УДК 517.988

О минимизации спектрального радиуса

Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко
Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Задача минимизации спектрального радиуса матрицы I – AB является тривиальной при невырожденной матрице B и произвольной матрице A, т.е. в этом случае решением является значение матрицы A, равное B^{-1}. Эта задача существенно усложняется при необратимой матрице B и матрицах A специального вида. В статье получены явные формулы для элементов матрицы A, минимизирующей спектральный радиус матрицы I – AB при заданной матрице B. Основным результатом статьи является теорема 1, в которой подробно рассмотрен случай матрицы A вида αI, и теорема 4, в которой рассмотрен случай диагональной матрицы A. Такой вид матрицы A обусловлен тем, что матрица αI содержит один параметр, а диагональная матрица второго порядка содержит два параметра, что представляет собой удобство при конструировании конкретных итерационных процессов.
Ключевые слова: *спектральный радиус, итерационный процесс, экстремальный полином.*

On the minimization of spectral radius

Y.V. Trubnikov, O.V. Pyshnenko
Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

The task to minimize spectral radius of the matrix I – AB is trivial when matrix B is non born and matrix A is arbitrary, thus in this case the solution is the value of matrix A equal to B. This task is considerably more complicated at irreversable matrix B and matrices A of special type. The article produces apparent formulas for elements of matrix A which minimizes spectral radius of matrix I – AB at given matrix B. The main finding of the article is theorem 1 which in detail considers the case of matrix A of αI type and theorem 4 which considers the case of diagonal matrix A. This type of matrix A is conditioned by the fact that matrix αI contains one parameter while the diagonal matrix of second order contains two parameters which is convenient while constructing definite iteration processes.
Key words: *spectral radius, iteration process, extreeme polynome.*

Актуальным вопросом теории оптимальных итерационных процессов является вопрос минимизации спектрального радиуса матрицы $I - AB$ при заданной матрице *B*. Для различных классов матриц *A*, например, для *A* вида αI или диагональной матрицы *A*, требуется найти значения параметров, минимизирующих при различных характеристиках матрицы *B*, значение спектрального радиуса $\rho(I - AB)$.

Материал и методы. Объектом исследования являются характеристические полиномы матрицы $I - AB$. Применяются аналитические методы исследования минимаксной задачи.

Результаты и их обсуждение. В данной статье задача минимизации спектрального радиуса матрицы $I - \alpha B$ при заданной матрице *B* полностью решается для матрицы *B* второго порядка. Рассмотрены случаи αI, *A* – диагональная матрица. Заметим, что в данной задаче интерес представляют именно случаи, когда матрица *B* является вырожденной. В случае невырожденности матрицы *B* тривиальным решением задачи является $A = B^{-1}$, но и в этом случае в классе матриц вида αI или диагональных равенство $A = B^{-1}$ может не выполняться.

Итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - AF(x_n),\ F : ⊕^m \to ⊕^m,\ ∂^m \to ∂^m,$$

где ⊕(∂) – множество вещественных (комплексных) чисел, естественно считать оптимальным, если спектральный радиус матрицы

$$I - AF'(x_n),$$

где $F'(x_n)$ – матрица Якоби, является минимальным. При этом желательно, чтобы матрица *A* имела вид $A = \alpha I$, где α – итерационный параметр, или была диагональной.

В данном исследовании задача минимизации спектрального радиуса матрицы $I - \alpha B$ при заданной матрице *B* полностью решается для матриц второго порядка. Рассмотрим вопрос о нахождении таких вещественных значений параметра α, при которых спектральный радиус $\rho(I - \alpha B)$ матрицы $I - \alpha B$ является наименьшим. Пусть

$$B = □b_{ij}□\ (i, j = 1, 2),\ SpB = b_{11} + b_{22},$$

$$p = \sqrt{(b_{11} - b_{22})^2 + 4b_{12}b_{21}}.$$

Теорема 1. *Пусть* $(b_{11} - b_{22})^2 + 4b_{12}b_{21} \ge 0.$

Тогда результат минимизации спектрального радиуса $\rho(I - \alpha B)$ *по* α *можно сформулировать следующим образом (табл. 1)*:

Таблица 1

Таблица значений $\rho(I-\alpha B)$

Связь между параметрами Sp и p	Оптимальное значение α	Значение спектрального радиуса
0 < p < SpB	*2/SpB*	*p/SpB < 1*
SpB < 0 < p, 0 < p < |Spb|	*2/SpB*	*p/|SpB| < 1*
0 < SpB < p	*0*	*1*
SpB <0<p, 0<|SpB|<p	*0*	*1*
SpB≠0, p=0	*2/SpB*	*0*
SpB=0, p≠0	*0*	*1*
SpB = p	*0*	*1*

Доказательство. Найдем дискриминант D характеристического уравнения

$$\lambda^2-(2-\alpha b_{11}-\alpha b_{22})\lambda+1-\alpha b_{11}-\alpha b_{22}+ \\ +\alpha^2(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})=0 \qquad (1)$$

матрицы $I-\alpha B$:

$$D=(2-\alpha b_{11}-\alpha b_{22})^2-4[1-\alpha b_{11}-\alpha b_{22}+ \\ +\alpha^2(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})]=\alpha^2[(b_{11}-b_{22})^2+4b_{12}b_{21}].$$

Таким образом, если

$$(b_{11}-b_{22})^2+4b_{12}b_{21}\geq 0,$$

то корни $\lambda_1(\alpha)$, $\lambda_2(\alpha)$ уравнения (1) будут иметь вид

$$\lambda_1(\alpha) = \frac{1}{2}(2-\alpha SpB+|\alpha|\,p), \quad \lambda_1(\alpha) = \\ =\frac{1}{2}(2-\alpha SpB-|\alpha|\,p).$$

Рассмотрим, например, случай, когда $0<p<SpB$. Так как

$$2\lambda_1(\alpha)=\begin{cases}2-\alpha SpB+|\alpha|\,p=2+\alpha(p-SpB), & \text{где } \alpha\geq 0,\\ 2-\alpha SpB+|\alpha|\,p=2-\alpha(p+SpB), & \text{где } \alpha<0;\end{cases}$$

$$2\lambda_2(\alpha)=\begin{cases}2-\alpha SpB-|\alpha|\,p=2-\alpha(p+SpB), & \text{где } \alpha\geq 0,\\ 2-\alpha SpB-|\alpha|\,p=2+\alpha(p-SpB), & \text{где } \alpha<0;\end{cases}$$

то из графиков функций

$$2|\lambda_1(\alpha)|, \quad 2|\lambda_2(\alpha)|, \quad max\{2|\lambda_1(\alpha)|, 2|\lambda_2(\alpha)|\}$$

видно, что

$$\min_{\alpha} max\{2|\lambda_1(\alpha)|, 2|\lambda_2(\alpha)|\}$$

достигается при $\alpha=\dfrac{2}{SpB}$. При этом в точке $\alpha=\dfrac{2}{SpB}$ получаем

$$\rho(I-\alpha B)=|\lambda_1(\alpha)|=|\lambda_2(\alpha)|=\frac{\sqrt{(b_{11}-b_{22})^2+4b_{12}b_{21}}}{b_{11}+b_{22}}.$$

Аналогично рассматриваются и другие случаи.

Теорема 2. *При выполнении неравенства*

$$D_1=(b_{11}-b_{22})^2+4b_{12}b_{21}<0 \qquad (2)$$

значение параметра α, *минимизирующее спектральный радиус* $\rho(I-\alpha B)$, *определяется равенством*

$$\alpha=\frac{2SpB}{|D_1|+(SpB)^2}. \qquad (3)$$

Доказательство. При выполнении неравенства (2) корни характеристического уравнения (1) имеют вид

$$\lambda_{1,2}=1-\frac{\alpha}{2}(SpB\mp i\sqrt{|D_1|})=1-\frac{\alpha}{2}SpB\pm i\frac{\alpha\sqrt{|D_1|}}{2}.$$

Тогда

$$|\lambda_1|^2=|\lambda_2|^2=(1-\frac{\alpha}{2}SpB)^2+\frac{|D_1|\alpha^2}{4}.$$

Так как

$$\frac{d|\lambda_1|^2}{d\alpha}=-SpB(1-\frac{\alpha}{2}SpB)+\frac{\alpha|D_1|}{2}, \qquad (4)$$

то, приравнивая выражение (4) к нулю, получаем равенство (3). При таком значении α

$$\rho(I-\alpha B)=\left[\frac{|D_1|}{|D_1|+(SpB)^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (5)$$

В том случае, если матрица B – произвольная матрица второго порядка с комплексными элементами, а параметр α также принимает комплексные значения, задача минимизации спектрального радиуса $\rho(I-\alpha B)$ эквивалентна задаче построения полинома вида $P(\lambda)=1-\alpha\lambda$, который, если его рассматривать на множестве $\{\lambda_1,\lambda_2\}$, имеет минимальный максимум модуля.

Теорема 3. *Полином вида*

$$P_*(\lambda)=1-\frac{\bar{\lambda}_1|\lambda_2|+\bar{\lambda}_2|\lambda_1|}{|\lambda_1||\lambda_2|(|\lambda_1|+|\lambda_2|)}\lambda,$$

рассматриваемый на множестве $\{\lambda_1,\lambda_2\}$, *имеет минимальный максимум модуля. При этом*

$$\min_{\alpha}\max_{\lambda\in\{\lambda_1,\lambda_2\}}|P_*(\lambda)|=\rho(I-\alpha B)=\frac{|\lambda_1-\lambda_2|}{|\lambda_1|+|\lambda_2|}.$$

Таким образом, в случае произвольной матрицы B с комплексными элементами, при условии, что параметр α может принимать комплексные значения, оптимальное значение α определится равенством

$$\frac{\bar{\lambda}_1|\lambda_2|+\bar{\lambda}_2|\lambda_1|}{|\lambda_1||\lambda_2|(|\lambda_1|+|\lambda_2|)},$$

где λ_1,λ_2 – собственные значения матрицы B, $\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2$ – комплексно-сопряженные числа.

Из теоремы 3 можно получить результат теоремы 1, но теорема 1 удобнее для применения, так как формулируется в терминах элементов матрицы B, а не в терминах собственных значений.

Вернемся к вопросу о нахождении таких вещественных значений параметров α,β, при которых спектральный радиус матрицы

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}\qquad(6)$$

при вещественных $b_{jk}\,(j,k=1,\ 2)$ минимален.

Пусть

$$p=\frac{b_{12}b_{21}}{b_{11}b_{22}}.$$

Теорема 4. *Если* $b_{11}b_{22}\neq 0$, *то при* $p\in(0,\,1)$ *минимизирующими спектральный радиус* ρ *матрицы (6) параметрами* $\alpha,\ \beta$ *являются*

$$\alpha=\frac{1}{b_{11}},\quad \beta=\frac{1}{b_{22}}.$$

При этом $\rho=\sqrt{p}$.

Если $p\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)$, *то*

$$\alpha=\frac{1}{b_{11}}\left(1+\sqrt{\frac{p}{p-1}}\right),\quad \beta=\frac{1}{b_{22}}\left(1-\sqrt{\frac{p}{p-1}}\right).$$

В этом случае $\rho=0$.

Доказательство. Рассмотрим характеристическое уравнение матрицы $I-AB$, где

$$A=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{vmatrix}1-\alpha b_{11}-\lambda & -\alpha b_{12}\\ -\beta b_{21} & 1-\beta b_{22}-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\lambda^2-(2-\alpha b_{11}-\beta b_{22})\lambda+(1-\alpha b_{11})(1-\beta b_{22})-\alpha\beta b_{12}b_{21}=$$

$$=\lambda^2-(2-\alpha b_{11}-\beta b_{22})\lambda+1-\alpha b_{11}-\beta b_{22}+\alpha\beta(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}),$$

то дискриминант D этого выражения имеет вид

$$D=b_{11}^2\alpha^2+b_{22}^2\beta^2+2(2b_{12}b_{21}-b_{11}b_{22})\alpha\beta.\qquad(7)$$

Выражение (7) по переменным $\alpha,\ \beta$ является квадратичной формой с матрицей

$$T=\begin{pmatrix}b_{11}^2 & 2b_{12}b_{21}-b_{11}b_{22}\\ 2b_{12}b_{21}-b_{11}b_{22} & b_{22}^2\end{pmatrix}.$$

Условие $p\in(0,1)$ обеспечивает положительную определенность формы (7). Действительно,

$$\begin{vmatrix}b_{11}^2 & 2b_{12}b_{21}-b_{11}b_{22}\\ 2b_{12}b_{21}-b_{11}b_{22} & b_{22}^2\end{vmatrix}=4b_{12}b_{21}(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}).$$

В силу условия $p\in(0,1)$ это выражение является положительным. Поясним этот факт. Если

$$b_{11}b_{22}>0\quad\text{и}\quad 0<\frac{b_{12}b_{21}}{b_{11}b_{22}}<1,$$

то $0<b_{12}b_{21}<b_{11}b_{22}$ и $b_{12}b_{21}(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})>0$. Если $b_{11}b_{22}<0$, то $b_{11}b_{22}<b_{12}b_{21}<0$ и $b_{12}b_{21}(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})>0$.

Корни характеристического уравнения матрицы $I-AB$ будут иметь вид

$$\lambda_{1,2}=\left[2-\alpha b_{11}-\beta b_{22}\pm\sqrt{(\alpha b_{11}-\beta b_{22})^2+4\alpha\beta b_{12}b_{21}}\right].$$

Обозначив

$$\begin{cases}\alpha b_{11}-\beta b_{22}=t,\\ \alpha b_{11}-\beta b_{22}=s,\end{cases}\qquad(8)$$

получаем, что

$$\alpha=\frac{s+t}{2b_{11}},\qquad \beta=\frac{s-t}{2b_{22}},$$

тогда

$$D=(\alpha b_{11}-\beta b_{22})^2+4\alpha\beta b_{12}b_{21}=t^2+4\frac{(s+t)}{2b_{11}}\cdot\frac{s-t}{2b_{22}}=$$

$$=t^2+(s^2-t^2)p=(1-p)t^2+ps^2.$$

Таким образом, корни характеристического уравнения $\lambda_1(t,s),\ \lambda_2(t,s)$ будут иметь вид

$$\lambda_1=\frac{1}{2}[2-s+\sqrt{(1-p)t^2+ps^2}],$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2}[2-s-\sqrt{(1-p)t^2+ps^2}].$$

Функции $\lambda_1(t,s),\ \lambda_2(t,s)$ при фиксированном t являются монотонно убывающими по переменной $s(p\in(0,1))$, но тогда

$$\min_s max\{|\lambda_1(t,s)|,|\lambda_2(t,s)|\}$$

достигается, если $\lambda_1 = |\lambda_1| = |\lambda_2| = -\lambda_2$. Это свойство приводит к равенству

$$2-s+\sqrt{(1-p)t^2+ps^2} = s-2+\sqrt{(1-p)t^2+ps^2}.$$

Из последнего равенства получаем, что $s=2$, но тогда $t=0$. Из системы (9) в этом случае

$$\begin{cases}\alpha b_{11}-\beta b_{22}=0,\\ \alpha b_{11}-\beta b_{22}=2,\end{cases}$$

так что

$$\alpha=\frac{1}{b_{11}},\quad \beta=\frac{1}{b_{22}}.$$

При этом

$$\rho(I-AB)=|\lambda_1|=|\lambda_2|=\sqrt{\frac{b_{12}b_{21}}{b_{11}b_{22}}}.$$

Рассмотрим далее случай, когда параметр $p\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)$. Полагая $s=2,\quad t=\sqrt{\frac{p}{p-1}}s$, получаем

$$\alpha=\frac{s+t}{2b_{11}}=\frac{1}{b_{11}}\left(1+\sqrt{\frac{p}{p-1}}\right),$$

$$\beta=\frac{s+t}{2b_{11}}=\frac{1}{b_{11}}\left(1+\sqrt{\frac{p}{p-1}}\right).$$

Очевидно, что в этом случае $\rho(I-AB)=0.$

Ситуация в вырожденных случаях отображается в таблице.

В общем случае $n\times n$ – матриц можно сформулировать необходимое и достаточное условие обращения в нуль всех коэффициентов (кроме коэффициента при λ^n) полинома

$$det\ \lambda I-(I-AB)\ .$$

Пусть полином $f(\lambda)$ имеет вид

$$f(\lambda)=\lambda^n+p_{n-1}\lambda^{n-1}+p_{n-2}\lambda^{n-2}+\dots+p_1\lambda+p_0,$$
$$g(\lambda)=f(\lambda-1).$$

Лемма 1. *Необходимым и достаточным условием обращения в нуль всех коэффициентов (кроме коэффициента при λ^n) полинома $g(\lambda)$ является условие*

$$p_{n-m}=C_n^m\quad (m=1,2,\dots,n), \tag{9}$$

где C_n^m – биномиальные коэффициенты.

Доказательство. Пусть выполняются равенства (9), тогда

$$f(\lambda)=\lambda^n+C_n^1\lambda^{n-1}+C_n^2\lambda^{n-2}+\dots+C_n^{n-1}\lambda+C_n^n=(\lambda+1)^n.$$

Но в этом случае

$$g(\lambda)=f(\lambda-1)=(\lambda-1+1)^n=\lambda^n.$$

Обратное очевидно.

В качестве полинома $f(\lambda)$ возьмем характеристический полином матрицы $-AB$, т.е. ([1])

$$f(\lambda)=\lambda^n-b_1\lambda^{n-1}+b_2\lambda^{n-2}-\dots+(-1)^n b_n,$$

где b_j – сумма всех главных миноров порядка j матрицы $-AB$. Тогда

$$det\ \lambda I-(I-AB)=det\ (\lambda-1)-(-AB)=f(\lambda-1)=g(\lambda).$$

Лемма 2. *Необходимым и достаточным условием обращения в нуль всех коэффициентов (кроме коэффициента при λ^n) полинома*

$$det\ \lambda I-(I-AB)$$

являются равенства

$$b_1=-C_n^1,\ b_2=C_n^2,\ b_3=-C_n^3,\ \dots\ ,$$
$$b_{n-1}=(-1)^{n-1}C_n^{n-1},\ b_n=(-1)^n C_n^n.$$

Таблица 2

Таблица значений $\rho(I-AB)$ в вырожденных случаях

Связь между элементами матрицы B	Оптимальные значения α,β	Значение $\rho(I-AB)$
$b_{12}b_{21}=0,\ b_{11}b_{22}\neq 0$	$\alpha=2/b_{11},\ \beta=2/b_{22}$	0
$b_{22}\neq 0,\ b_{11}=0,\ b_{12}b_{21}\neq 0$	$\alpha=-b_{22}/(2b_{12}b_{21}),\ \beta=2/b_{22}$	0
$b_{11}=0,\ b_{22}=0$	$\alpha=0,\ \beta=0$	1

Доказательство. Действительно, в этом случае

$$p_{n-1} = -b_1 = C_n^1,\ p_{n-2} = b_2 = C_n^2,\ \ldots\ ,$$
$$p_1 = (-1)^{n-1} b_{n-1} = C_n^{n-1},\ p_0 = (-1)^n b_n = C_n^n.$$

Рассмотрим несколько частных случаев. Если $-AB$ имеет вид

$$-AB=\begin{pmatrix} -a_1b_{11} & -a_1b_{12} \\ -a_2b_{21} & -a_2b_{22} \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

тогда

$$b_1 = -a_{11}b_{11} - a_2b_{22} = -2,$$
$$b_2 = det(-AB) = a_1a_2(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 1,$$

т.е. интересующая нас система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_1b_{11} + a_2b_{22} = 2, \\ a_1a_2 detB = 1. \end{cases}$$

При $n = 3$

$$-AB=\begin{pmatrix} -a_1b_{11} & -a_1b_{12} & -a_1b_{13} \\ -a_2b_{21} & -a_2b_{22} & -a_2b_{23} \\ -a_3b_{31} & -a_3b_{32} & -a_3b_{33} \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

и система уравнений относительно a_1, a_2, a_3 примет следующий вид

$$\begin{cases} a_1b_{11} + a_2b_{22} + a_3b_{33} = 3, \\ a_1a_2(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) + a_1a_3(b_{11}b_{33} - b_{31}b_{12}) + \\ + a_2a_3(b_{22}b_{33} - b_{32}b_{23}) = 3, \\ a_1a_2a_3 \det B = 1. \end{cases}$$

Заключение. Получены явные формулы для элементов матрицы *A*, минимизирующей спектральный радиус $\rho(I - AB)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М.: Наука, 1978. – С. 52.

Поступила в редакцию 03.06.2011. Принята в печать 30.06.2011
Адрес для корреспонденции: 210026, г. Витебск, ул. Коммунистическая, д. 12/23, кв. 16, e-mail: Yurii_Trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.