

Существование решения задачи Коши для псевдопараболического уравнения

Т.В. Кавитова

Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

В работе рассматривается полулинейное псевдопараболическое уравнение следующего вида: $u_t = \Delta u_t + \Delta \varphi(u) + h(t, u)$, где функции φ и h удовлетворяют условиям довольно общего вида. В некотором цилиндре конечной высоты τ с ограниченной областью из пространства $\oplus^n$ в основании доказывается существование неотрицательного классического решения начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с неотрицательными ограниченными граничными и начальными данными. Устанавливается теорема существования в слое $\oplus^n \times [0, T]$, $(T < T_0)$ неотрицательного классического решения задачи Коши для псевдопараболического уравнения с начальными данными $u_0(x)$, для которых справедливы соотношения: $0 \leq u_0(x) \leq M (M \geq 0)$. Здесь T_0 – время существования максимального неотрицательного решения задачи Коши для соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения $v'(t) = h(t, v)$ с начальными данными $v(0) = M$.

Ключевые слова: теорема существования, псевдопараболическое уравнение, начально-краевая задача, задача Коши.

The existence of the solution of the Cauchy problem for some pseudoparabolic equation

T.V. Kavtova

Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masharov»

We consider a semilinear pseudoparabolic equation $u_t = \Delta u_t + \Delta \varphi(u) + h(t, u)$, where the functions φ and h satisfy the conditions of a fairly general type. We show that in a certain cylinder of finite height τ with a limited region of space $\oplus^n$ at the base there exists a nonnegative solution of initial-boundary problem for pseudoparabolic equation with nonnegative bounded boundary condition and initial data. We prove the theorem of existence in layer $\oplus^n \times [0, T]$, $(T < T_0)$ of nonnegative classical solution of the Cauchy problem for pseudoparabolic equation with initial data which satisfy the relations: $0 \leq u_0(x) \leq M (M \geq 0)$. Here T_0 is the lifetime of the maximal nonnegative solution of the Cauchy problem for the corresponding ordinary differential equation with initial data $v(0) = M$.

Key words: theorem of existence, pseudoparabolic equation, initial-boundary problem, the Cauchy problem.

1. Введение. Целью данной работы является исследование вопросов существования решений первой начально-краевой задачи и задачи Коши для псевдопараболического уравнения

$$u_t = \Delta u_t + \Delta \varphi(u) + h(t, u), \quad (1)$$

возникающего в теории движения грунтовых вод при учете зависимости потенциала скорости от глубины.

Пусть $R_+ = [0, +\infty)$, $\Pi_T = \oplus^n \times [0, T]$. Предположим, что выполнены следующие условия:

$\varphi(p)$ определена при $p \in R_+$, $h(t, p)$ – при $(t, p) \in R_+ \times R_+$,

$$\varphi(p) \in C^2(R_+), \quad h(t, p) \in C(R_+ \times R_+),$$

$$h(t, 0) = 0, \quad t \in R_+,$$

$h(t, p)$ локально непрерывна по Гёльдеру по переменной p в R_+ с показателем α ($0 < \alpha < 1$)

для любого $t \in R_+$,

$\varphi(p) + h(t, p)$ не убывает по $p \in R_+$ для любого $t \in R_+$. (2)

Для уравнения (1) изучается задача Коши с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \oplus^n, \quad (3)$$

где

$$u_0(x) \in C^2(\oplus^n), \quad 0 \leq u_0(x) \leq M (M \geq 0), \quad x \in \oplus^n. \quad (4)$$

Определение 1.1. Решением задачи (1), (3) в Π_T назовем функцию $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\Pi_T)$, удовлетворяющую уравнению (1) в Π_T и начальному условию (3).

Пусть Q – ограниченная область в пространстве $\oplus^n$, $\oplus^n$ – достаточно гладкая поверхность, для которой справедлива формула Грина. Обозначим $Q_T = Q \times (0, T)$, $\tilde{Q}_T = Q \times [0, T]$,

$$S_T = \partial Q \times [0, T].$$

В пункте 2 покажем существование решения первой начально-краевой задачи для уравнения (1) в Q_T с граничным условием

$$u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in S_T, \quad (5)$$

и начальными данными

$$u(x, 0) = f_0(x), \quad x \in Q, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} f(x, t) &\in C_{x,t}^{0,1}(S_T), \quad f_0(x) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q}), \\ f(x, 0) &= f_0(x), \quad x \in \partial Q, \quad 0 \leq f_0(x) \leq M_1, \quad x \in \bar{Q}, \quad (7) \\ f_t(x, t) + \varphi(f(x, t)) - \varphi(0) &\geq 0, \quad (x, t) \in S_T. \end{aligned}$$

Определение 1.2. Решением задачи (1), (5), (6) в Q_T назовем функцию $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\tilde{Q}_T) \cap C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\tilde{Q}_T$ и условиям (5), (6).

В пункте 3 докажем существование решения задачи (1), (3) в Π_T .

В работах [1]–[2] рассматривалась задача (1), (3) с $h(t, u) = 0$ и неотрицательной начальной функцией, неограниченно возрастающей на бесконечности. При выполнении следующих условий на функцию $\varphi(p)$:

$$\begin{aligned} \varphi(p) &\in C^2(R_+), \quad \varphi(0) = 0, \quad \alpha_1 p^m \leq \varphi'(p) \leq \alpha_2 p^m, \\ 0 &\leq \varphi''(p) \leq \alpha_3 p^{m-1}, \quad \varphi(p) \leq \alpha_4 p \varphi'(p), \\ \alpha_i &> 0, \quad i = \overline{1, 4}, \quad m \geq 1, \end{aligned}$$

в [1] доказан ряд теорем о разрешимости задачи (1), (3). В работе [2] в случае, когда функция $\varphi(p)$ удовлетворяет следующим требованиям:

$$\begin{aligned} \varphi(p) &\in C^1(R_+), \quad \varphi'(p) \geq 0, \\ \varphi'(p) &\text{ монотонно не убывает,} \\ \text{установлена единственность решения задачи} \\ \text{Коши (1), (3) в классе неотрицательных функ-} \\ \text{ций } u(x, t) &\in C_{x,t}^{2,1}(\Pi_T), \text{ для которых выполняются} \\ \text{соотношения:} \\ \varphi'(u(x, t)) &\leq M_1(1 + |x|^2), \quad |u_t(x, t)| \leq M_2(1 + |x|^2)^\beta, \\ M_i &> 0, \quad i = \overline{1, 2}, \quad \beta > 0. \end{aligned}$$

2. Теорема существования решения начально-краевой задачи. Рассмотрим уравнение вида

$$u_t = \Phi(x, t, u) + F(u(\cdot, t)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (8)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in Q, \quad (9)$$

где функция $\Phi(x, t, \xi)$, заданная на множестве $\bar{Q} \times [0, T] \times R$, непрерывна по совокупности ар-

гументов, $F(u(\cdot, t))$ – нелинейный интегральный оператор.

Определение 2.1. Решением задачи (8), (9) в Q_T назовем функцию $u(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющую уравнению (8) в Q_T и начальному условию (9).

Определение 2.2. Функции $\sigma^+(x, t)$ и $\sigma^-(x, t)$, принадлежащие $C_{x,t}^{0,1}(Q_T)$ и удовлетворяющие соотношениям

$$-\infty < m_T \leq \sigma^-(x, t) \leq \sigma^+(x, t) \leq M_T < +\infty, \quad (x, t) \in Q_T,$$

где m_T, M_T – постоянные, зависящие от T , назовем соответственно верхним и нижним решениями задачи (8), (9) в Q_T , если выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \sigma_t^+ &\geq \Phi(x, t, \sigma^+) + F(\sigma^+(\cdot, t)), \quad (x, t) \in Q_T, \\ \sigma^+(x, 0) &\geq u_0(x), \quad x \in \bar{Q}, \\ \sigma_t^- &\leq \Phi(x, t, \sigma^-) + F(\sigma^-(\cdot, t)), \quad (x, t) \in Q_T, \\ \sigma^-(x, 0) &\leq u_0(x), \quad x \in \bar{Q}. \end{aligned}$$

Введем множество

$$O(\sigma^-, \sigma^+) = \{u \in C(\bar{Q}_T) \mid \sigma^- \leq u \leq \sigma^+, \quad (x, t) \in Q_T\}.$$

Относительно данных задачи (8), (9) сделаем следующие предположения:

1. Пусть в Q_T существуют верхнее $\sigma^+(x, t)$ и нижнее $\sigma^-(x, t)$ решения задачи (8), (9).

2. Функция $\Phi(x, t, \xi)$ непрерывна на множестве $\bar{Q} \times [0, T] \times R$ и имеет на этом множестве непрерывную производную $\Phi_\xi(x, t, \xi)$.

3. Оператор $F(u(\cdot, t))$ из $C(\bar{Q}_T)$ в $C(\bar{Q}_T)$ вполне непрерывен на множестве $O(\sigma^-, \sigma^+)$ и является монотонным на $O(\sigma^-, \sigma^+)$, т.е. из того, что $u_1, u_2 \in O(\sigma^-, \sigma^+)$, $u_1 \leq u_2$ при $(x, t) \in Q_T$, следует неравенство $F(u_1(\cdot, t)) \leq F(u_2(\cdot, t))$.

$$4. u_0(x) \in C(\bar{Q}). \quad (10)$$

В [3] доказано следующее утверждение.

Теорема 2.3. Если выполнены условия (10), то в Q_T существует решение задачи (8), (9), удовлетворяющее неравенству

$$\sigma^-(x, t) \leq u(x, t) \leq \sigma^+(x, t), \quad (x, t) \in Q_T.$$

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} g'(t) = h(t, g) + M_2, & t > 0, \\ g(0) = M_1, \end{cases} \quad (11)$$

где $M_2 = \max_{(x,t) \in \tilde{S}_T} (f_t(x, t) + \varphi(f(x, t)) - \varphi(0))$.

Замечание 2.4. Отметим, что решение задачи (11) может быть неединственным. Так,

задача (11) с $h(t, g) = g^\beta$ ($0 < \beta < 1$) и $M_i \equiv 0$, $i = 1, 2$, имеет решения $g_1(t) \equiv 0$ и

$$g_2(t) = (1 - \beta)^{\frac{1}{1-\beta}} t^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Определение 2.5. Неотрицательное решение $w(t)$ задачи (11), определенное для значений $0 \leq t < T$, назовем максимальным на $[0, T)$, если для любого другого неотрицательного решения $f(t)$ задачи (11) выполняется неравенство $f(t) \leq w(t)$ при $0 \leq t < T$.

Предполагается существование максимального решения $g(t)$ задачи (11) на промежутке $[0, T_1)$, где T_1 может равняться $+\infty$.

Обозначим через $G_n(x, t)$ функцию Грина первой краевой задачи для оператора $L = I - \Delta$, определенного в области Q , с нулевыми условиями на ∂Q . Тогда

$$G_n(x, \xi) = E_n(x - \xi) + g_n(x, \xi), \quad (x, \xi) \in Q \times Q, \quad (12)$$

где $E_n(x - \xi)$ – фундаментальное решение оператора L во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, функция $g_n(x, \xi) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$ при любом фиксированном $\xi \in Q$ удовлетворяет уравнению

$$L_x g_n = 0, \quad x \in Q,$$

и граничному условию

$$g_n(x, \xi)|_{x \in \partial Q} = -E_n(x - \xi)|_{x \in \partial Q}. \quad (13)$$

Как известно, $E_n(x) = c_n |x|^{\frac{2-n}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(|x|)$,

$n = 1, 2, \dots$, где $K_\mu(|x|)$ – функция Макдональда μ -го порядка, c_n – нормирующий множитель, который определяется из условия $\int_{\mathbb{R}^n} E_n(x) dx = 1$. Как отмечалось в [1], в силу свойств функции Макдональда, $E_n(x)$ вместе со всеми своими частными производными любого порядка экспоненциально убывает при $|x| \rightarrow \infty$.

Отметим некоторые свойства функций Макдональда и Грина (см. [2]), используемые в дальнейших рассуждениях:

$$K_{-\mu}(|x|) = K_\mu(|x|), \quad K_{\mu-1}(|x|) + K_{\mu+1}(|x|) = -2K'_\mu(|x|),$$

$$K_0(|x|) = \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) + O(1) \text{ при } |x| \rightarrow 0,$$

$$K_{\frac{\mu}{2}}(|x|) = \frac{\alpha_\mu}{|x|^{\frac{\mu}{2}}} (1 + o(1)) \text{ при } |x| \rightarrow 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

$$\int_Q G_n(x, \xi) d\xi = 1 + \int_{\partial Q} \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} dS_\xi, \quad x \in Q,$$

$$\frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} \leq 0, \quad \xi \in \partial Q, \quad x \in Q, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \int_Q G_n(x, \xi) \Delta v(x, \xi) d\xi &= \int_Q G_n(x, \xi) v(x, \xi) d\xi - \\ &- \int_{\partial Q} v(x, \xi) \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} dS_\xi - v(x), \quad x \in Q, \end{aligned} \quad (16)$$

где α_μ – некоторые положительные константы, ν_ξ – внешняя нормаль к ∂Q в переменных ξ , $v(x) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$, причем $\Delta v \in L_2(Q)$.

Рассмотрим в Q_T интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} u_t + \varphi(u) &= \int_Q G_n(x, \xi) [\varphi(u(\xi, t)) + h(t, u(\xi, t))] d\xi - \\ &- \int_{\partial Q} [f_t(\xi, t) + \varphi(f(\xi, t))] \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} dS_\xi \end{aligned} \quad (17)$$

с начальным условием (6).

Определение 2.6. Решением задачи (17), (6) в Q_T назовем функцию $u(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющую уравнению (17) в Q_T и начальному условию (6).

Справедливо утверждение.

Лемма 2.7. Пусть выполнены условия (2), (7). Тогда для любого $\tau < \min(T, T_1)$ в Q_τ существует решение задачи (17), (6), удовлетворяющее неравенству

$$0 \leq u(x, t) \leq g(t), \quad (x, t) \in Q_\tau. \quad (18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем выполнение условий теоремы 2.3. Для удобства введем обозначения

$$\begin{aligned} \Phi(x, t, u) &= -\varphi(u(x, t)) - \\ &- \int_{\partial Q} [f_t(\xi, t) + \varphi(f(\xi, t))] \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} dS_\xi, \\ F(u(\cdot, t)) &= \int_Q G_n(x, \xi) [\varphi(u(\xi, t)) + h(t, u(\xi, t))] d\xi. \end{aligned}$$

Функции $\sigma^-(x, t) \equiv 0$ и $\sigma^+(x, t) = g(t)$ являются соответственно нижним и верхним решениями задачи (17), (6). Действительно, принимая во внимание (7) и (15), получаем

$$\begin{aligned} \Phi(x, t, 0) + F(0) &= -\varphi(0) - \\ &- \int_{\partial Q} [f_t(\xi, t) + \varphi(f(\xi, t))] \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} dS_\xi + \\ &+ \varphi(0) \left(1 + \int_{\partial Q} \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} dS_\xi \right) = \end{aligned}$$

$$= - \int_{\partial Q} [f_t(\xi, t) + \varphi(f(\xi, t)) - \varphi(0)] \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial v_\xi} dS_\xi \geq 0 =$$

$$= \sigma_t^-(x, t), \quad (x, t) \in Q_\tau, \quad \sigma^-(x, 0) = 0 \leq f_0(x), \quad x \in \bar{Q},$$

$$\Phi(x, t, g(t)) + F(g(t)) = -\varphi(g(t)) -$$

$$- \int_{\partial Q} [f_t(\xi, t) + \varphi(f(\xi, t))] \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial v_\xi} dS_\xi +$$

$$+ [\varphi(g(t)) + h(t, g(t))] \left(1 + \int_{\partial Q} \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial v_\xi} dS_\xi \right) = h(t, g(t)) -$$

$$- \int_{\partial Q} [f_t(\xi, t) + \varphi(f(\xi, t)) - \varphi(0)] \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial v_\xi} dS_\xi +$$

$$+ \int_{\partial Q} [\varphi(g(t)) + h(t, g(t)) - \varphi(0) - h(t, 0)] \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial v_\xi} dS_\xi \leq$$

$$\leq h(t, g(t)) + M_2 = g'(t) = \sigma_t^+(x, t), \quad (x, t) \in Q_\tau,$$

$$\sigma^+(x, 0) = g(0) = M_1 \geq f_0(x), \quad x \in \bar{Q}.$$

Вследствие (2) выполнено условие 2 из (10), а также очевидна монотонность оператора F . Покажем, что оператор F является вполне непрерывным на множестве $O(\sigma^-, \sigma^+)$. Пусть

$$u \in O(\sigma^-, \sigma^+), \text{ тогда}$$

$$|F(u(\cdot, t))| \leq \max_{\substack{0 \leq u(x, t) \leq g(t), \\ (x, t) \in Q_\tau}} |\varphi(u(x, t)) + h(t, u(x, t))| \times$$

$$\times \int_Q G_n(x, \xi) d\xi \leq \max_{\substack{0 \leq u(x, t) \leq g(t), \\ (x, t) \in Q_\tau}} |\varphi(u(x, t)) + h(t, u(x, t))|$$

Следовательно, множество значений оператора F равномерно ограничено. Покажем, что это множество равномерно непрерывно. Пусть $x, y \in Q$ и $u \in O(\sigma^-, \sigma^+)$, тогда

$$|F(u(x, t)) - F(u(y, t))| \leq \max_{\substack{0 \leq u(x, t) \leq g(t), \\ (x, t) \in Q_\tau}} |\varphi(u(x, t)) + h(t, u(x, t))| \times$$

$$\times \int_Q |G_n(x, \xi) - G_n(y, \xi)| d\xi,$$

из которого вытекает равномерная непрерывность оператора F . Так как $f_0(x) \in C(\bar{Q})$, то в силу теоремы 2.3 существует решение $u(x, t)$ задачи (17), (6) в Q_τ , для которого справедливо неравенство (18). Лемма 2.7 доказана.

Лемма 2.8. Пусть выполнены условия (2), (7). Тогда для любого $\tau < \min(T, T_1)$ в Q_τ существует решение задачи (1), (5), (6).

Доказательство. Покажем, что решение задачи (17), (6) является решением задачи (1), (5), (6). Зафиксируем произвольную точку $x \in Q$ и придадим i -ой координате этой точки

приращение Δx_i . Из (17) получим $u_{it} + r_i u_i = z_i$, $i = 1, \dots, n$, откуда

$$u_i = \exp\left\{-\int_0^t r_i(x, \tau) d\tau\right\} \left(f_{0i} + \int_0^t z_i \exp\left\{\int_0^{\tau_2} r_i(x, \tau_1) d\tau_1\right\} d\tau_2 \right). \quad (19)$$

Здесь $u_i = \frac{1}{\Delta x_i} (u(x + \Delta_i x, t) - u(x, t))$, $\Delta_i x = (0, \dots, 0, \Delta x_i, 0, \dots, 0)$, где Δx_i стоит на i -ом месте, $f_{0i} = u_i|_{t=0}$,

$$r_i(x, t) = \int_0^1 \varphi'(\Theta u(x + \Delta_i x, t) + (1 - \Theta)u(x, t)) d\Theta,$$

$$z_i(x, t) = \frac{1}{\Delta x_i} (z(x + \Delta_i x, t) - z(x, t)), \text{ где } z(x, t) -$$

правая часть уравнения (17).

Если $u \in C(\bar{Q}_\tau)$, то из рассуждений, приведенных в [4, с. 395], следует, что

$$J_1(x, t) = \int_Q G_n(x, \xi) [\varphi(u(\xi, t)) + h(t, u(\xi, t))] d\xi \in$$

$$\in C_{x, t}^{1,0}(\tilde{Q}_\tau) \cap C(\bar{Q}_\tau),$$

$$J_2(x, t) = \int_{\partial Q} [f_t(\xi, t) + \varphi(f(\xi, t))] \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial v_\xi} dS_\xi \in$$

$$\in C_{x, t}^{2,0}(\tilde{Q}_\tau) \cap C(\bar{Q}_\tau).$$

Отсюда, используя (17), получаем, что $u \in C_{x, t}^{0,1}(\bar{Q}_\tau)$. Переходя к пределу в (19) при $\Delta x_i \rightarrow 0$, имеем

$$u_{x_i} = \exp\left\{-\int_0^t \varphi'(u(x, \tau)) d\tau\right\} \times$$

$$\times \left(f_{0x_i} + \int_0^t z_{x_i} \exp\left\{\int_0^{\tau_2} \varphi'(u(x, \tau_1)) d\tau_1\right\} d\tau_2 \right). \quad (20)$$

Отсюда $u \in C_{x, t}^{1,0}(\tilde{Q}_\tau) \cap C_{x, t}^{0,1}(\bar{Q}_\tau)$. В силу свойств функции Макдональда (14), аналогично тому, как это сделано в [5, с. 60], можно показать, что $z(x, t) \in C_{x, t}^{2,0}(\tilde{Q}_\tau) \cap C(\bar{Q}_\tau)$. Следовательно, $u(x, t) \in C_{x, t}^{2,1}(\tilde{Q}_\tau) \cap C_{x, t}^{0,1}(\bar{Q}_\tau)$. Учитывая, что $\Delta J_1 = -\varphi(u) - h(t, u) + J_1$ и $\Delta J_2 = J_2$, получаем

$$\Delta(u_t + \varphi(u)) = \Delta \int_Q G_n(x, \xi) [\varphi(u(\xi, t)) + h(t, u(\xi, t))] d\xi -$$

$$- \Delta \int_{\partial Q} [f_t(\xi, t) + \varphi(f(\xi, t))] \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial v_\xi} dS_\xi =$$

$$= -\varphi(u) - h(t, u) + \int_Q G_n(x, \xi) [\varphi(u(\xi, t)) + h(t, u(\xi, t))] d\xi - \\ - \int_{\partial Q} [f_t(\xi, t) + \varphi(f(\xi, t))] \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} dS_\xi = \\ = u_t - h(t, u).$$

Покажем справедливость (5). Так как $f(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(S_\tau)$, то существует функция $F(x, t) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$ при любом $t \in [0, \tau]$ такая, что $F(x, t) = f_t(x, t) + \varphi(f(x, t))$, $(x, t) \in S_\tau$. Из (16) и (17) следует, что $u_t + \varphi(u) = f_t + \varphi(f)$, $x \in \partial Q$, $t \in [0, \tau]$. Отсюда $(u - f)_t + (u - f) \int_0^1 \varphi'(\theta u + (1 - \theta)f) d\theta = 0$ при $x \in \partial Q$, $t \in [0, \tau]$. Интегрируя последнее равенство, имеем

$$u - f = (u - f)|_{t=0} \times \\ \times \exp\left\{-\int_0^t \int_0^1 \varphi'(\theta u(x, \tau) + (1 - \theta)f(x, \tau)) d\theta d\tau\right\}.$$

В силу (6) и (7) получаем (5). Лемма 2.8 доказана.

Замечание 2.9. Положим $f(x, t) \equiv 0$, $(x, t) \in S_\tau$, и $M_1 = M$ в условиях (5) и (7) соответственно. Пусть $v(t)$ – максимальное на $[0, T_0)$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} v'(t) = h(t, v), & t > 0, \\ v(0) = M. \end{cases} \quad (21)$$

Тогда, как видно из доказательств лемм 2.7 и 2.8, для любого $T < T_0$ в Q_T существует решение задачи (1), (5), (6), для которого справедливо неравенство

$$0 \leq u(x, t) \leq v(t), \quad (x, t) \in Q_T.$$

3. Существование решения задачи Коши в слое.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (2), (4). Тогда для любого $T < T_0$ в P_T существует неотрицательное решение задачи (1), (3).

Доказательство. Пусть $G_n(x, \xi, l)$ – функция Грина первой краевой задачи для оператора $L = I - \Delta$ в области $Q_l = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < l\}$, $l > 0$. Рассмотрим последовательность функций $u_l(x, t)$ ($l = 1, 2, \dots$), удовлетворяющих в областях $Q_{l,T} = Q_l \times (0, T)$ уравнению (1), граничному условию

$$u_l(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_{l,T} = \partial Q_l \times [0, T], \quad (22)$$

и начальным данным

$$u_l(x, 0) = u_0(x) \left(1 - \left(\frac{|x|}{l}\right)^2\right), \quad x \in Q_l. \quad (23)$$

Согласно пункту 2 в области $Q_{l,T}$ существует решение $u_l(x, t)$ задачи (1), (22), (23), удовлетворяющее интегро-дифференциальному уравнению

$$u_{lt}(x, t) + \varphi(u_l(x, t)) = \\ = \int_{Q_l} G_n(x, \xi, l) [\varphi(u_l(\xi, t)) + h(t, u_l(\xi, t))] d\xi - \\ - \varphi(0) \int_{\partial Q_l} \frac{\partial G_n(x, \xi, l)}{\partial \nu_\xi} dS_\xi \quad (24)$$

и неравенству

$$0 \leq u_l(x, t) \leq v(t), \quad (x, t) \in Q_{l,T} \quad (T < T_0), \quad (25)$$

где $v(t)$ – максимальное на $[0, T_0)$ решение задачи (21).

Из (17), (20) и (25) следует равномерная относительно l ограниченность по абсолютной величине функций u_l , u_{lt} и u_{lxi} ($i = 1, \dots, n$) на всяком множестве $\bar{Q}_{m,T}$, где m – произвольное фиксированное натуральное число, $m < l$. Согласно теореме Арцела–Асколи, последовательность $u_l(x, t)$ ($l = 1, 2, \dots$) компактна в $C(\bar{Q}_{m,T})$. Диагональным процессом выделим из $\{u_l(x, t)\}$ такую подпоследовательность $\{u_k(x, t)\}$, что для любого множества $\bar{Q}_{m,T}$ ($m = 1, 2, \dots$) выполняется следующее соотношение:

$$u_k(x, t) \rightarrow u(x, t) \text{ равномерно в } \bar{Q}_{m,T}. \quad (26)$$

Не уменьшая общности можно считать, что соотношение (26) выполнено для последовательности $\{u_l(x, t)\}$. В силу признака Дини последовательность $\{u_l(x, 0)\}$ сходится равномерно к $u_0(x)$ в $\bar{Q}_{m,T}$. Проинтегрировав (24) по переменной t , получим

$$u_l(x, t) = u_0(x) \left(1 - \left(\frac{|x|}{l}\right)^2\right) - \int_0^t \varphi(u_l(x, \tau)) d\tau + \\ + \int_0^t \int_{Q_l} G_n(x, \xi, l) [\varphi(u_l(\xi, \tau)) + h(\tau, u_l(\xi, \tau))] d\xi d\tau - \\ - t\varphi(0) \int_{\partial Q_l} \frac{\partial G_n(x, \xi, l)}{\partial \nu_\xi} dS_\xi. \quad (27)$$

Пусть (x, t) – произвольная точка слоя Π_T , m такое, что $(x, t) \in \bar{Q}_{m,T}$, $m < l$. В силу соотношений (15), (25), (26) справедливо равенство

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{Q_l} G_n(x, \xi, l) [\varphi(u_l(\xi, \tau)) + h(\tau, u_l(\xi, \tau))] d\xi d\tau = \int_0^t \int_{\oplus^n} E_h(x - \xi) [\varphi(u(\xi, \tau)) + h(\tau, u(\xi, \tau))] d\xi d\tau. \quad (28)$$

Переходя к пределу при $l \rightarrow +\infty$ в (27) и принимая во внимание (15), (26), (28), получим

$$u(x, t) = u_0(x) - \int_0^t \varphi(u(x, \tau)) d\tau + \int_0^t \int_{\oplus^n} E_h(x - \xi) [\varphi(u(\xi, \tau)) + h(\tau, u(\xi, \tau))] d\xi d\tau.$$

Отсюда при $t = 0$ получаем $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \oplus^n$. Таким же образом, как в пункте 2, доказываем, что $u(x, t)$ принадлежит пространству $C_{x,t}^{2,1}(\Pi_T)$. Теорема 3.1 доказана.

Заключение. В данной работе для любого $T < T_0$ установлена теорема существования не отрицательного решения задачи (1), (3) в слое Π_T , где $[0, T_0)$ – промежуток существования максимального решения вспомогательной задачи Коши (21), построенной по исходной задаче (1), (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладков, А.Л. Задача Коши в классах растущих функций для некоторых нелинейных псевдопараболических уравнений / А.Л. Гладков // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 2. – С. 277–288.
2. Гладков, А.Л. Единственность решения задачи Коши для некоторых квазилинейных псевдопараболических уравнений / А.Л. Гладков // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60, № 3. – С. 356–362.
3. Фураев, В.З. О разрешимости в целом первой краевой задачи для обобщенного уравнения Буссинеска / В.З. Фураев // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19, № 11. – С. 2014–2015.
4. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – 4-е изд. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
5. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М. Трудингер; пер. Л.П. Купцовой; под ред. А.К. Гущина. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

Поступила в редакцию 13.06.2011. Принята в печать 30.06.2011
Адрес для корреспонденции: e-mail: KavtovaTV@tut.by – Кавитова Т.В.