

О минимизации спектрального радиуса

Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко

Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Задача минимизации спектрального радиуса матрицы $I - AB$ является тривиальной при невырожденной матрице B и произвольной матрице A , т.е. в этом случае решением является значение матрицы A , равное B^{-1} . Эта задача существенно усложняется при необратимой матрице B и матрицах A специального вида. В статье получены явные формулы для элементов матрицы A , минимизирующей спектральный радиус матрицы $I - AB$ при заданной матрице B . Основным результатом статьи является теорема 1, в которой подробно рассмотрен случай матрицы A вида αI , и теорема 4, в которой рассмотрен случай диагональной матрицы A . Такой вид матрицы A обусловлен тем, что матрица αI содержит один параметр, а диагональная матрица второго порядка содержит два параметра, что представляет собой удобство при конструировании конкретных итерационных процессов.

Ключевые слова: спектральный радиус, итерационный процесс, экстремальный полином.

On the minimization of spectral radius

Y.V. Trubnikov, O.V. Pyshnenko

Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

The task to minimize spectral radius of the matrix $I - AB$ is trivial when matrix B is non born and matrix A is arbitrary, thus in this case the solution is the value of matrix A equal to B . This task is considerably more complicated at irreversable matrix B and matrices A of special type. The article produces apparent formulas for elements of matrix A which minimizes spectral radius of matrix $I - AB$ at given matrix B . The main finding of the article is theorem 1 which in detail considers the case of matrix A of αI type and theorem 4 which considers the case of diagonal matrix A . This type of matrix A is conditioned by the fact that matrix αI contains one parameter while the diagonal matrix of second order contains two parameters which is convenient while constructing definite iteration processes.

Key words: spectral radius, iteration process, extreme polynome.

Актуальным вопросом теории оптимальных итерационных процессов является вопрос минимизации спектрального радиуса матрицы $I - AB$ при заданной матрице B . Для различных классов матриц A , например, для A вида αI или диагональной матрицы A , требуется найти значения параметров, минимизирующих при различных характеристиках матрицы B , значение спектрального радиуса $\rho(I - AB)$.

Материал и методы. Объектом исследования являются характеристические полиномы матрицы $I - AB$. Применяются аналитические методы исследования минимаксной задачи.

Результаты и их обсуждение. В данной статье задача минимизации спектрального радиуса матрицы $I - \alpha B$ при заданной матрице B полностью решается для матрицы B второго порядка. Рассмотрены случаи αI , A – диагональная матрица. Заметим, что в данной задаче интерес представляют именно случаи, когда матрица B является вырожденной. В случае невырожденности матрицы B тривиальным решением задачи является $A = B^{-1}$, но и в этом случае в классе матриц вида αI или диагональных равенство $A = B^{-1}$ может не выполняться.

Итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - AF(x_n), F: \oplus^m \rightarrow \oplus^m, \delta^m \rightarrow \delta^m,$$

где $\oplus(\partial)$ – множество вещественных (комплексных) чисел, естественно считать оптимальным, если спектральный радиус матрицы

$$I - AF'(x_n),$$

где $F'(x_n)$ – матрица Якоби, является минимальным. При этом желательно, чтобы матрица A имела вид $A = \alpha I$, где α – итерационный параметр, или была диагональной.

В данном исследовании задача минимизации спектрального радиуса матрицы $I - \alpha B$ при заданной матрице B полностью решается для матриц второго порядка. Рассмотрим вопрос о нахождении таких вещественных значений параметра α , при которых спектральный радиус $\rho(I - \alpha B)$ матрицы $I - \alpha B$ является наименьшим. Пусть

$$B = \square b_{ij} \square (i, j = 1, 2), SpB = b_{11} + b_{22},$$

$$p = \sqrt{(b_{11} - b_{22})^2 + 4b_{12}b_{21}}.$$

Теорема 1. Пусть $(b_{11} - b_{22})^2 + 4b_{12}b_{21} \geq 0$.

Тогда результат минимизации спектрального радиуса $\rho(I - \alpha B)$ по α можно сформулировать следующим образом (табл. 1):

Таблица значений $\rho(I - \alpha B)$

Связь между параметрами Sp и p	Оптимальное значение α	Значение спектрального радиуса
$0 < p < SpB$	$2/SpB$	$p/SpB < 1$
$SpB < 0 < p, \quad 0 < p < Spb $	$2/SpB$	$p/ SpB < 1$
$0 < SpB < p$	0	1
$SpB < 0 < p, \quad 0 < SpB < p$	0	1
$SpB \neq 0, \quad p = 0$	$2/SpB$	0
$SpB = 0, \quad p \neq 0$	0	1
$SpB = p$	0	1

Доказательство. Найдем дискриминант D характеристического уравнения

$$\lambda^2 - (2 - \alpha b_{11} - \alpha b_{22})\lambda + 1 - \alpha b_{11} - \alpha b_{22} + \alpha^2(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 0 \quad (1)$$

матрицы $I - \alpha B$:

$$D = (2 - \alpha b_{11} - \alpha b_{22})^2 - 4[1 - \alpha b_{11} - \alpha b_{22} + \alpha^2(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})] = \alpha^2[(b_{11} - b_{22})^2 + 4b_{12}b_{21}].$$

Таким образом, если

$$(b_{11} - b_{22})^2 + 4b_{12}b_{21} \geq 0,$$

то корни $\lambda_1(\alpha)$, $\lambda_2(\alpha)$ уравнения (1) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \lambda_1(\alpha) &= \frac{1}{2}(2 - \alpha SpB + |\alpha| p), \quad \lambda_2(\alpha) = \\ &= \frac{1}{2}(2 - \alpha SpB - |\alpha| p). \end{aligned}$$

Рассмотрим, например, случай, когда $0 < p < SpB$. Так как

$$2\lambda_1(\alpha) = \begin{cases} 2 - \alpha SpB + |\alpha| p = 2 + \alpha(p - SpB), & \text{где } \alpha \geq 0, \\ 2 - \alpha SpB + |\alpha| p = 2 - \alpha(p + SpB), & \text{где } \alpha < 0; \end{cases}$$

$$2\lambda_2(\alpha) = \begin{cases} 2 - \alpha SpB - |\alpha| p = 2 - \alpha(p + SpB), & \text{где } \alpha \geq 0, \\ 2 - \alpha SpB - |\alpha| p = 2 + \alpha(p - SpB), & \text{где } \alpha < 0; \end{cases}$$

то из графиков функций

$$2|\lambda_1(\alpha)|, \quad 2|\lambda_2(\alpha)|, \quad \max\{2|\lambda_1(\alpha)|, 2|\lambda_2(\alpha)|\}$$

видно, что

$$\min_{\alpha} \max\{2|\lambda_1(\alpha)|, 2|\lambda_2(\alpha)|\}$$

достигается при $\alpha = \frac{2}{SpB}$. При этом в точке

$$\alpha = \frac{2}{SpB} \text{ получаем}$$

$$\rho(I - \alpha B) = |\lambda_1(\alpha)| = |\lambda_2(\alpha)| = \frac{\sqrt{(b_{11} - b_{22})^2 + 4b_{12}b_{21}}}{b_{11} + b_{22}}.$$

Аналогично рассматриваются и другие случаи.

Теорема 2. При выполнении неравенства

$$D_1 = (b_{11} - b_{22})^2 + 4b_{12}b_{21} < 0 \quad (2)$$

значение параметра α , минимизирующее спектральный радиус $\rho(I - \alpha B)$, определяется равенством

$$\alpha = \frac{2SpB}{|D_1| + (SpB)^2}. \quad (3)$$

Доказательство. При выполнении неравенства (2) корни характеристического уравнения (1) имеют вид

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{\alpha}{2}(SpB \mp i\sqrt{|D_1|}) = 1 - \frac{\alpha}{2}SpB \pm i\frac{\alpha\sqrt{|D_1|}}{2}.$$

Тогда

$$|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = (1 - \frac{\alpha}{2}SpB)^2 + \frac{|D_1|\alpha^2}{4}.$$

Так как

$$\frac{d|\lambda_1|^2}{d\alpha} = -SpB(1 - \frac{\alpha}{2}SpB) + \frac{\alpha|D_1|}{2}, \quad (4)$$

то, приравнявая выражение (4) к нулю, получаем равенство (3). При таком значении α

$$\rho(I - \alpha B) = \left[\frac{|D_1|}{|D_1| + (SpB)^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

В том случае, если матрица B – произвольная матрица второго порядка с комплексными элементами, а параметр α также принимает комплексные значения, задача минимизации спектрального радиуса $\rho(I - \alpha B)$ эквивалентна задаче построения полинома вида $P(\lambda) = 1 - \alpha\lambda$, который, если его рассматривать на множестве $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, имеет минимальный максимум модуля.

Теорема 3. Полином вида

$$P_*(\lambda) = 1 - \frac{\bar{\lambda}_1|\lambda_2| + \bar{\lambda}_2|\lambda_1|}{|\lambda_1||\lambda_2| + (|\lambda_1| + |\lambda_2|)}\lambda,$$

рассматриваемый на множестве $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, имеет минимальный максимум модуля. При этом

$$\min_{\alpha} \max_{\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}} |P_*(\lambda)| = \rho(I - \alpha B) = \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{|\lambda_1| + |\lambda_2|}.$$

Таким образом, в случае произвольной матрицы B с комплексными элементами, при условии, что параметр α может принимать комплексные значения, оптимальное значение α определится равенством

$$\frac{\bar{\lambda}_1 |\lambda_2| + \bar{\lambda}_2 |\lambda_1|}{|\lambda_1| |\lambda_2| (|\lambda_1| + |\lambda_2|)},$$

где λ_1, λ_2 – собственные значения матрицы B , $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ – комплексно-сопряженные числа.

Из теоремы 3 можно получить результат теоремы 1, но теорема 1 удобнее для применения, так как формулируется в терминах элементов матрицы B , а не в терминах собственных значений.

Вернемся к вопросу о нахождении таких вещественных значений параметров α, β , при которых спектральный радиус матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (6)$$

при вещественных $b_{jk} (j, k=1, 2)$ минимален.

Пусть

$$p = \frac{b_{12}b_{21}}{b_{11}b_{22}}.$$

Теорема 4. Если $b_{11}b_{22} \neq 0$, то при $p \in (0, 1)$ минимизирующими спектральный радиус ρ матрицы (6) параметрами α, β являются

$$\alpha = \frac{1}{b_{11}}, \quad \beta = \frac{1}{b_{22}}.$$

При этом $\rho = \sqrt{p}$.

Если $p \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, то

$$\alpha = \frac{1}{b_{11}} \left(1 + \sqrt{\frac{p}{p-1}} \right), \quad \beta = \frac{1}{b_{22}} \left(1 - \sqrt{\frac{p}{p-1}} \right).$$

В этом случае $\rho = 0$.

Доказательство. Рассмотрим характеристическое уравнение матрицы $I - AB$, где

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{vmatrix} 1 - \alpha b_{11} - \lambda & -\alpha b_{12} \\ -\beta b_{21} & 1 - \beta b_{22} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 - (2 - \alpha b_{11} - \beta b_{22})\lambda + (1 - \alpha b_{11})(1 - \beta b_{22}) - \alpha \beta b_{12} b_{21} =$$

$$= \lambda^2 - (2 - \alpha b_{11} - \beta b_{22})\lambda + 1 - \alpha b_{11} - \beta b_{22} + \alpha \beta (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}),$$

то дискриминант D этого выражения имеет вид

$$D = b_{11}^2 \alpha^2 + b_{22}^2 \beta^2 + 2(2b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22})\alpha\beta. \quad (7)$$

Выражение (7) по переменным α, β является квадратичной формой с матрицей

$$T = \begin{pmatrix} b_{11}^2 & 2b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22} \\ 2b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22} & b_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Условие $p \in (0, 1)$ обеспечивает положительную определенность формы (7). Действительно,

$$\begin{vmatrix} b_{11}^2 & 2b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22} \\ 2b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22} & b_{22}^2 \end{vmatrix} = 4b_{12}b_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}).$$

В силу условия $p \in (0, 1)$ это выражение является положительным. Поясним этот факт. Если

$$b_{11}b_{22} > 0 \quad \text{и} \quad 0 < \frac{b_{12}b_{21}}{b_{11}b_{22}} < 1,$$

то $0 < b_{12}b_{21} < b_{11}b_{22}$ и $b_{12}b_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) > 0$.

Если $b_{11}b_{22} < 0$, то $b_{11}b_{22} < b_{12}b_{21} < 0$ и $b_{12}b_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) > 0$.

Корни характеристического уравнения матрицы $I - AB$ будут иметь вид

$$\lambda_{1,2} = \left[2 - \alpha b_{11} - \beta b_{22} \pm \sqrt{(\alpha b_{11} - \beta b_{22})^2 + 4\alpha\beta b_{12}b_{21}} \right].$$

Обозначив

$$\begin{cases} \alpha b_{11} - \beta b_{22} = t, \\ \alpha b_{11} - \beta b_{22} = s, \end{cases} \quad (8)$$

получаем, что

$$\alpha = \frac{s+t}{2b_{11}}, \quad \beta = \frac{s-t}{2b_{22}},$$

тогда

$$D = (\alpha b_{11} - \beta b_{22})^2 + 4\alpha\beta b_{12}b_{21} = t^2 + 4 \frac{(s+t)}{2b_{11}} \cdot \frac{s-t}{2b_{22}} =$$

$$= t^2 + (s^2 - t^2)p = (1-p)t^2 + ps^2.$$

Таким образом, корни характеристического уравнения $\lambda_1(t, s), \lambda_2(t, s)$ будут иметь вид

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} [2 - s + \sqrt{(1-p)t^2 + ps^2}],$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} [2 - s - \sqrt{(1-p)t^2 + ps^2}].$$

Функции $\lambda_1(t, s)$, $\lambda_2(t, s)$ при фиксированном t являются монотонно убывающими по переменной $s (p \in (0,1))$, но тогда

$$\min_s \max\{|\lambda_1(t, s)|, |\lambda_2(t, s)|\}$$

достигается, если $|\lambda_1| = |\lambda_2| = -\lambda_2$. Это свойство приводит к равенству

$$2 - s + \sqrt{(1-p)t^2 + ps^2} = s - 2 + \sqrt{(1-p)t^2 + ps^2}.$$

Из последнего равенства получаем, что $s = 2$, но тогда $t = 0$. Из системы (9) в этом случае

$$\begin{cases} \alpha b_{11} - \beta b_{22} = 0, \\ \alpha b_{11} - \beta b_{22} = 2, \end{cases}$$

так что

$$\alpha = \frac{1}{b_{11}}, \quad \beta = \frac{1}{b_{22}}.$$

При этом

$$\rho(I-AB) = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\frac{b_{12}b_{21}}{b_{11}b_{22}}}.$$

Рассмотрим далее случай, когда параметр

$$p \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty). \text{ Полагая } s = 2, \quad t = \sqrt{\frac{p}{p-1}}s,$$

получаем

$$\alpha = \frac{s+t}{2b_{11}} = \frac{1}{b_{11}} \left(1 + \sqrt{\frac{p}{p-1}} \right),$$

$$\beta = \frac{s+t}{2b_{11}} = \frac{1}{b_{11}} \left(1 + \sqrt{\frac{p}{p-1}} \right).$$

Очевидно, что в этом случае $\rho(I-AB) = 0$.

Ситуация в вырожденных случаях отображается в таблице.

В общем случае $n \times n$ - матриц можно сформулировать необходимое и достаточное

условие обращения в нуль всех коэффициентов (кроме коэффициента при λ^n) полинома

$$\det \lambda I - (I - AB).$$

Пусть полином $f(\lambda)$ имеет вид

$$f(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + p_1\lambda + p_0,$$

$$g(\lambda) = f(\lambda - 1).$$

Лемма 1. *Необходимым и достаточным условием обращения в нуль всех коэффициентов (кроме коэффициента при λ^n) полинома $g(\lambda)$ является условие*

$$p_{n-m} = C_n^m \quad (m = 1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

где C_n^m - биномиальные коэффициенты.

Доказательство. Пусть выполняются равенства (9), тогда

$$f(\lambda) = \lambda^n + C_n^1\lambda^{n-1} + C_n^2\lambda^{n-2} + \dots + C_n^{n-1}\lambda + C_n^n = (\lambda + 1)^n.$$

Но в этом случае

$$g(\lambda) = f(\lambda - 1) = (\lambda - 1 + 1)^n = \lambda^n.$$

Обратное очевидно.

В качестве полинома $f(\lambda)$ возьмем характеристический полином матрицы $-AB$, т.е. (11)

$$f(\lambda) = \lambda^n - b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n b_n,$$

где b_j - сумма всех главных миноров порядка j матрицы $-AB$. Тогда

$$\det \lambda I - (I - AB) = \det (\lambda - 1) - (-AB) = f(\lambda - 1) = g(\lambda).$$

Лемма 2. *Необходимым и достаточным условием обращения в нуль всех коэффициентов (кроме коэффициента при λ^n) полинома*

$$\det \lambda I - (I - AB)$$

являются равенства

$$b_1 = -C_n^1, \quad b_2 = C_n^2, \quad b_3 = -C_n^3, \quad \dots,$$

$$b_{n-1} = (-1)^{n-1} C_n^{n-1}, \quad b_n = (-1)^n C_n^n.$$

Таблица 2

Таблица значений $\rho(I-AB)$ в вырожденных случаях

Связь между элементами матрицы B	Оптимальные значения α, β	Значение $\rho(I-AB)$
$b_{12}b_{21} = 0, \quad b_{11}b_{22} \neq 0$	$\alpha = 2/b_{11}, \quad \beta = 2/b_{22}$	0
$b_{22} \neq 0, \quad b_{11} = 0, \quad b_{12}b_{21} \neq 0$	$\alpha = -b_{22}/(2b_{12}b_{21}), \quad \beta = 2/b_{22}$	0
$b_{11} = 0, \quad b_{22} = 0$	$\alpha = 0, \quad \beta = 0$	1

Доказательство. Действительно, в этом случае

$$p_{n-1} = -b_1 = C_n^1, p_{n-2} = b_2 = C_n^2, \dots, \\ p_1 = (-1)^{n-1} b_{n-1} = C_n^{n-1}, p_0 = (-1)^n b_n = C_n^n.$$

Рассмотрим несколько частных случаев. Если $-AB$ имеет вид

$$-AB = \begin{pmatrix} -a_1 b_{11} & -a_1 b_{12} \\ -a_2 b_{21} & -a_2 b_{22} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

тогда

$$b_1 = -a_1 b_{11} - a_2 b_{22} = -2, \\ b_2 = \det(-AB) = a_1 a_2 (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}) = 1,$$

т.е. интересующая нас система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_1 b_{11} + a_2 b_{22} = 2, \\ a_1 a_2 \det B = 1. \end{cases}$$

При $n = 3$

$$-AB = \begin{pmatrix} -a_1 b_{11} & -a_1 b_{12} & -a_1 b_{13} \\ -a_2 b_{21} & -a_2 b_{22} & -a_2 b_{23} \\ -a_3 b_{31} & -a_3 b_{32} & -a_3 b_{33} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

и система уравнений относительно a_1, a_2, a_3 примет следующий вид

$$\begin{cases} a_1 b_{11} + a_2 b_{22} + a_3 b_{33} = 3, \\ a_1 a_2 (b_{11} b_{22} - b_{21} b_{12}) + a_1 a_3 (b_{11} b_{33} - b_{31} b_{12}) + \\ + a_2 a_3 (b_{22} b_{33} - b_{32} b_{23}) = 3, \\ a_1 a_2 a_3 \det B = 1. \end{cases}$$

Заключение. Получены явные формулы для элементов матрицы A , минимизирующей спектральный радиус $\rho(I - AB)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М.: Наука, 1978. – С. 52.

Поступила в редакцию 03.06.2011. Принята в печать 30.06.2011
 Адрес для корреспонденции: 210026, г. Витебск, ул. Коммунистическая, д. 12/23, кв. 16,
 e-mail: Yurii_Trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.