

КОММУТАТИВНЫЕ КОНСЕРВАТИВНЫЕ НОМ-АЛГЕБРЫ И ИХ СВЯЗЬ С ЙОРДОНОВЫМИ НОМ-АЛГЕБРАМИ

А.В. Кухарев

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова,
пр-т Московский 33, 210038 Витебск, Беларусь, kukharev.av@mail.ru

Консервативные алгебры были введены И. Кантором в рамках изучения обобщений йордановых алгебр [1]. Известно, что все йордановы и ассоциативные алгебры, а также алгебры Ли, алгебры Лейбница и алгебры Зинбеля являются консервативными (см. [2]).

Напомним определение консервативных алгебр. Следуя Кантору, определим произведение $[B, C]$ билинейного отображения B и линейного отображения C , заданных на векторном пространстве V , следующим образом:

$$[C, B](x, y) = C(B(x, y)) - B(C(x), y) - B(x, C(y))$$

для любых $x, y \in V$.

Тогда алгебра A с умножением $B : A \times A \rightarrow A$ называется *консервативной*, если существует другое умножение B^* на том же пространстве A такое, что для любых $a, b \in A$

$$[L_b, [L_a, B]] = -[L_{B^*(a, b)}, B], \quad (1)$$

где $L_a(x) := B(a, x)$ — оператор левого умножения.

Из конструкции Кантора–Кехера–Титса следует, что алгебра A с умножением $B : A \times A \rightarrow A$ является йордановой, если и только если A является коммутативной консервативной алгеброй с ассоциированным умножением $B^* = B$.

Целью настоящей работы является установление аналогичной связи между йордановыми и консервативными Ном-алгебрами.

Напомним, что *Ном-алгебра* — это тройка $(A, \cdot, \alpha)$, состоящая из линейного пространства A , билинейного отображения $\cdot : A \times A \rightarrow A$ и линейного отображения $\alpha : A \rightarrow A$, такой, что $\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) \cdot \alpha(y)$ [3]. Будем говорить, что Ном-алгебра $(A, \cdot, \alpha)$ коммутативна, если $x \cdot y = y \cdot x$ для всех $x, y \in A$.

Ном-алгебру $(A, \cdot, \alpha)$ будем называть *консервативной*, если существует другое билинейное отображение $* : A \times A \rightarrow A$, такое, что $\alpha(x * y) = \alpha(x) * \alpha(y)$, и для любых $a, b, x, y \in A$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \alpha^2(b) \cdot (\alpha(a) \cdot (x \cdot y) - (a \cdot x) \cdot \alpha(y) - \alpha(x) \cdot (a \cdot y)) - \\ & - \alpha^2(a) \cdot ((b \cdot x) \cdot \alpha(y)) + (\alpha(a) \cdot (b \cdot x)) \cdot \alpha^2(y) + \alpha(b \cdot x) \cdot \alpha(a \cdot y) - \\ & - \alpha^2(a) \cdot (\alpha(x) \cdot (b \cdot y)) + \alpha(a \cdot x) \cdot \alpha(b \cdot y) + \alpha^2(x) \cdot (\alpha(a) \cdot (b \cdot y)) = \\ & = -\alpha(a * b) \cdot \alpha(x \cdot y) + ((a * b) \cdot \alpha(x)) \cdot \alpha^2(y) + \alpha^2(x) \cdot ((a * b) \cdot \alpha(y)). \end{aligned} \quad (2)$$

Легко проверить, что в случае тождественного отображения $\alpha = \text{id}$ равенство (2) эквивалентно равенству (1), где $B(a, b) = a \cdot b$ и $B^*(a, b) = a * b$. Иными словами, Ном-алгебра $(A, \cdot, \text{id})$ консервативна, если и только если алгебра A с умножением $\cdot$ консервативна.

Консервативную Ном-алгебру, в которой ассоциированное умножение совпадает с исходным (то есть $a * b = a \cdot b$ для всех $a, b \in A$), будем называть *сильно консервативной* Ном-алгеброй.

Ном-алгебра $(A, \cdot, \alpha)$ называется *йордановой*, если:

- 1) она коммутативна;
- 2) $\alpha^2(x) \cdot (x^2 \cdot \alpha(y)) = \alpha(x^2) \cdot \alpha(x \cdot y)$ для любых $x, y \in A$.

Основной результат представлен следующем утверждением.

Теорема. Ном-алгебра $(A, \cdot, \alpha)$ является йордановой, если только если $(A, \cdot, \alpha)$ является коммутативной сильно консервативной Ном-алгеброй.

Литература

1. Кантор И. Л. *Некоторые обобщения йордановых алгебр* // Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. 1972. Т. 16. С. 407–499.
2. Kaygorodov I., Lopatin A., Popov Yu. *Conservative algebras of 2-dimensional algebras* // Linear Algebra and its Applications. 2015. Vol. 486. P. 255–274.
3. Makhlouf A., Silvestrov S. *Hom-algebra Structures* // Journal of Generalized Lie Theory and Applications. 2008. Vol. 2, No 2. P. 51–64.

АКСИАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ГРУППЫ

А.С. Мамонтов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. ак. Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Россия
andreysmamontov@gmail.com

Аксиальной алгеброй называют (неассоциативную) коммутативную алгебру, порожденную множеством осей. Идемпотент a называется осью, если присоединенный линейный оператор $ad(a)$ полупрост и умножение соответствующих собственных векторов контролируется некоторой таблицей слияния. Алгебра, имеющая следующую таблицу слияния, называется аксиальной алгеброй йорданова типа $(\eta \neq 1, 0)$:

*	1	0	η
1	1		η
0		0	η
η	η	η	1, 0

Таблица 5. Закон слияния $\mathcal{J}(\eta)$

Это означает, что собственные значения $ad(a)$ равны 1, 0 или η , а, например, произведение двух собственных векторов с собственным значением η лежит в прямой сумме собственных подпространств для 0 и 1. Отметим, что при $\eta = \frac{1}{2}$ такую таблицу слияния также имеют йордановы алгебры, порожденные идемпотентами, в силу разложения Пирса.

Пусть теперь η — произвольный параметр, отличный от 0 и 1; F — поле характеристики, отличной от 2, и G — группа 3-транспозиций. Последнее означает, что G порождается нормальным множеством D инволюций (т.е. элементов порядка 2) таким, что для любых $x, y \in D$ порядок $|xy| \leq 3$. Рассмотрим векторное пространство A с формальным базисом D над полем F , зададим на различных элементах $x, y \in D$ умножение следующим правилом: xy равно 0 если $|xy| = 2$ и $\frac{\eta}{2}(x + y - x^y)$ если $|xy| = 3$; продолжим умножение по линейности на A так, чтобы элементы из D были идемпотентами. Получившаяся алгебра называется алгеброй Мацуо. Она является аксиальной алгеброй йорданова типа.

В докладе будут представлены результаты о двойных осях, соответствующих 6-транспозициям, а также результаты о группах 6-транспозиций.

Работа выполнена за счёт гранта Российского научного фонда, проект 23-41-10003, <https://rscf.ru/en/project/23-41-10003/>