УДК 517.936:977.1

Управляемость линейных стационарных систем Пфаффа в инволюции

О.В. Храмцов
Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Рассматривается процесс, описываемый стационарными системами Пфаффа в инволюции. Системы являются линейными по входу, управлению, и по выходу, состоянию. Исследуются следующие свойства управляемости состоянием системы Пфаффа: полная управляемость в случае, когда заданы произвольные начальное и конечное состояния системы – постоянные векторы; полная континуум управляемость в случае, когда заданы произвольное начальное состояние – постоянный вектор и произвольное конечное состояние – аналитическая вектор-функция; полная максимальная управляемость в случае, когда заданы произвольное начальное состояние – постоянный вектор и произвольные конечные состояния – постоянный вектор и аналитическая вектор-функция. Все множество систем Пфаффа разбито на три класса, в каждом из которых получены условия наличия свойств управляемости системы Пфаффа в классе аналитических управлений. Условия носят ранговый характер от некоторых матриц, составленных по известным матрицам системы Пфаффа после приведения ее в инволюцию.

Ключевые слова: *линейная стационарная система Пфаффа в инволюции, управляемость.*

Controllability of the linear stationary Pfaff systems in involution

O.V. Khramtsov
Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

We are considering the process described by stationary Pfaff systems in involution. The systems are linear at entrance, operation and at exit, at state. Following characteristics of the controllability of the state of Pfaff system are studied: total controllability in case arbitrary initial and final states of the system are given – the vector constant; total continuum controllability when arbitrary initial state, constant vector, and arbitrary final state, constant vector and analytical vector function, are given. Whole multitude of Pfaff systems is divided into three classes, in each of which conditions are obtained for the presence of controllability characteristics of Pfaff system in the class of analytical operations. The conditions are of ranged character from some matrices made up according to well-known matrices of Pfaff system after it is taken into involution.

Key words: *linear stationary Pfaff system in involution, controllability.*

В данной работе продолжается изучение свойств управляемости линейных стационарных систем Пфаффа. В [1] получен критерий двухточечной полной управляемости линейных стационарных систем Пфаффа в инволюции в случае, когда заданы произвольные постоянные начальный вектор состояния и конечный вектор состояния. В [2] для вполне интегрируемых линейных стационарных систем Пфаффа изучено понятие полной континуум и полной максимальной управляемостей, когда одним из конечных состояний является произвольная ограниченная аналитическая вектор-функция. В настоящей работе изучаются свойства полной континуум и полной максимальной управляемостей линейных стационарных систем Пфаффа и инволюции. Полученные условия управляемостей носят ранговый характер от некоторых матриц, составленных по известным матрицам системы Пфаффа после приведения ее в инволюцию.

Рассматривается процесс, описываемый линейной системой Пфаффа Θ:

$$dx = (A_1^{(0)}x + B_1^{(0)}z^{(0)}(s))ds_1 + \\ + (A_2^{(0)}x + B_2^{(0)}z^{(0)}(s))ds_2, \quad (1)$$

где $s = (s_1, s_2) \in R^2$; $x \in R^n$ – выход, состояние системы; $z^{(0)} \in R^{r_0}$ – вход, управление, непрерывно дифференцируемая вектор-функция; $r_0 \le 2n$; $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, B_1^{(0)}, B_2^{(0)}$ – постоянные вещественные матрицы соответствующих размерностей. Если выполнены условия

$$A_1^{(0)}A_2^{(0)} = A_2^{(0)}A_1^{(0)}, \quad (2)$$

$$rank[B_1^{(0)}, B_2^{(0)}] = rank[B_1^{(0)}, B_2^{(0)}, P^{(0)}] = m_0, \\ m_0 \le r_0, \quad (3)$$

$$\exists\alpha \in R^1 : rank[\alpha B_1^{(0)} + (1-\alpha)B_2^{(0)}] = m_0, \quad (4)$$

то система (1) вполне интегрируема [3, с. 44], [1]. Свойства управляемости такой системы рассмотрены в [2]. В данной работе рассматриваются системы (1), не являющиеся вполне интегрируемыми, т.е. те, для которых выполняется условие (2) и не выполняются условия (3) или (4). В этом случае вопрос об интегрируемости системы (1) остается открытым. Для его выяснения, чтобы можно было воспользоваться теоремой [4, с. 83] о существовании, единственности решения и произволе в этом решении, необходимо систему (1) продолжить в инволюцию [5, с. 175]. Рассмотрим процесс продолжения [5, с. 263, 287], для чего замкнем систему (1) исходя из равенства $\dfrac{\partial^2 x}{\partial s_1 \partial s_2} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial s_2 \partial s_1}$, где $\dfrac{\partial x}{\partial s_i}$ – скобка в (1) при дифференциале ds_i. Получится система

$$B_1^{(0)} \frac{\partial z^{(0)}}{\partial s_2} - B_2^{(0)} \frac{\partial z^{(0)}}{\partial s_1} = P^{(0)} z^{(0)},$$

$$P^{(0)} \equiv A_2^{(0)} B_1^{(0)} - A_1^{(0)} B_2^{(0)}. \qquad (5)$$

Каждый шаг продолжения состоит из двух этапов. Первый этап. Проверяется выполнимость условия (3). Если оно выполняется, то переходят ко второму этапу. В противном случае невыполнимость условия (3) (т.е. $rank[B_1^{(0)}, B_2^{(0)}] < rank[B_1^{(0)}, B_2^{(0)}, P^{(0)}] = m_0$) означает линейную зависимость между координатами вектора $z^{(0)}$: $Dz^{(0)} = 0$. В случае, когда $rankD = r_0$, получаем $z^{(0)} \equiv 0$, и при $z^{(0)}(t) \not\equiv 0$ система (1) не интегрируема. Если же $rankD < r_0$, то часть координат вектора $z^{(0)}$ выражается через остальные координаты. Подставим выраженную первую часть из них в систему (1) и получим новую систему, для которой условие (3) выполняется. Сохраним для новой системы прежние обозначения. Первый этап продолжения закончен. Второй этап продолжения. Пусть в замыкании (5) не выполняется условие (4), т.е. $rankB^{(0)}(\alpha) < m_0$, $B^{(0)}(\alpha) \equiv \alpha B_1^{(0)} + (1-\alpha) B_2^{(0)}$. Рассмотрим операцию

$$\max_{\alpha} rankB^{(0)}(\alpha) = rankB^{(0)}(\alpha_0) = m_1 < m_0. \qquad (6)$$

Тогда условие (6) выполняется почти для всех $\alpha \in R^1$, за исключением, возможно, конечного множества K_0 значений α. Рассмотрим в матрице $B^{(0)}(\alpha)$ ровно m_1 линейно независимых столбцов с номерами из множества $I = \{i_1, \ldots, i_{m_1}\}$. Затем в матрице $[B_1^{(0)}, B_2^{(0)}]$ выберем ровно m_1 линейно независимых столбцов с непересекающимися номерами $i \in I$. Затем выберем из той же матрицы еще $m_0 - m_1 = p$ линейно независимых столбцов с номерами из множества $J = \{j_1, \ldots, j_p\}$ так, чтобы получилась матрица ранга m_0, при этом $J \subset I$. Теперь систему (5) разрешим относительно соответствующих частных производных

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial s_1} = A_{11}\tilde{z} + B_{11}\dfrac{\partial z_2}{\partial s_2} + B_{12}\dfrac{\partial z_3}{\partial s_1} + B_{13}\dfrac{\partial z_4}{\partial s_1} + B_{14}\dfrac{\partial z_4}{\partial s_2} \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial s_2} = A_{21}\tilde{z} + B_{21}\dfrac{\partial z_2}{\partial s_2} + B_{22}\dfrac{\partial z_3}{\partial s_1} + B_{23}\dfrac{\partial z_4}{\partial s_1} + B_{24}\dfrac{\partial z_4}{\partial s_2} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial s_1} = A_{31}\tilde{z} + B_{31}\dfrac{\partial z_2}{\partial s_2} + B_{32}\dfrac{\partial z_3}{\partial s_1} + B_{33}\dfrac{\partial z_4}{\partial s_1} + B_{34}\dfrac{\partial z_4}{\partial s_2} \\ \dfrac{\partial z_3}{\partial s_2} = A_{41}\tilde{z} + B_{41}\dfrac{\partial z_2}{\partial s_2} + B_{42}\dfrac{\partial z_3}{\partial s_1} + B_{43}\dfrac{\partial z_4}{\partial s_1} + B_{44}\dfrac{\partial z_4}{\partial s_2} \end{cases}, \qquad (7)$$

здесь $\tilde{z} = (z_1^T, z_2^T, z_3^T, z_4^T)^T$ ($(\ldots)^T$ – транспонирование), где вектор z_1 составлен из координат вектора $z^{(0)}$ с номерами $i \in J$, вектора z_2, z_3 составлены из координат вектора $z^{(0)}$ с номерами $i \in I \setminus J$, причем вектора z_2, z_3 не имеют общих координат, вектор z_4 составлен из координат вектора $z^{(0)}$ с номерами, не вошедшими в вектора z_1, z_2, z_3. Очевидно, что $\tilde{z} = Tz^{(0)}$, T – матрица перестановок. Введем новую вектор-функцию $z^{(1)} = (z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, z_3^{(1)}, z_4^{(1)})$ равенствами

$$\frac{\partial z_2}{\partial s_2} = z_1^{(1)}, \quad \frac{\partial z_3}{\partial s_1} = z_2^1, \quad \frac{\partial z_4}{\partial s_1} = z_3^{(1)}, \quad \frac{\partial z_4}{\partial s_2} = z_4^{(1)}. \qquad (8)$$

Систему (7)–(8) можно представить [6, с. 324] в форме специальной системы Пфаффа

$$\begin{cases} dz_1 = (A_{11}\tilde{z} + B_{10}z^{(1)})ds_1 + (A_{21}\tilde{z} + B_{20}z^{(1)})ds_2 \\ dz_2 = (A_{31}\tilde{z} + B_{30}z^{(1)})ds_1 + (0\tilde{z} + Ez_1^{(1)})ds_2 \\ dz_3 = (0\tilde{z} + Ez_2^{(1)})ds_1 + (A_{41}\tilde{z} + B_{40}z^{(1)})ds_2 \\ dz_4 = (0\tilde{z} + Ez_3^{(1)})ds_1 + (0\tilde{z} + Ez_4^{(1)})ds_2 \end{cases}. \qquad (9)$$

Подставив в (9) $\tilde{z} = Tz^{(0)}$, T – матрица перестановок, и умножив слева систему (9) на матрицу T, получим первое продолжение системы (1), состоящее из двух систем

$$\begin{aligned} dx &= (A_1^{(0)}x + B_1^{(0)}z^{(0)}(s))ds_1 + \\ &+ (A_2^{(0)}x + B_2^{(0)}z^{(0)}(s))ds_2, \end{aligned} \qquad (10.1)$$

$$\begin{aligned} dz^{(0)} &= (A_1^{(1)}z^{(0)} + B_1^{(1)}z^{(1)}(s))ds_1 + \\ &+ (A_2^{(1)}z^{(0)} + B_2^{(1)}z^{(1)}(s))ds_2. \end{aligned} \qquad (10.2)$$

Первый шаг продолжения закончен. Переходя ко второму шагу необходимо рассмотреть замыкание системы (10). Так как условия (3)–(4) теперь выполняются, то достаточно взять замыкание системы (10.2). Известно [5, с. 295], что конечным числом шагов продолжений система (1) приводится в инволюцию (или выясняется факт неинтегрируемости этой системы)

$$dw=(A_1w+B_1u(s))ds_1+(A_2w+B_2u(s))ds_1, \qquad (11)$$

где $w=(x^T,z^T)^T=(x^T,(z^{(0)})^T,\dots,(z^{(k)})^T)^T$, $u=z^{(k+1)}$, $w\in R^N$, $u\in R^r$, матрицы A_i,B_i, $i=1,2,$ системы имеют строение

$$A_i=\begin{bmatrix} A_i^{(0)} & B_i^{(0)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & A_{i1}^{(1)} & B_i^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & A_{i1}^{(2)} & A_{i2}^{(2)} & B_i^{(2)} & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & A_{i1}^{(k)} & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{ik}^{(k)}\end{bmatrix},$$

$$B_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \dots\\ R_i\end{bmatrix}.$$

Предположение 1. *В работе рассматриваются системы (1) Пфаффа класса Θ_2, обладающие свойством: после приведения в инволюцию (11) матрицы A_1,A_2 перестановочны*

$$A_1A_2=A_2A_1. \qquad (12)$$

Замыкание системы (11) имеет вид

$$R_1\frac{\partial u}{\partial s_2}-R_2\frac{\partial u}{\partial s_1}=Pu,\ \ P\equiv A_{2k}^kR_1-A_{1k}^kR_2. \qquad (13)$$

При этом выполняются условия

$$rank[R_1,R_2]=rank[R_1,R_2,P]=m\ ,\ \ m\le r\ , \qquad (14)$$

$$\exists\alpha\in R^1: rank[\alpha R_1+(1-\alpha)R_2]=m. \qquad (15)$$

В этом случае для заданного вектора u система (11) имеет единственное решение с начальным условием

$$x(0)=x^0, \qquad (16)$$
$$z(0)=z^0.$$

Управляющее воздействие $z^{(0)}$ заключается теперь в свободе выбора произвольного вектора $z^0\in R^N$ и вектор-функции $u\in R^r$, удовлетворяющей дифференциальному ограничению (13): $z^{(0)}\leftrightarrow(z^0,u)$.

Рассмотрим свойства управляемости систем Пфаффа (1) в смысле следующих определений [2].

Определение 1. *Система (1) называется вполне управляемой, если для произвольных состояний $x^0,x^1\in R^n$ существуют точка $s^1=(s_1^1,s_2^1)$, $0<s_1^1,s_2^1<\infty$, и непрерывно дифференцируемое управление $z^{(0)}=z^{(0)}(s,x^0,x^1)$ такие, что для некоторого решения системы (1) наряду с условием (16) выполняется условие*

$$x(s^1)=x^1. \qquad (17)$$

Определение 2. *Система (1) называется вполне континуум управляемой, если для произвольного состояния $x^0\in R^n$ и произвольной аналитической ограниченной вектор-функции ϕ существует интервал $I=(a,b)$, конечный момент $s_2^0>0$ и непрерывно дифференцируемое управление $z^{(0)}=z^{(0)}(s,x^0,\phi)$ такие, что для некоторого решения системы (1) наряду с условием (16) выполняется условие*

$$x(s_1,s_2^0)=\phi(s_1),\ \ s_1\in I=(a,b). \qquad (18)$$

Определение 3. *Система (1) называется вполне максимально управляемой, если для произвольных состояний $x^0,x^1\in R^n$ и произвольной аналитической ограниченной функции ϕ существуют точка $s^1=(s_1^1,s_2^1)$, $0<s_1^1,s_2^1<\infty$, момент $s_2^0>0$, интервал $I=(a,b)$ и непрерывно дифференцируемое управление $z^{(0)}=z^{(0)}(s,x^0,x^1,\phi)$ такие, что для некоторого решения системы (1) наряду с условием (16) выполняются условия (17) и (18).*

Пусть вектор управления u имеет размерность $r\ge 1$ $(r\le 2n)$. Если ввести вспомогательный параметр q равенством $m+q=r$, $q\in\{0,1,...,r-1\}$, то для него возможны варианты соотношения с числом m: a) $q=0$ $(m=r)$, b) $m=q$ c) $m>q$, d) $m<q$.

Предположение 2. *Не существует линейной замены для вектора управления $u=Dv, v\in R^p$, $D-$ вещественная постоянная матрица, с условием $p<r$.*

Предположение 2 не существенно, ибо линейной заменой вектора управления u можно добиться его выполнения.

В силу предположения 2 случай d) невозможен. Поэтому класс систем Пфаффа Θ_2 разбивается на три класса:

класс Θ_{21} в случае $q=0$;

класс Θ_{22} в случае $m=q$;

класс Θ_{23} в случае $m>q$.

Рассмотрим свойства управляемости систем Пфаффа в каждом классе.

Управляемость систем Пфаффа класса Θ_{21}. К классу Θ_{21} относятся те системы

Пфаффа Θ_2, для которых наряду с условиями (14)–(15) выполнено условие $m = r$ ($q = 0$), где m – число из (14), а r – размерность компоненты u вектора управления $z^{(0)}$.

Предложение 1. *Системы Пфаффа класса Θ_{21} не являются вполне континуум управляемыми ни при каких условиях.*

Действительно, если $m = r$, то свобода вектора управления в силу дифференциального ограничения (13) заключается только в выборе начального состояния управления $z^0, u(t_1, 0)$. Этот ресурс недостаточен для удовлетворения условия (18), а значит, и для континуум управляемости системой (11). Он может быть использован на решение задачи полной управляемости по определению 1. В [1] получен критерий полной управляемости систем Пфаффа класса Θ_2, в том числе и класса Θ_{21}.

Теорема 1. *Система Пфаффа класса Θ_2 вполне управляема тогда и только тогда, когда для некоторого конечного значения $t_1^1 > 0$*

$$\exists \alpha \in R^1 : rank[F(t_1^1, 0, \alpha), Q(\alpha)] = n, \qquad (19)$$

здесь

$$F(t_1, 0, \alpha) = \mathrm{E}\exp(A_1(\alpha)t_1)\begin{bmatrix} 0_{N-m,m} \\ E_m \end{bmatrix}, \mathrm{E} = [E_n, 0],$$

$$Q(\alpha) \equiv [\mathrm{E}B(\alpha), \mathrm{E}A(\alpha)B(\alpha), ..., \mathrm{E}A^{n-1}(\alpha)B(\alpha)],$$

$$B(\alpha) \equiv \alpha B_1 + (1-\alpha)B_2, \;\; A(\alpha) \equiv \alpha A_1 + (1-\alpha)A_2,$$

E_n, E_m – единичные $(n \times n)$- и $(m \times m)$-матрицы,

$0, 0_{N-m,m}$ – нулевые $(n \times (N-n))$- и $((N-m) \times m)$-матрицы.

Управляемость систем Пфаффа класса Θ_{22}. К классу Θ_{22} относятся те системы Пфаффа Θ_2, для которых наряду с условиями (14)–(15) выполнено условие $m = q$, ($m + q = r$), где m – число из (14), а r – размерность компоненты u вектора управления $z^{(0)}$. Критерий полной управляемости по определению 1 приведен в теореме 1.

Условие (14) позволяет выбрать из матрицы $[R_1, R_2]$ ровно m линейно независимых столбцов, из которых составляется матрица R

$$R \equiv [r_1^{[k_1]}, r_1^{[k_2]}, ..., r_1^{[k_s]}, r_2^{[l_1]}, ..., r_2^{[l_p]}], \; s + p = m \qquad (20)$$

(нижний индекс – номер матрицы R_i, верхний – номер столбца в этой матрице). В свою очередь условие (15) означает, что $k_i \neq l_j$ для любых $i \in \{1,...,s\}, j \in \{1,...,p\}$. Тем самым в матрице R нет столбцов из матриц R_1 и R_2 с одинаковыми номерами.

Введение (20) матрицы R позволяет получить для матриц R_1, R_2, P представления

$$R_1 = RL_1, \;\; R_2 = RL_2, \;\; P = RC, \qquad (21)$$

где L_1, L_2, C – некоторые однозначно определенные вещественные постоянные $(m \times r)$-матрицы, причем в силу (14) имеем $rank[L_1, L_2] = m$. В случае систем класса Θ_{22} в силу предположения 1 эти матрицы обладают также свойством

$$\Delta = \det L \neq 0, \;\; L \equiv \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}. \qquad (22)$$

Действительно, если возможно уменьшение размерности r компоненты u вектора управления $z^{(0)}$ за счет введения нового управления v размерности $p < r$, то существуют вещественные $(r \times p)$-матрицы D_i такие, что имеют место равенства

$$\begin{cases} L_1 u = D_1 v \\ L_2 u = D_2 v \end{cases}.$$

Для существования вектора v меньшей размерности необходима и достаточна линейная зависимость строк матрицы L, а это означает, в силу предположения 1, что имеет место условие (22).

Справедлива

Теорема 2. *Система Пфаффа (1) класса Θ_{22} вполне континуум управляема тогда и только тогда, когда*

$$\exists \alpha \in R^1 : rank Q_2(\alpha) = n, \qquad (23)$$

где $Q_2(\alpha) \equiv [\mathrm{E}B, \mathrm{E}A_2(\alpha)B, ..., \mathrm{E}A_2^{n-1}(\alpha)B]$, $\mathrm{E} = [E_n, 0]$, $A_2(\alpha) \equiv \alpha A_1 + A_2$, $B = [0_{N-m,m}, R^T]^T$, E_n *– единичная* $(n \times n)$*-матрица,* $0, 0_{N-m,m}$ *– нулевые* $(n \times (N-n))$*- и* $((N-m) \times m)$*-матрицы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что если условие (23) выполняется для некоторого $\alpha \in R^1$, то оно имеет место почти всюду, за исключением, возможно, конечного множества K_1 значений α.

А. В системе (11) сделаем замену аргумента

$$\begin{cases} s_1 = t_1 + \alpha t_2 \\ s_2 = \alpha t_1 + t_2 \end{cases}, \; \alpha \in R^1, \; t = (t_1, t_2), \; \alpha \neq \pm 1. \qquad (24)$$

После обозначений $w(s) = y(t)$, $u(s) = v(t)$ с учетом введения (20) матрицы R, представлений (21) матриц R_1, R_2, P, матрицы B в (23) система (11) примет вид

$$dy = (A_1(\alpha)y + BL_1(\alpha)v(t))dt_1 + + (A_2(\alpha)y + BL_2(\alpha)v(t))dt_2, \quad (25)$$

здесь $t = (t_1, t_2) \in R^2$, $A_1(\alpha) \equiv A_1 + \alpha A_2$, $A_2(\alpha) \equiv \alpha A_1 + A_2$, $L_1(\alpha) \equiv L_1 + \alpha L_2$, $L_2(\alpha) \equiv \alpha L_1 + L_2$.

Условие вида (12) для матриц системы (25) выполняется, а дифференциальное ограничение (13) для систем Пфаффа класса Θ_{22} после пересчета с учетом представлений (21) и замены (24) принимает вид

$$L_1(\alpha)\frac{\partial v}{\partial t_2} - L_2(\alpha)\frac{\partial v}{\partial t_1} = (1-\alpha^2)Cv. \quad (26)$$

Б. Введем новое управление $(f^T, g^T)^T \in R^{2m}$ по формулам

$$\begin{cases} L_1(\alpha)v = f \\ L_2(\alpha)v = g \end{cases}, \quad L(\alpha) \equiv \begin{bmatrix} L_1(\alpha) \\ L_2(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Определитель матрицы $L(\alpha)$ коэффициентов в системе (27) не равен нулю в силу свойства (22) почти всюду в R^1, за исключением, возможно, конечного множества K_2 значений α. Значит, соответствие (27) между векторами v и $(f^T, g^T)^T$ взаимно однозначно для значений $\alpha \in R^1 \setminus K_2$. Согласно (27) система (25) перепишется в виде

$$dy = (A_1(\alpha)y + Bf(t))dt_1 + (A_2(\alpha)y + Bg(t))dt_2. \quad (28)$$

Условие (12) для системы (28) выполняется, а дифференциальное ограничение (26) для систем Пфаффа класса Θ_{22} принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} - \frac{\partial g}{\partial t_1} = (1-\alpha^2)CL^{-1}(\alpha)\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

$$L(\alpha) \equiv \begin{bmatrix} L_1(\alpha) \\ L_2(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (29)$$

В. Общее решение для системы (28) записывается в виде [3, с. 48]

$$y(t) = \exp(A_1(\alpha)t_1 + A_2(\alpha)t_2) \times$$

$$\times [y^0 + \int_0^t \exp(-A_1(\alpha)t_1 - A_2(\alpha)t_2)B(f(t)dt_1 + g(t)dt_2)]. \quad (30)$$

Начальное условие (16) выполняется: $[E_n, 0]y(0) = x(0) = x^0$. В правой части (30) стоит криволинейный интеграл второго рода, который в силу условий (12) и (29) не зависит от пути интегрирования. Поэтому решение (30) можно представить в виде

$$y(t) =$$

$$= \exp(A_1(\alpha)t_1 + A_2(\alpha)t_2)[y^0 + \int_0^{t_1} \exp(-A_1(\alpha)\tau_1)Bf(\tau_1, 0)d\tau_1] +$$

$$+ \exp(A_1(\alpha)t_1 + A_2(\alpha)t_2) \times$$

$$\times \int_0^{t_2} \exp(-A_1(\alpha)t_1 - A_2(\alpha)\tau_2)Bg(t_1, \tau_2)d\tau_2. \quad (31)$$

Поднесем экспоненты под знаки интегралов и, чтобы рассмотреть условие (18), умножим обе части решения (31) слева на матрицу $\mathrm{E} = [E_n, 0]$

$$p(t_1, t_2) = F_1(t_1, t_2, \alpha)x^0 + F(t_1, t_2, \alpha)z^0 +$$

$$+ [E_n, 0]\exp(A_2(\alpha)t_2)\int_0^{t_1} \exp(-A_1(\alpha)(t_1 - \tau_1))Bf(\tau_1, 0)d\tau_1 +$$

$$+ [E_n, 0]\int_0^{t_2} \exp(-A_2(\alpha)(t_2 - \tau_2))Bg(t_1, \tau_2)d\tau_2, \quad (32)$$

где $p(t) = [E_n, 0]y(t)$,

$$F_1(t_1, t_2, \alpha) = [E_n, 0]\exp(A_1(\alpha)t_1 + A_2(\alpha)t_2)\begin{bmatrix} E_n \\ 0^T \end{bmatrix},$$

$$F(t_1, t_2, \alpha) = [E_n, 0]\exp(A_1(\alpha)t_1 + A_2(\alpha)t_2)\begin{bmatrix} 0_{N-m,m} \\ E_m \end{bmatrix},$$

E_n, E_m – единичные $(n \times n)$ - и $(m \times m)$ -матрицы, $0, 0_{N-m,m}$ – нулевые $(n \times (N-n))$- и $((N-m) \times m)$ -матрицы.

Если в (32) положить $t_2 = 0$, то получится равенство

$$h(t_1, 0) = F(t_1, 0, \alpha)z^0 +$$

$$+ [E_n, 0]\int_0^{t_1} \exp(-A_1(\alpha)(t_1 - \tau_1))Bf(\tau_1, 0)d\tau_1, \quad (33)$$

где $h(t_1, 0) \equiv p(t_1, 0) - F_1(t_1, 0, \alpha)x^0$.

В случае заданных вектора z^0 и произвольной аналитической ограниченной функции $f(t_1, 0)$ при $t_2 = t_2^0$ из решения (32) конечное условие (18) принимает вид

$$H(t_1, t_2^0) = [E_n, 0] \times$$

$$\times \int_0^{t_2^0} \exp(-A_2(\alpha)(t_2 - \tau_2))Bg(t_1, \tau_2)d\tau_2, \quad (34)$$

здесь

$$H(t_1, t_2^0) \equiv \phi(t_1 + \alpha t_2^0) - F_1(t_1, t_2^0, \alpha)x^0 - F(t_1, t_2^0, \alpha)z^0 -$$

$$- [E_n, 0]\exp(A_2(\alpha)t_2^0)\int_0^{t_1} \exp(-A_1(\alpha)(t_1 - \tau_1))Bf(\tau_1, 0)d\tau_1.$$

Г. В качестве промежуточного вспомогательного управления теперь используется аналитическая ограниченная функция

$$g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t_1^i z_i(t_2), \qquad (35)$$

где векторы $z_i \in R^m$ подлежат определению. Аналитическая функция H в (34) раскладывается в ряд

$$H(t_1, t_2^0) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t_1^i, \quad a_i \in R^n, \qquad (36)$$

здесь вещественные векторы a_i Y R^n являются известными. В силу (35) и (36) задача (34) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t_1^i = \mathrm{E}\int_0^{t_2^0} \exp(-A_2(\alpha)(t_2^0 - \tau_2))B \sum_{i=0}^{\infty} t_1^i z_i(\tau_2) d\tau_2 . \qquad (37)$$

В результате сравнения коэффициентов при одинаковых степенях t_1^i получается счетное множество проблем моментов

$$a_i = \int_0^{t_2^0} \exp(-A_2(\alpha)\tau_2) B z_i(\tau_2) d\tau_2 , \; i = 0,1,2,... \qquad (38)$$

Каждая из проблем моментов в (38) имеет решение $z_i(t_2)$ тогда и только тогда, когда [7, с. 42], [1] выполняется условие (23) теоремы 2. Решений каждой проблемы моментов – бесконечное множество и при этом и в классе аналитических функций [7, с. 51], [8]. Выберем в каждой проблеме моментов такое решение z_i, чтобы ряд (35) сходился для точек (t_1, t_2) из некоторой области $G = I_1 \times I_2 = \; = (a_1, b_1) \times [0, t_2^0]$. Тем самым найден вектор g. Для отыскания вектора f имеем из условия (29) начальную задачу относительно вектор-функции f

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} - (1-\alpha^2) C L^{-1}(\alpha) \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} = = \frac{\partial g}{\partial t_1} + (1-\alpha^2) C L^{-1}(\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}, \qquad (39)$$

$$f(t_1, 0) = \varphi(t_1), t_1 \in I_1$$

где некоторая ограниченная аналитическая функция $\varphi(t_1)$ и вектор z^0 пока не заданы и выбраны произвольно. Задача (39) всегда имеет единственное решение f в области G, а значит, вектор $(f^T, g^T)^T$ найден. В результате замен, обратных к (27) и (24), из вектора $(f^T, g^T)^T$ и интервала I_1 получаются искомая компонента u управления $z^{(0)}$ и интервал I. Все ограничения на параметр α выполняются почти всюду в R^1, за исключением, возможно, конечного множества $K = \bigcup_0^2 K_i$ значений α. Таким образом, задача полной континуум управляемости разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (23) теоремы 2. Теорема доказана.

Замечание 1. Условие (23) на самом деле достаточно проверять для произвольного конечного множества числом n_1 значений $\alpha \in R^1$, где n_1 – количество значений α во множестве K_1.

Замечание 2. В доказательстве теоремы 2 в задаче (34) функция $\varphi(t_1)$ и вектор z^0 были выбраны произвольно. Поэтому эту свободу выбора можно использовать для управления системой (1).

Имеет место

Теорема 3. *Для полной максимальной управляемости системы Пфаффа (1) класса* Θ_{22} *достаточно выполнение условия (23).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В системе (11) сделаем замену аргумента (24). Условие (16) выполняется в силу формулы общего решения (31). Согласно теореме 2 условие (23) обеспечивает выполнимость требования (18) с функцией φ и вектором z^0, определяемыми ниже. Чтобы рассмотреть условие (17), положим в (31) $t_2^0 = 0$, $t_1 = t_1^1$ и получим проблему моментов (см. (33))

$$h^1 = F(t_1^1, 0, \alpha) z^0 + [E_n, 0] \times \int_0^{t_1^1} \exp(-A_1(\alpha)(t_1^1 - \tau_1) B f(\tau_1, 0) d\tau_1,$$

где $h^1 = x^1 - F_1(t_1^1, 0, \alpha) x^0$.

Для решения этой проблемы моментов в классе аналитических функций $\varphi(t_1)$ достаточно выполнение в силу (19) условия

$$\exists \alpha \in R^1 : rank Q(\alpha) = n .$$

Очевидно, что это условие имеет место почти всюду в R^1, за исключением, возможно, конечного множества K_3 значений α, тогда и только тогда, когда выполняется условие (23). Поэтому существует значение $\alpha \in R^1 \setminus \bigcup_0^3 K_i$, для которого выполнены все требования в доказательстве теоремы на параметр α. Теорема 3 доказана.

Управляемость систем Пфаффа класса Θ_{23}. К классу Θ_{23} относятся те системы Пфаффа Θ_2, для которых наряду с условиями (14)–(15) выполнено условие $m > q$,

($m+q=r$), где m – число из (14), а r – размерность компоненты u вектора управления $z^{(0)}$. Критерий полной управляемости по определению 1 приведен в теореме 1.

Рассмотрим представления (21) матриц системы (11) и замену аргумента

$$\begin{cases} s_1 = t_1 + \beta_1 t_2 \\ s_2 = \alpha t_1 + \beta_2 t_2 \end{cases}, \ \alpha, \beta_1, \beta_2 \in R^1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 \\ \alpha & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (40)$$

В результате система (11) примет вид

$$dy = (A_1(\alpha)y + BL_1(\alpha)v(t))dt_1 +$$
$$+ (A_2(\beta)y + BL_2(\beta)v(t))dt_2,$$

здесь $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $A_1(\alpha) \equiv A_1 + \alpha A_2$,

$$A_2(\beta) \equiv \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2,\ L_1(\alpha) \equiv L_1 + \alpha L_2,$$
$$L_2(\beta) \equiv \beta_1 L_1 + \beta_2 L_2.$$

В силу предположения 1 ранг матрицы $L_2(\beta)$ удовлетворяет неравенству $q \le rank L_2(\beta) \le m$ почти всюду в R^2, за исключением, возможно, конечного множества K_4 направлений, задаваемых вектором β. Для систем класса Θ_{23} взаимно однозначная замена (27) в общем случае невозможна, так как матрица $L(\beta)$ имеет размерности $(2m \times r)$ и $r < 2m$. Назовем спектром линейной зависимости матрицы $L_2(\beta)$ множество Ω векторов β, для которых $rank L_2(\beta) = q$. Заметим, что спектр Ω не всегда существует. Если $\beta^{(i)} \in \Omega$, то матрица $L_2(\beta)$ представима в виде

$$L_2(\beta^{(i)}) = M_i L_2^0(\beta^{(i)}), \qquad (41)$$

где матрица $L_2^0(\beta^{(i)})$ составлена из линейно независимых строк матрицы $L_2(\beta^{(i)})$, M_i – некоторая однозначно определенная постоянная $(m \times m)$-матрица. Имеет место достаточное условие континуум управляемости систем класса Θ_{23}.

Теорема 4. *Для полной континуум управляемости системы Пфаффа (1) класса* Θ_{23} *достаточно существование вектора* $\beta^{(i)}$ *из спектра* Ω *линейной зависимости матрицы* $L_2(\beta)$, *для которого выполняются условия*

$$rank Q_3(\beta^{(i)}) = n, \qquad (42)$$

здесь

$Q_3(\beta) \equiv [\mathrm{E}BM_i, \mathrm{E}A_2(\beta)BM_i, ..., \mathrm{E}A_2^{n-1}(\beta)BM_i]$,

$\mathrm{E} = [E_n, 0]$, $A_2(\beta) \equiv \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2$, $B = [0_{N-m,m}, R^T]^T$, E_n – единичная $(n \times n)$-матрица, $0, 0_{N-m,m}$ – нулевые $(n \times (N-n))$- и $((N-m) \times m)$-матрицы, матрица M_i определена в (41).

В силу представления (41) для матрицы $L_2(\alpha_i)$ возможна взаимно однозначная замена

$$\begin{cases} L_1(\alpha)v = f \\ L_2^0(\beta^{(i)})v = g \end{cases}, \quad f \in R^m, g \in R^q.$$

В дальнейшем доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

В результате рассуждений, аналогичных приведенным при доказательстве теорем 3 и 4, получается

Теорема 5. *Для полной максимальной управляемости системы Пфаффа класса* Θ_{23} *достаточно существование вектора* $\beta^{(i)}$ *из спектра* Ω *линейной зависимости матрицы* $L_2(\beta)$, *для которого выполняются условие (41) и условие*

$$\exists \alpha \in R^1 : rank Q(\alpha) = n,$$

здесь $Q(\alpha) \equiv [\mathrm{E}B, \mathrm{E}A_1(\alpha)B, ..., \mathrm{E}A_1^{n-1}(\alpha)B]$, $A_1(\alpha) \equiv A_1 + \alpha A_2$, $\mathrm{E} = [E, 0]$, $B = [0_{N-m,m}, R^T]^T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Храмцов, О.В. К управляемости стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 11. – С. 1933–1939.
2. Храмцов, О.В. Управляемость вполне интегрируемых линейных стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2011. – № 1. – С. 5–10.
3. Гайшун, И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И.В. Гайшун. – Минск: Наука и техника, 1983. – 371 с.
4. Фиников, С.П. Теория конгруэнций / С.П. Фиников. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. – 528 с.
5. Фиников, С.П. Метод внешних форм Картана / С.П. Фиников. – М.–Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
6. Рашевский, П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными / П.К. Рашевский. – М.: Гостехиздат, 1947. – 354 с.
7. Калман, Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М.: Наука, 1971. – 426 с.
8. Шкляр, Б.Ш. Об управляемости в классах простейших функций / Б.Ш. Шкляр // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. – 1972. – № 1. – С. 91–93.

Поступила в редакцию 17.05.2011. Принята в печать 30.06.2011

Адрес для корреспонденции: 210038, г. Витебск, Московский пр-т, д. 33, УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кафедра геометрии и математического анализа, тел.: (8-025) 682-19-69 – Храмцов О.В.