальной подгруппы M в G получаем, что $M = G_{\mathfrak{F}^*}$.

Рассмотрим факторгруппу G/M. Так как $M \lhd\cdot G$, то G/M – главный фактор группы G. Заметим, что $G/M \cong Z_p \in \mathfrak{N}_p$ [10, теорема 1.61], [10, теорема 1.54]. По условию $G \in \mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma$. Тогда по определению произведения классов Фиттинга получаем $G/G_{\mathfrak{F}^*} \in \mathfrak{S}_\sigma$. Итак, $G/G_{\mathfrak{F}^*} \in \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_\sigma$.

Если $p \notin \sigma$, то $G/G_{\mathfrak{F}^*} \in \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_\sigma = (1)$, где (1) – единичный класс групп. Следовательно, $G = G_{\mathfrak{F}^*}$ и $G \in \mathfrak{F}^*$. Последнее противоречит выбору группы G.

Если $p \in \sigma$, то $G/G_{\mathfrak{F}^*} \in \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{N}_p$. Следовательно, по определению произведения классов Фиттинга, $G \in \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}^*$, что противоречит выбору группы G.

Полученные противоречия доказывают, что $\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma \subseteq \mathfrak{F}^*$.

Значит, $\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{F}^*$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть* $\mathfrak{H}$ *– класс Фиттинга. Если* L *– группа минимального порядка в классе* $\mathfrak{S}_\pi \setminus \mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^*$, *то* $\mathrm{O}_\sigma(L)=1$, *где* $\sigma = \{p \in \pi : \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}^*\}$.

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{O}_\sigma(L) \ne 1$. По условию $L \in \mathfrak{S}_\pi$. Рассмотрим факторгруппу $L/\mathrm{O}_\sigma(L)$, принадлежащую классу $\mathfrak{S}_\pi$ всех π-групп. Заметим, что $|L/\mathrm{O}_\sigma(L)| < |L|$. Следовательно, по индукции получаем, что $L/\mathrm{O}_\sigma(L) \in \mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^*$. Так как $\mathrm{O}_\sigma(L) = L_{\mathfrak{S}_\sigma}$, то $L/L_{\mathfrak{S}_\sigma} \in \mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^*$. Следовательно, по определению произведения классов Фиттинга получаем $L \in \mathfrak{S}_\sigma(\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^*)$. Ввиду ассоциативности операции умножения классов Фиттинга $\mathfrak{S}_\sigma(\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^*) = (\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{S}_\sigma)\mathfrak{H}^* = \mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^*$. Значит, $L \in \mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^*$. Последнее противоречит выбору группы L.

Полученное противоречие доказывает, что $\mathrm{O}_\sigma(L)=1$. Лемма доказана.

Мы будем использовать следующие известные утверждения о свойствах произведений классов Фиттинга и их радикалов.

Лемма 2.5 [9]. *Если* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– классы Фиттинга конечных групп, то справедливы следующие утверждения:*

(a) $(\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}^*)^* = (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H})^*$;

(b) если $\mathfrak{F}$ *– класс Локетта, то* $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}^* = (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H})^*$; *в частности, фиттингово произведение двух классов Локетта является классом Локетта.*

Лемма 2.6 [9]. *Пусть* $\mathfrak{X}, \mathfrak{H}$ *и* $\mathfrak{Z}$ *– классы Фиттинга, тогда:*

1) $(G/G_\mathfrak{X})_\mathfrak{H} = G_{\mathfrak{X}\circ\mathfrak{H}}/G_\mathfrak{X}$;

2) $(\mathfrak{X}\circ\mathfrak{H})\circ\mathfrak{Z} = \mathfrak{X}\circ(\mathfrak{H}\circ\mathfrak{Z})$.

Следующая лемма является известным критерием π-нормальности класса Фиттинга.

Лемма 2.7 [9, теорема 3.7 в главе X]. *Пусть* π *– непустое множество простых чисел и* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) $\mathfrak{F}$ *нормален в* $\mathfrak{S}_\pi$;

(b) для любого $p \in \pi$ *и* $G \in \mathfrak{F}$ *существует такое натуральное* n, *что* $G^n \,\mathrm{wr}\, Z_p \in \mathfrak{F}$;

(c) $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi$;

(d) $G/G_\mathfrak{F}$ *абелева для любой группы* $G \in \mathfrak{S}_\pi$.

3. Понятие π-нормальности. Примеры

Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ мы называем *π-нормальным или нормальным в классе* $\mathfrak{S}_\pi$ всех π-групп, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и для любой π-группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G, где π – множество простых чисел.

Возникает задача нахождения примеров $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга, которые в общем случае не являются π-нормальными. Эту задачу положительно решает следующая

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathfrak{N}_\pi$ *– класс всех нильпотентных π-групп. Любой класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *является нормальным в фиттинговом произведении* $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ *классов* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{N}_\pi$, *причем* $\mathfrak{F}$ *в общем случае не нормален.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$. Тогда по определению произведения классов Фиттинга факторгруппа $G/G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{N}_\pi$. Обозначим через V – подгруппу G, которая является $\mathfrak{F}$-инъектором G. Так как каждая подгруппа нильпотентной группы является субнормальной в этой группе, то подгруппа $V/G_\mathfrak{F}$ субнормальна в $G/G_\mathfrak{F}$. Следовательно, V – субнормальная подгруппа G. Но по определению $\mathfrak{F}$-инъектора $\mathfrak{F}$-радикал $G_\mathfrak{F}$ группы G является подгруппой V. Кроме того, V является субнормальной подгруппой группы G, принадлежащей $\mathfrak{F}$, а $\mathfrak{F}$-радикал группы G – наибольшая из нормальных подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$, следовательно, $V \subseteq G_\mathfrak{F}$. Итак, $V = G_\mathfrak{F}$. Ввиду произвольности выбора группы и так как $G_\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа для всех $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$, то $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$.

Докажем теперь, что класс $\mathfrak{F}$ не является нормальным в $\mathfrak{S}_\pi$. Пусть $\mathfrak{F}$ – такой класс Фиттинга, что $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi \neq \mathfrak{S}_\pi$ (в качестве $\mathfrak{F}$ можно взять, например, класс Фиттинга $\mathfrak{N}_p$ всех конечных p-групп). Так как класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является π-нормальным тогда и только тогда, когда $(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)^* = \mathfrak{S}_\pi$, то $\mathfrak{F}$ не нормален в $\mathfrak{S}_\pi$. Теорема доказана.

4. π-нормальные классы и их произведения

Основной результат работы представляет

Теорема 4.2. *Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ – классы Фиттинга, такие, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, то справедливы следующие утверждения:*

(a) класс Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ является π-нормальным тогда и только тогда, когда класс $\mathfrak{F}\mathfrak{G}^*$ π-нормален;

(b) класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}$ является π-нормальным тогда и только тогда, когда класс $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}^* = \mathfrak{S}_\pi$;

(c) если существует множество простых чисел σ, такое, что $\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{G}^* = \mathfrak{S}_\pi$, где $\sigma \subseteq \pi$, то $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}^* = \mathfrak{S}_\pi$;

(d) если хотя бы один из классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{G}$ π-нормален, то их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ является π-нормальным классом Фиттинга.

Д о к а з а т е л ь с т в о . *Докажем (a).*

Пусть класс $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ – π-нормальный класс Фиттинга. Докажем, что $\mathfrak{F}\mathfrak{G}^*$ является также π-нормальным классом Фиттинга.

Если $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ – π-нормальный класс Фиттинга, то по лемме 2.7 ($a \Rightarrow c$) $(\mathfrak{F}\mathfrak{G})^* = \mathfrak{S}_\pi$. По лемме 2.5 (b) получаем, что $(\mathfrak{F}\mathfrak{G})^* = \mathfrak{F}\mathfrak{G}^* = \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, по лемме 2.7 ($c \Rightarrow a$) $\mathfrak{F}\mathfrak{G}^*$ – π-нормальный класс Фиттинга.

Пусть класс $\mathfrak{F}\mathfrak{G}^*$ π-нормален. Покажем, что $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ является π-нормальным классом Фиттинга.

Если $\mathfrak{F}\mathfrak{G}^*$ – π-нормальный класс Фиттинга, то по лемме 2.7 ($a \Rightarrow c$) $(\mathfrak{F}\mathfrak{G}^*)^* = \mathfrak{S}_\pi$, где $\mathfrak{S}_\pi$ – класс всех конечных разрешимых π-групп. По лемме 2.5(a) получаем, что $(\mathfrak{F}\mathfrak{G}^*)^* = (\mathfrak{F}\mathfrak{G})^* = \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, по лемме 2.7 ($c \Rightarrow a$) $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ – π-нормальный класс Фиттинга.

Докажем (b).

Пусть класс $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}$ π-нормален. Докажем, что $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}^* = \mathfrak{S}_\pi$.

Если $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}$ – π-нормальный класс Фиттинга, то по лемме 2.7 ($a \Rightarrow c$) следует, что $(\mathfrak{F}^*\mathfrak{G})^* = \mathfrak{S}_\pi$. Так как $(\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{F}^*$ [9, теорема 1.8(a) в главе X], то $\mathfrak{F}^*$ – класс Локетта. Тогда, по лемме 2.5(b) $(\mathfrak{F}^*\mathfrak{G})^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{G}^* = \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}^*$ – π-нормальный класс Фиттинга.

Пусть класс $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}^* = \mathfrak{S}_\pi$. Докажем, что $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}$ – π-нормальный класс Фиттинга.

Так как $(\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{F}^*$ [9, теорема 1.8(a) в главе X], то $\mathfrak{F}^*$ – класс Локетта. Следовательно, по лемме 2.5(b) $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}^* = (\mathfrak{F}^*\mathfrak{G})^*$. По условию произведение $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}^*$ π-нормально, значит, по лемме 2.7 ($a \Rightarrow c$) $(\mathfrak{F}^*\mathfrak{G})^* = \mathfrak{S}_\pi$. Значит, по лемме 2.7 ($c \Rightarrow a$) $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}$ – π-нормальный класс Фиттинга.

Докажем (c).

Пусть существует множество простых чисел σ такое, что $\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{G}^* = \mathfrak{S}_\pi$, где $\sigma \subseteq \pi$. Докажем, что $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}^* = \mathfrak{S}_\pi$.

Используя свойство ассоциативности операции умножения классов Фиттинга, имеем $\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}^* = (\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{G}^* = \mathfrak{F}^*(\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{G}^*) = \mathfrak{F}^*\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$.

Докажем (d).

Если $\mathfrak{F}$ – π-нормальный класс Фиттинга, то по лемме 2.7 факторгруппа $G/G_{\mathfrak{F}}$ абелева для каждой π-группы G. Итак, $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ – формация всех абелевых групп. Следовательно, по определению $\mathfrak{A}$-корадикала $G^{\mathfrak{A}}$ группы G справедливо включение $G^{\mathfrak{A}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Так как $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ – непустые классы Фиттинга, то по лемме 2.1 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{G}$. Тогда, используя лемму 2.2, можно заключить, что $G_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}\mathfrak{G}}$.

Таким образом, $G^{\mathfrak{A}} \subseteq G_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}\mathfrak{G}}$.

Составим факторгруппу $G/G^{\mathfrak{A}}$. По определению $\mathfrak{A}$-корадикала $G/G^{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$. Но $\mathfrak{A}$ – формация, поэтому по определению формации $(G/G^{\mathfrak{A}})/(G_{\mathfrak{F}\mathfrak{G}}/G^{\mathfrak{A}}) \cong G/G_{\mathfrak{F}\mathfrak{G}} \in \mathfrak{A}$. Следовательно, по лемме 2.7 ($d \Rightarrow a$) получаем, что $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ является π-нормальным классом Фиттинга.

Пусть $\mathfrak{G}$ – π-нормальный класс Фиттинга. Пусть G – любая π-группа, по лемме 2.6 имеем $(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{G}} = G_{\mathfrak{F}\mathfrak{G}}/G_{\mathfrak{G}}$. Так как $\mathfrak{S}_{\pi}$ – формация, то факторгруппа $(G/G_{\mathfrak{F}})/(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{S}_{\pi}$. Следовательно, ввиду π-нормальности класса $\mathfrak{G}$ имеем $(G/G_{\mathfrak{F}})/(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{G}} = (G/G_{\mathfrak{F}})/(G_{\mathfrak{F}\mathfrak{G}}/G_{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{A}$ и $(G/G_{\mathfrak{F}})/(G_{\mathfrak{F}\mathfrak{G}}/G_{\mathfrak{F}}) \cong G/G_{\mathfrak{F}\mathfrak{G}}$. Но $\mathfrak{A}$ – класс групп и поэтому $G/G_{\mathfrak{F}\mathfrak{G}} \in \mathfrak{A}$, для любой π-группы G. Следовательно, по лемме 2.7 ($d \Rightarrow a$) получаем, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ является $\mathfrak{S}_{\pi}$-нормальным классом Фиттинга. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blessenohl, D. Uber normale Schunk und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz. – Math. Z. – 1970. – Bd. 148, № 1. – S. 1–8.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 278 с.
3. Сементовский, В.Г. Инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский. – Минск: Наука и техника, 1984. – С. 166–170.
4. Guo, W. Theory of Classes Groups / W. Guo. – N. Y.–London: Cluwer, 2001.
5. Воробьев, Н.Т. О пересечении локально нормальных классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев, Е.Н. Залесская, А.В. Турковская // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2010. – № 3(57). – С. 7–12.
6. Lockett, P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / P. Lockett. – Math. Z. – 1974. – № 137. – P. 131–136.
7. Hauck, P. On products of Fitting classes / P. Hauck. – J. London Math. Soc. – 1979. – № 20. – P. 423–434.
8. Cossey, J. Products of Fitting classes / J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Bd. 141, № 9. – S. 289–295.
9. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
10. Монахов, С.В. Введение в теорию конечных групп и их классов / С.В. Монахов. – Минск: Высшая школа, 2006. – 207 с.

Поступила в редакцию 06.07.2011. Принята в печать 30.08.2011
Адрес для корреспонденции: 210038, г. Витебск, пр-т Строителей, д. 18, корп. 1, кв. 64, e-mail: turkovskaya@tut.by – Турковская А.В.