УДК 517.538.52+517.538.53

Об асимптотике совместных аппроксимаций Паде для двух экспонент

А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко, А.В. Астафьева
Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Пусть $f_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k^j z^k,\ j=1,2,\ldots,r$ *– набор формальных степенных рядов. Зафиксируем* $n,\ m_1,\ m_2,\ldots,\ m_r$ *-произвольные целые неотрицательные числа и обозначим* $\sum_{j=1}^{r} m_j = m$, $n_j = n+m-m_j,\ \ j=1,\ 2,\ \ldots,r$. *Будем считать, что система функций* $\{f_j(z)\}_{j=1}^{r}$ *является совершенной.*

Тогда существуют такие многочлены $Q_m,\ P_{n_j}^j$ *, что* $\deg Q_m \le m,\ \deg P_{n_j}^j \le n_j$ *и для* $j=1,\ 2,\ \ldots,r$ $R_{n,m}^j(z)=Q_m(z)f_j(z)-P_{n_j}^j(z)=A_j z^{n+m+1}+\cdots$. *При этом однозначно определяются дроби* $\pi_{n,m}^j(z)=\pi_{n_j,m}^j(z;\,f_j)=P_{n_j}^j(z)/Q_m(z),\ \ j=1,\ 2,\ \ldots,r$ *, которые называют совместными аппроксимациями Паде к набору степенных рядов. В данной работе рассматривается совершенная система функций, состоящая из двух экспонент* $e^{\lambda_1 z}$ *и* $e^{\lambda_2 z}$*, и для нее исследуется асимптотика поведения совместных аппроксимаций Паде. Полученные теоремы дополняют и обобщают результаты Эрмита, Е.М. Никишина, А.И. Аптекарева.*

Ключевые слова: *степенной ряд, аппроксимации Паде, совместные аппроксимации Паде, совершенная система функций, асимптотическое равенство.*

About asymptotic of joint Pade approximants for two exponents

A.P. Starovoitov, N.V. Rjabchenko, A.V. Astafieva
Educational establishment «Gomel State Francisk Skorina University»

Let $f_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k^j z^k,\ j=1,2,\ldots,r$ *– a set of formal power series. We will fix* $n,\ m_1,\ m_2,\ldots,\ m_r$ *- the arbitrary whole nonnegative numbers and we will designate* $\sum_{j=1}^{r} m_j = m$, $n_j = n+m-m_j,\ \ j=1,\ 2,\ \ldots,r$. *We will consider that the system of functions* $\{f_j(z)\}_{j=1}^{r}$ *is perfect.*

Then there are polynoms $Q_m,\ P_{n_j}^j$ *, such as* $\deg Q_m \le m,\ \deg P_{n_j}^j \le n_j$ $j=1,\ 2,\ \ldots,r$ $R_{n,m}^j(z)=Q_m(z)f_j(z)-P_{n_j}^j(z)=A_j z^{n+m+1}+\cdots$. *Thus fractions* $\pi_{n,m}^j(z)=\pi_{n_j,m}^j(z;\,f_j)=P_{n_j}^j(z)/Q_m(z),\ \ j=1,\ 2,\ \ldots,r$ *which are named joint Pade approximants to a set of power series are unambiguously defined. In the given article the perfect system of functions consisting of two exponents* $e^{\lambda_1 z}$ *and* $e^{\lambda_2 z}$ *is considered. The asymptotic of behavior of joint Pade approximants for such system of functions is researched. The received theorems supplement and generalize the known results of Ermite, E.M. Nikishin, A.I. Aptekarev.*

Key words: *a power series, Pade approximants, joint Pade approximants, perfect system of functions, asymptotic equality.*

В данной работе исследуется асимптотика поведения совместных аппроксимаций Паде для системы из двух экспонент.

Рассмотрим набор

$$f_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k^j z^k, \quad j=1,2,\ldots,r \tag{1}$$

голоморфных в нуле функций или формальных степенных рядов. Зафиксируем $n, m_1, m_2, \ldots, m_r$ – произвольные целые неотрицательные числа. Обозначим

$$\sum_{j=1}^{r} m_j = m,\ n_j = n+m-m_j,\ j=1,2,\ldots,r.$$

Тогда существуют (см. [1]) такие многочлены $Q_m, P_{n_j}^j$, что $\deg Q_m \le m, \deg P_{n_j}^j \le n_j$ и для $j=1,2,\ldots,r$

$$R_{n,m}^j(z)=Q_m(z)f_j(z)-P_{n_j}^j(z)=A_j z^{n+m+1}+\cdots. \tag{2}$$

Если $r=1$, то согласно теореме Паде ([2], теорема 1.1.1) многочлены Q_m, P_n^1 определяются с точностью до однородной константы, а их отношение задает единственную рациональную функцию $\pi_{n,m}(z; f_1)=\dfrac{P_n^1(z)}{Q_m(z)}$, которую называют аппроксимацией Паде для $f_1(z)$. При $r\ge 2$ дроби $\pi^j_{n,m}(z)=\pi^j_{n_j,m}(z; f_j)=P^j_{n_j}(z)/Q_m(z),\quad j=1,\ 2,\ \ldots,r$ определяются условиями (2), вообще говоря, не однозначно. В случае единственности множества $\{\pi^j_{n,m}\}_{j=1}^r$ его элементы называют совместными аппроксимациями Паде для системы функций (1). Единственность, в частности, имеет место для совершенных систем функций (определение и примеры совершенных систем см. в [1, 3–6]). Совершенной, в частности, является система экспонент $f_j(z)=e^{\lambda_j z}$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^r$ – различные комплексные числа ([1], теорема 2.1). Рассмотрим подробнее эту систему.

Для одной ($r=1$) экспоненты e^ξ явный вид числителя и знаменателя $\pi_{n,m}(z;e^\xi)$ получил Паде. Опираясь на полученные представления, Паде доказал, что при $\dfrac{n}{m}\to\gamma,\ \ 0\le\gamma\le\infty$ на компактах в C дроби $\pi_{n,m}(z;e^\xi)$ равномерно сходится к e^z. О. Перрон [7] обобщил результат о сходимости $\pi_{n,m}(z;e^\xi)$ к e^z, доказав ее при $n+m\to\infty$. Основываясь на результатах численного эксперимента, Г. Мейнардус сформулировал гипотезу об асимптотике поведения разности $e^z-\pi_{n,m}(z;e^\xi)$. Гипотеза Г. Мейнардуса была доказана Д. Браессом [8] (подробнее см. [9]): при $n+m\to\infty$ для любого комплексного z

$$e^z-\pi_{n,m}(z;e^\xi)=\frac{(-1)^m n!m!e^{\frac{2mz}{n+m}}}{(n+m)!(n+m+1)!}\times \\ \times z^{n+m+1}\ 1+o(1)\ . \qquad (3)$$

Доказательство (3) в [8] существенно опирается на интегральные представления числителя и знаменателя $\pi_{n,m}(z;e^\xi)$, полученные О. Перроном [7]:

$$P_n^1(z;e^\xi)=\int_0^\infty t^m(t+z)^n e^{-t}dt\ ,$$

$$Q_m(z;e^\xi)=\int_0^\infty t^n(t-z)^m e^{-t}dt\,.$$

Позже выяснилось (подробнее см., например, [1, 10]), что явный вид числителей и знаменателей для аппроксимаций Паде e^z и, более того, для совместных аппроксимаций Паде к набору экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^r$ фактически был известен Эрмиту задолго до Паде и О. Перрона. Именно при доказательстве трансцендентности числа e Эрмит (см. [11–12]) виртуозно использовал свойство определенных им интегралов

$$M=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^\infty\left[x\prod_{i=1}^r(x-i)\right]^{p-1}e^{-x}dx\,,$$

$$M_j=\frac{1}{(p-1)!}\int_j^\infty\left[x\prod_{i=1}^r(x-i)\right]^{p-1}e^{-x}dx\,,$$

$$\varepsilon_j=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^j\left[x\prod_{i=1}^r(x-i)\right]^{p-1}e^{-x}dx\,,$$

при некотором простом числе p давать удобное приближение к набору $\{e^j\}_{j=1}^r$:

$$e^j-\frac{M_j}{M}=\frac{\varepsilon_j}{M},\ \ j=1,2,\ldots,r\,.$$

Интегралы Эрмита, после небольших преобразований (см. [1, 10]), приводят к решению системы (2) для набора экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^r$:

$$Q_m(z)=\frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^\infty\left[x^n\prod_{i=1}^r(x-\lambda_i)^{m_i}\right]e^{-zx}dx\,,$$

$$P^j_{n_j}(z)=\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_{\lambda_j}^\infty\left[x^n\prod_{i=1}^r(x-\lambda_i)^{m_i}\right]e^{-zx}dx\,, \qquad (4)$$

$$R^j_{n,m_j}(z)=\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\lambda_j}\left[x^n\prod_{i=1}^r(x-\lambda_i)^{m_i}\right]e^{-zx}dx\,.$$

В первых двух интегралах (4) интегрирование осуществляется по контуру, идущему в $+\infty$ и $Re z>0$. При $Re z\le 0$ значение Q_m и $P^j_{n_j}$ находятся с помощью аналитического продолжения. В интеграле, определяющем R^j_{n,m_j}, интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей точки 0 и λ. Из (4), полагая $r=1$, легко получить упомянутые выше представления О. Перрона.

Е.М. Никишиным была поставлена задача об исследовании сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы экспонент. Ее решение было получено А.И. Аптекаревым [10], который доказал, что при $n+m\to\infty$ для любого $j=1,2,\ldots,r$ $\pi^{j}_{n_j,m}(z;e^{\lambda_j\xi})$ сходятся равномерно на компактах в C к $e^{\lambda_j z}$. В [10] установлен следующий аналог леммы О. Перрона [7], доказывающий сходимость $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ к e^{z}: для любых n, m_j

$$\left|Q_m(z)-\exp\left\{-\frac{\sum_{j=1}^{r}\lambda_j m_j}{n+m}z\right\}\right|\le\frac{\left|z\sum_{j=1}^{r}|\lambda_j|\right|}{n+m}\times$$

$$\times\exp\left\{\left|z\sum_{j=1}^{r}|\lambda_j|\right|\right\},$$

где Q_m – знаменатель совместных аппроксимаций Паде к $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{r}$. Из этого неравенства следует, что при $n+m\to\infty$ для любого $z\in C$

$$Q_m(z)=exp\left\{-\frac{\sum_{j=1}^{r}\lambda_j m_j}{n+m}z\right\}(1+o(1)). \quad (5)$$

Основным результатом является следующая

Теорема 1. *Пусть* $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{2}$ *– набор из двух экспонент с произвольными различными комплексными числами* λ_1,λ_2. *Тогда если* $\lim\limits_{n\to\infty} m^2(n)/n=0$, *то для любого* $z\in C$ *равномерно по всем* m, $0\le m\le m(n)$ *при* $n\to+\infty$

$$e^{\lambda_1 z}-\pi^{1}_{n,m}(z)=\frac{(-1)^m(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}\,n!m_1!\lambda_1^{n+m_1+1}z^{n+m+1}}{(n+m)!(n+m_1+1)!}\times$$
$$\times\ e^{\frac{\lambda_1 m_1}{n+m_1}z}\cdot e^{\frac{\lambda_1 m_1+\lambda_2 m_2}{n+m}z}\ (1+o(1)), \quad (6)$$

$$e^{\lambda_2 z}-\pi^{2}_{n,m}(z)=\frac{(-1)^m(\lambda_1-\lambda_2)^{m_1}\,n!m_2!\lambda_2^{n+m_2+1}z^{n+m+1}}{(n+m)!(n+m_2+1)!}\times$$
$$\times e^{\frac{\lambda_2 m_2}{n+m_2}z}\cdot e^{\frac{\lambda_1 m_1+\lambda_2 m_2}{n+m}z}\ (1+o(1)). \quad (7)$$

Доказательство теоремы 1

Лемма 1. *При выполнении условий теоремы 1 для любого* $|z|\le M$ (здесь и далее $M, M_1, M_2,\ldots$ – положительные постоянные) *равномерно по всем* m, $0\le m\le m(n)$ *при* $n\to\infty$

$$R^{1}_{n,m}(z)=(-1)^m\frac{n!m_1!(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}\lambda_1^{n+m_1+1}z^{n+m+1}}{(n+m)!(n+m_1+1)!}\times$$
$$\times\ e^{\frac{\lambda_1 m_1}{n+m_1}z}\ (1+o(1)). \quad (8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . В интеграле

$$I_1(z)=\int_0^{\lambda_1}x^n(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}e^{z(\lambda_1-x)}dx$$

сделаем замену $x=\lambda_1 t$. В результате получим

$$I_1(z)=\lambda_1^{n+m_1+1}\int_0^1 t^n(t-1)^{m_1}(\lambda_1 t-\lambda_2)^{m_2}e^{z\lambda_1(1-t)}dt.$$

Перейдем здесь к новой переменной интегрирования $u=1-t$. Тогда

$$I_1(z)=(-1)^m\lambda_1^{n+m_1+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}\times$$
$$\times\int_0^1(1-u)^n u^{m_1}\left(1+\frac{\lambda_1 u}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^{m_2}e^{\lambda_1 zu}du.$$

Исследуем асимптотику поведения следующего интеграла:

$$J_1=\int_0^1(1-u)^n u^{m_1}\left(1+\frac{\lambda_1 u}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^{m}du.$$

Для этого подынтегральное выражение преобразуем с помощью формулы бинома Ньютона, а затем воспользуемся свойствами бета-функции Эйлера:

$$J_1^0=\sum_{k=0}^{m_2}C^k_{m_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^k\int_0^1(1-u)^n u^{m_1+k}du=$$

$$=\sum_{k=0}^{m_2}C^k_{m_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^k\frac{n!(m_1+k)!}{(n+m_1+k+1)!}=\frac{n!m_1!}{(n+m_1+1)!}\times$$

$$\times\left(1+\sum_{k=1}^{m_2}C^k_{m_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^k\frac{(m_1+1)(m_1+2)\cdots(m_1+k)}{(n+m_1+2)\cdots(n+m_1+k+1)}\right).$$

Так как

$$\left|\sum_{k=1}^{m_2}C^k_{m_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^k\frac{(m_1+1)(m_1+2)\cdots(m_1+k)}{(n+m_1+2)\cdots(n+m_1+k+1)}\right|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{m_2}C^k_{m_2}\left|\frac{\lambda_1 m}{(\lambda_2-\lambda_1)(n+m+1)}\right|^k=$$

$$=\left(1+\frac{|\lambda_1|m}{|\lambda_2-\lambda_1|(n+m+1)}\right)^{m_2}-1,$$

то, учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}m^2/n=0$, правая часть последнего соотношения убывает к нулю при $n\to\infty$, т.е.

$$J_1^0 = \frac{n!m_1!}{(n+m_1+1)!}\left(1+o(1)\right). \qquad (9)$$

Аналогично показывается, что при $p=1,2,\ldots$ и $n \to \infty$

$$J_1^p = \int_0^1 (1-u)^n u^{m_1+p}\left(1+\frac{\lambda_1 u}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^{m_2} du = \frac{n!(m_1+p)!}{(n+m_1+p+1)!}\left(1+o(1)\right). \qquad (10)$$

Подберем теперь u_0 так, чтобы $J_1^1 - u_0 J_1^0 = 0$. Тогда при $n \to \infty$

$$u_0 = \frac{J_1^1}{J_1^0} = \frac{m_1+1}{n+m_1+2}\left(1+o((1)\right) = \frac{m_1}{n+m_1}\left(1+o(1)\right). \ (11)$$

Следовательно, при достаточно больших n $u_0 \in [0,1]$. Согласно формуле Тейлора

$$e^{\lambda_1 uz} = e^{\lambda_1 u_0 z}\cdot e^{\lambda_1(u-u_0)z} = e^{\lambda_1 u_0 z}\left(1+\lambda_1 z(u-u_0)+\frac{(\lambda_1 z)^2(u-u_0)^2}{2!}+\cdots\right) = e^{\lambda_1 u_0 z} + \lambda_1 z(u-u_0)e^{\lambda_1 u_0 z} + \rho_u(z),$$

где при $|z| \le M$ и $u \in [0,1]$

$$|\rho_u(z)| \le M_1 |u-u_0|^2 \left\{\frac{(\lambda_1 M)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\lambda_1 M)^n}{n!}+\cdots\right\} \le \le M_2(u-u_0)^2. \qquad (12)$$

Тогда, учитывая выбор u_0, равенства (9) и (11), получим, что при $n \to \infty$

$$I_1(z) = (-1)^m \lambda_1^{n+m_1+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}\left(e^{\lambda_1 u_0 z}\cdot J_1^0 + A\rho_u(z)\right) = (-1)^m \lambda_1^{n+m_1+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2} \times \left\{\frac{n!m_1!}{(n+m_1+1)!}e^{\frac{\lambda_1 m_1}{n+m_1}z}\left(1+o(1)\right)+A\rho_u(z)\right\},$$

где при достаточно больших n

$$|A\rho_u(z)| \le \int_0^1 (1-u)^n u^{m_1}\left(1+\frac{|\lambda_1|u}{|\lambda_2-\lambda_1|}\right)^{m_2}|\rho_u(z)|du \le 2M_2\left\{\frac{n!(m_1+2)!}{(n+m_1+3)!}+\frac{2m_1}{n+m_1}\cdot\frac{n!(m_1+1)}{(n+m_1+2)!}+\left(\frac{m_1}{n+m_1}\right)^2\cdot\frac{n!m_1!}{(n+m_1+1)!}\right\}.$$

При получении последнего неравенства воспользовались неравенством (12), равенствами (9)–(10) и (11), учитывая при этом, что правая часть в (9) и (10) не зависит от λ_1 и λ_2.

Из двух последних соотношений окончательно получаем, что при $n \to \infty$

$$I_1(z) = (-1)^m \lambda_1^{n+m_1+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2} \times \frac{n!m!}{(n+m_1+1)!}e^{\frac{\lambda_1 m_1}{n+m_1}z}\left(1+o(1)\right).$$

Отсюда и из (4) следует (8). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При выполнении условий теоремы для любого* $|z| \le M$ *равномерно по всем* m, $0 \le m \le m(n)$ *при* $n \to \infty$

$$R_{n,m}^2(z) = (-1)^m \frac{n!m_2!(\lambda_1-\lambda_2)^{m_2}\lambda_2^{n+m_2+1}z^{n+m+1}}{(n+m)!(n+m_2+1)!} \times e^{\frac{\lambda_2 m}{n+m_2}z}\left(1+o(1)\right). \qquad (13)$$

Доказательство. В интеграле

$$I_2(z) = \int_0^{\lambda_2} x^n (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2} e^{z(\lambda_2-x)}dx$$

сделаем замену $x = \lambda_2 t$. В результате получим

$$I_2(z) = \lambda_2^{n+m_2+1}\int_0^1 t^n (t-1)^{m_2}(\lambda_2 t-\lambda_1)^{m_1} e^{z\lambda_2(1-t)}dt.$$

Перейдем в полученном интеграле к новой переменной интегрирования $u = 1-t$. Тогда

$$I_2(z) = (-1)^m \lambda_2^{n+m_2+1}(\lambda_1-\lambda_2)^{m_1} \times \int_0^1 (1-u)^n u^{m_2}\left(1+\frac{\lambda_2 u}{\lambda_1-\lambda_2}\right)^{m_1} e^{z\lambda_2 u}du.$$

Рассуждая теперь аналогично, как и при доказательстве леммы 1, будем иметь, что при $n \to \infty$

$$I_2(z) = (-1)^m \lambda_2^{n+m_2+1}(\lambda_1-\lambda_2)^{m_1} \times \frac{n!m_2!}{(n+m_2+1)!}e^{\frac{\lambda_2 m_2}{n+m_2}z}\left(1+o(1)\right).$$

Отсюда и из (4) следует (13). Лемма 2 доказана.

Из равенств (2) и (5), лемм 1 и 2 очевидным образом следует справедливость утверждений теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Обобщения и замечания

Согласно определению $m = m_1 + m_2$, где m_1, m_2 – целые неотрицательные числа. Анализируя доказательство лемм 1 и 2, нетрудно заметить, что при $m \to \infty$ и ограниченности одного из слагаемых m_j утверждение теоремы 1 можно усилить.

Теорема 2. *Пусть* $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{2}$ *– набор из двух экспонент с произвольными различными комплексными числами* λ_1, λ_2. *Пусть* $m=m_1+m_2$, *и* m_2 *– ограниченно. Тогда для любого* $z \in C$: *1) асимптотическое равенство (6) справедливо равномерно по всем* m, $0 \le m \le m_1(n)$, *где* $m_1(n) = o(n)$ *при* $n \to \infty$; *2) асимптотическое равенство (7) справедливо равномерно по всем* m, $0 \le m \le m(n)$, *где* $m(n) = o(\sqrt{n})$ *при* $n \to \infty$.

Аналогичное утверждение верно и при ограниченном m_1.

Несколько неожиданное следствие из теоремы 1 получается в простейшей ситуации.

Следствие. Пусть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $m = m_1$, $m_2 = 0$. Тогда для любого $z \in C$ равномерно по всем m, $0 \le m \le m(n)$, где $m(n) = o(\sqrt{n})$, при $n \to \infty$

$$e^z - \pi^1_{n,m}(z; e^{\xi}) = \frac{(-1)^m n! m! z^{n+m+1}}{(n+m)!(n+m+1)!} \times \times e^{\frac{2m}{n+m}z}\left(1 + o(1)\right), \tag{14}$$

$$e^{2z} - \pi^2_{n+m,m}(z; e^{2\xi}) = \frac{2^{n+1} z^{n+m+1}}{(n+1)!(n+m)!} \times \times e^{\frac{m}{n+m}z}\left(1 + o(1)\right). \tag{15}$$

Из равенств (3) и (14), в силу единственности аппроксимаций Паде, следует, что первая совместная аппроксимация Паде для набора $\{e^z, e^{2z}\}$ совпадает с аппроксимацией Паде экспоненты e^z, т.е. $\pi^1_{n,m}(z; e^{\xi}) \equiv \pi_{n,m}(z, e^{\xi})$. Из результата В. Браесса (3) следует, что асимптотическое равенство (14) на самом деле верно при $n + m \to \infty$, что согласуется с первым утверждением теоремы 2. Выполнение равенства (15) гарантируется только для m, удовлетворяющих условию $\lim_{n \to 0} m^2 / n = 0$. Можно показать при $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ в диагональном случае, когда $n = m_1 = m_2$, равенства (14) и (15) не имеют места. Поэтому ограничения на рост m в теореме 1, вообще говоря, необходимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 256 с.
2. Бейкер, Дж. Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
3. Mahler, K. Perfect systems / K. Mahler // Compositio math. – 1968. – № 19. – F. 2. – P. 95–166.
4. Jager, H.A. Multidimensionel Generalization of the Pade Table / H.A. Jager // K. Nederl, Ak. Wetenschappen, ser. A. – 1964. – № 67. – P. 192–249.
5. Никишин, Е.М. О системе марковских функций / Е.М. Никишин // Вестн. МГУ. Серия 1, Математика. Механика. – 1979. – № 4. – С. 60–63.
6. Аптекарев, А.И. Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов // Матем. сборник. – 2010. – Т. 201, № 2. – С. 29–78.
7. Perron, O. Die Lehre von den Kettenbruchen / O. Perron // Bond II. – Analytisch-funktionentheoretische Kettenbruche. – B.G. Teubner, Stuttgart, 1957.
8. Braess, D. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.
9. Lorents, G.G. Constructive approximation / G.G. Lorents, M. von Golitschek, Yu. Makavoz // Advanced problems. Grundlehren Math Wiss. Berlin: Springer-Verlag, 1996. – P. 304.
10. Аптекарев, А.И. О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Серия 1, Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.
11. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Acad. Sci. (Paris). – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
12. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей / Ф. Клейн. – М.–Л., 1933.

Поступила в редакцию 05.07.2011. Принята в печать 30.08.2011
Адрес для корреспонденции: 246006, г. Гомель, ул. Мазурова, д. 61, кв. 13,
e-mail: nmankevich@tut.by – Рябченко Н.В.