УДК 517.95

Существование решения задачи Коши для псевдопараболического уравнения

Т.В. Кавитова

Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

В работе рассматривается полулинейное псевдопараболическое уравнение следующего вида: $u_t = \Delta u_t + \Delta\varphi(u) + h(t,u)$, *где функции* φ *и* h *удовлетворяют условиям довольно общего вида. В некотором цилиндре конечной высоты* τ *с ограниченной областью из пространства* $\oplus^n$ *в основании доказывается существование неотрицательного классического решения начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с неотрицательными ограниченными граничными и начальными данными. Устанавливается теорема существования в слое* $\oplus^n \times [0,T]$, $(T < T_0)$ *неотрицательного классического решения задачи Коши для псевдопараболического уравнения с начальными данными* $u_o(x)$, *для которых справедливы соотношения:* $0 \le u_o(x) \le M\,(M \ge 0)$. *Здесь* T_0 *– время существования максимального неотрицательного решения задачи Коши для соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения* $\upsilon'(t) = h(t,\upsilon)$ *с начальными данными* $\upsilon(0) = M$.

Ключевые слова: *теорема существования, псевдопараболическое уравнение, начально-краевая задача, задача Коши.*

The existence of the solution of the Cauchy problem for some pseudoparabolic equation

T.V. Kavitova

Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

We consider a semilinear pseudoparabolic equation $u_t = \Delta u_t + \Delta\varphi(u) + h(t,u)$, *where the functions* φ *and* h *satisfy the conditions of a fairly general type. We show that in a certain cylinder of finite height* τ *with a limited region of space* $\oplus^n$ *at the base there exists a nonnegative solution of initial-boundary problem for pseudoparabolic equation with nonnegative bounded boundary condition and initial data. We prove the theorem of existence in layer* $\oplus^n \times [0,T]$, $(T < T_0)$ *of nonnegative classical solution of the Cauchy problem for pseudoparabolic equation with initial data which satisfy the relations:* $0 \le u_o(x) \le M\,(M \ge 0)$. *Here* T_0 *is the lifetime of the maximal nonnegative solution of the Cauchy problem for the corresponding ordinary differential equation with initial data* $\upsilon(0) = M$.

Key words: *theorem of existence, pseudoparabolic equation, initial-boundary problem, the Cauchy problem.*

1. Введение. Целью данной работы является исследование вопросов существования решений первой начально-краевой задачи и задачи Коши для псевдопараболического уравнения

$$u_t = \Delta u_t + \Delta\varphi(u) + h(t,u), \qquad (1)$$

возникающего в теории движения грунтовых вод при учете зависимости потенциала скорости от глубины.

Пусть $R_+ = [0,+\infty$, $\Pi_T = \oplus^n \times [0,T]$. Предположим, что выполнены следующие условия:

$\varphi(p)$ определена при $p \in R_+$, $h(t,p)$ – при $(t,p) \in R_+ \times R_+$,

$$\varphi(p) \in C^2(R_+), \quad h(t,p) \in C(R_+ \times R_+),$$

$$h(t,0) = 0,\ t \in R_+,$$

$h(t,p)$ локально непрерывна по Гёльдеру по переменной p в R_+ с показателем $\alpha\ (0 < \alpha < 1)$ для любого $t \in R_+$,

$\varphi(p) + h(t,p)$ не убывает по $p \in R_+$ для любого $t \in R_+$. (2)

Для уравнения (1) изучается задача Коши с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \oplus^n, \qquad (3)$$

где

$$u_0(x) \in C^2(\oplus^n),\ 0 \le u_0(x) \le M\ (M \ge 0),\ x \in \oplus^n. \qquad (4)$$

Определение 1.1. *Решением задачи (1), (3) в* Π_T *назовем функцию* $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(\Pi_T)$, *удовлетворяющую уравнению (1) в* Π_T *и начальному условию (3).*

Пусть Q – ограниченная область в пространстве $\oplus^n$, ∂Q – достаточно гладкая поверхность, для которой справедлива формула Грина. Обозначим $Q_T = Q \times (0,T)$, $\widetilde{Q}_T = Q \times [0,T]$,

$S_T = \partial Q \times [0,T]$.

В пункте 2 покажем существование решения первой начально-краевой задачи для уравнения (1) в Q_T с граничным условием

$$u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in S_T, \tag{5}$$

и начальными данными

$$u(x,0) = f_0(x),\ x \in Q, \tag{6}$$

где

$$f(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(S_T),\ \ f_0(x) \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q}),$$
$$f(x,0) = f_0(x),\ x \in \partial Q,\ 0 \le f_0(x) \le M_1,\ x \in \overline{Q}, \tag{7}$$
$$f_t(x,t) + \varphi(f(x,t)) - \varphi(0) \ge 0,\ (x,t) \in S_T.$$

Определение 1.2. *Решением задачи (1), (5), (6) в* Q_T *назовем функцию* $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(\widetilde{Q}_T) \cap C^{0,1}_{x,t}(\overline{Q}_T)$, *удовлетворяющую уравнению (1) в* $\widetilde{Q}_T$ *и условиям (5), (6).*

В пункте 3 докажем существование решения задачи (1), (3) в Π_T.

В работах [1]–[2] рассматривалась задача (1), (3) с $h(t,u) = 0$ и неотрицательной начальной функцией, неограниченно возрастающей на бесконечности. При выполнении следующих условий на функцию $\varphi(p)$:

$$\varphi(p) \in C^2(R_+),\ \varphi(0) = 0,\ \alpha_1 p^m \le \varphi'(p) \le \alpha_2 p^m,$$
$$0 \le \varphi''(p) \le \alpha_3 p^{m-1},\ \varphi(p) \le \alpha_4 p\varphi'(p),$$
$$\alpha_i > 0,\ i = \overline{1,4},\ m \ge 1,$$

в [1] доказан ряд теорем о разрешимости задачи (1), (3). В работе [2] в случае, когда функция $\varphi(p)$ удовлетворяет следующим требованиям:

$$\varphi(p) \in C^1(R_+),\ \varphi'(p) \ge 0,$$

$\varphi'(p)$ монотонно не убывает,

установлена единственность решения задачи Коши (1), (3) в классе неотрицательных функций $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(\Pi_T)$, для которых выполняются соотношения:

$$\varphi'(u(x,t)) \le M_1(1+|x|^2),\ |u_t(x,t)| \le M_2(1+|x|^2)^\beta,$$
$$M_i > 0,\ i = 1,2,\ \beta > 0.$$

2. Теорема существования решения начально-краевой задачи. Рассмотрим уравнение вида

$$u_t = \Phi(x,t,u) + F(u(\cdot,t)),\ (x,t) \in Q_T, \tag{8}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in Q, \tag{9}$$

где функция $\Phi(x,t,\xi)$, заданная на множестве $\overline{Q} \times [0,T] \times R$, непрерывна по совокупности аргументов, $F(u(\cdot,t))$ – нелинейный интегральный оператор.

Определение 2.1. *Решением задачи (8), (9) в* Q_T *назовем функцию* $u(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$, *удовлетворяющую уравнению (8) в* Q_T *и начальному условию (9).*

Определение 2.2. *Функции* $\sigma^+(x,t)$ *и* $\sigma^-(x,t)$, *принадлежащие* $C^{0,1}_{x,t}(Q_T)$ *и удовлетворяющие соотношениям*

$$-\infty < m_T \le \sigma^-(x,t) \le \sigma^+(x,t) \le M_T < +\infty,\ (x,t) \in Q_T,$$

где m_T, M_T *– постоянные, зависящие от* T, *назовем соответственно верхним и нижним решениями задачи (8), (9) в* Q_T, *если выполнены следующие неравенства:*

$$\sigma^+_t \ge \Phi(x,t,\sigma^+) + F(\sigma^+(\cdot,t)),\ (x,t) \in Q_T,$$
$$\sigma^+(x,0) \ge u_0(x),\ x \in \overline{Q},$$
$$\sigma^-_t \le \Phi(x,t,\sigma^-) + F(\sigma^-(\cdot,t)),\ (x,t) \in Q_T,$$
$$\sigma^-(x,0) \le u_0(x),\ x \in \overline{Q}.$$

Введем множество

$$O(\sigma^-,\sigma^+) = \{u \in C(\overline{Q}_T) \mid \sigma^- \le u \le \sigma^+,\ (x,t) \in Q_T\}.$$

Относительно данных задачи (8), (9) сделаем следующие предположения:

1. *Пусть в* Q_T *существуют верхнее* $\sigma^+(x,t)$ *и нижнее* $\sigma^-(x,t)$ *решения задачи* (8), (9).

2. *Функция* $\Phi(x,t,\xi)$ *непрерывна на множестве* $\overline{Q} \times [0,T] \times R$ *и имеет на этом множестве непрерывную производную* $\Phi_\xi(x,t,\xi)$.

3. *Оператор* $F(u(\cdot,t))$ *из* $C(\overline{Q}_T)$ *в* $C(\overline{Q}_T)$ *вполне непрерывен на множестве* $O(\sigma^-, \sigma^+)$ *и является монотонным на* $O(\sigma^-, \sigma^+)$, *т.е. из того, что* $u_1, u_2 \in O(\sigma^-, \sigma^+)$, $u_1 \le u_2$ *при* $(x,t) \in Q_T$, *следует неравенство* $F(u_1(\cdot,t)) \le F(u_2(\cdot,t))$.

4. $u_0(x) \in C(\overline{Q})$. (10)

В [3] доказано следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Если выполнены условия (10), то в* Q_T *существует решение задачи (8), (9), удовлетворяющее неравенству*

$$\sigma^-(x,t) \le u(x,t) \le \sigma^+(x,t),\ (x,t) \in Q_T.$$

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} g'(t) = h(t,g) + M_2,\ t > 0, \\ g(0) = M_1, \end{cases} \tag{11}$$

где $M_2 = \max\limits_{(x,t)\in S_T} \left| f_t(x,t) + \varphi(f(x,t)) - \varphi(0) \right|$.

Замечание 2.4. *Отметим, что решение задачи (11) может быть неединственным. Так,* *задача (11) с* $h(t,g)=g^{\beta}\ (0<\beta<1)$ *и* $M_i\equiv 0,\ i=1,2,$ *имеет решения* $g_1(t)\equiv 0$ *и* $g_2(t)=(1-\beta)^{\frac{1}{1-\beta}}t^{\frac{1}{1-\beta}}$.

Определение 2.5. *Неотрицательное решение* $w(t)$ *задачи (11), определенное для значений* $0\le t<T$, *назовем максимальным на* $[0,T)$, *если для любого другого неотрицательного решения* $f(t)$ *задачи (11) выполняется неравенство* $f(t)\le w(t)$ *при* $0\le t<T$.

Предполагается существование максимального решения $g(t)$ задачи (11) на промежутке $[0,T_1)$, где T_1 может равняться $+\infty$.

Обозначим через $G_n(x,t)$ функцию Грина первой краевой задачи для оператора $L=I-\Delta$, определенного в области Q, с нулевыми условиями на ∂Q. Тогда

$$G_n(x,\xi)=\mathcal{E}_n(x-\xi)+g_n(x,\xi),\ (x,\xi)\in Q\times Q, \quad (12)$$

где $\mathcal{E}_n(x-\xi)$ – фундаментальное решение оператора L во всем пространстве $\oplus^n$, функция $g_n(x,\xi)\in C^2(Q)\cap C(\overline{Q})$ при любом фиксированном $\xi\in Q$ удовлетворяет уравнению

$$L_x g_n=0,\ x\in Q,$$

и граничному условию

$$g_n(x,\xi)|_{x\in\partial Q}=-\mathcal{E}_n(x-\xi)|_{x\in\partial Q}. \quad (13)$$

Как известно, $\mathcal{E}_n(x)=c_n\,|x|^{\frac{2-n}{2}}K_{\frac{n-2}{2}}(|x|)$, $n=1,2,\dots$, где $K_\mu(|x|)$ – функция Макдональда μ-го порядка, c_n – нормирующий множитель, который определяется из условия $\int\limits_{\oplus^n}\mathcal{E}_n(x)\,dx=1$. Как отмечалось в [1], в силу свойств функции Макдональда, $\mathcal{E}_n(x)$ вместе со всеми своими частными производными любого порядка экспоненциально убывает при $|x|\to\infty$.

Отметим некоторые свойства функций Макдональда и Грина (см. [2]), используемые в дальнейших рассуждениях:

$$K_{-\mu}(|x|)=K_\mu(|x|),\ K_{\mu-1}(|x|)+K_{\mu+1}(|x|)=-2K'_\mu(|x|),$$

$$K_0(|x|)=\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)+O(1)\ \text{при}\ |x|\to 0,$$

$$K_{\frac{\mu}{2}}(|x|)=\frac{\alpha_\mu}{|x|^{\frac{\mu}{2}}}\ 1+o(1)\quad \text{при}\ |x|\to 0,\ \mu=1,2,\dots, \quad (14)$$

$$\int\limits_Q G_n(x,\xi)d\xi=1+\int\limits_{\partial Q}\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\,dS_\xi,\ x\in Q,$$

$$\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\le 0,\ \ \xi\in\partial Q,\ x\in Q, \quad (15)$$

$$\int\limits_Q G_n(x,\xi)\Delta\upsilon(x,\xi)d\xi=\int\limits_Q G_n(x,\xi)\upsilon(x,\xi)\,d\xi-$$

$$-\int\limits_{\partial Q}\upsilon(x,\xi)\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\,dS_\xi-\upsilon(x),\ x\in Q, \quad (16)$$

где α_μ – некоторые положительные константы, ν_ξ – внешняя нормаль к ∂Q в переменных ξ, $\upsilon(x)\in C^2(Q)\cap C(\overline{Q})$, причем $\Delta\upsilon\in L_2(Q)$.

Рассмотрим в Q_T интегро-дифференциальное уравнение

$$u_t+\varphi(u)=\int\limits_Q G_n(x,\xi)\ \varphi(u(\xi,t))+h(t,u(\xi,t))\ d\xi-$$

$$-\int\limits_{\partial Q}\ f_t(\xi,t)+\varphi(f(\xi,t))\ \frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\,dS_\xi \quad (17)$$

с начальным условием (6).

Определение 2.6. *Решением задачи (17), (6) в* Q_T *назовем функцию* $u(x,t)\in C^{0,1}_{x,t}(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T)$, *удовлетворяющую уравнению (17) в* Q_T *и начальному условию (6).*

Справедливо утверждение.

Лемма 2.7. *Пусть выполнены условия (2), (7). Тогда для любого* $\tau<\min(T,T_1)$ *в* Q_τ *существует решение задачи (17), (6), удовлетворяющее неравенству*

$$0\le u(x,t)\le g(t),\ (x,t)\in Q_\tau. \quad (18)$$

Доказательство. Покажем выполнение условий теоремы 2.3. Для удобства введем обозначения

$$\Phi(x,t,u)=-\varphi(u(x,t))-$$

$$-\int\limits_{\partial Q}\ f_t(\xi,t)+\varphi(f(\xi,t))\ \frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\,dS_\xi,$$

$$F(u(\cdot,t))=\int\limits_Q G_n(x,\xi)\ \varphi(u(\xi,t))+h(t,u(\xi,t))\ d\xi.$$

Функции $\sigma^-(x,t)\equiv 0$ и $\sigma^+(x,t)=g(t)$ являются соответственно нижним и верхним решениями задачи (17), (6). Действительно, принимая во внимание (7) и (15), получаем

$$\Phi(x,t,0)+F(0)=-\varphi(0)-$$

$$-\int\limits_{\partial Q}\ f_t(\xi,t)+\varphi(f(\xi,t))\ \frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\,dS_\xi+$$

$$+\varphi(0)\left(1+\int\limits_{\partial Q}\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\,dS_\xi\right)=$$

$$=-\int_{\partial Q}\left[f_t(\xi,t)+\varphi(f(\xi,t))-\varphi(0)\right]\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}dS_\xi\ge 0=$$

$$=\sigma_t^-(x,t),\ (x,t)\in Q_\tau,\ \sigma^-(x,0)=0\le f_0(x),\ x\in\overline{Q},$$

$$\Phi(x,t,g(t))+F(g(t))=-\varphi(g(t))-$$

$$-\int_{\partial Q}\left[f_t(\xi,t)+\varphi(f(\xi,t)\right]\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}dS_\xi+$$

$$+\left[\varphi(g(t))+h(t,g(t))\right]\left(1+\int_{\partial Q}\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}dS_\xi\right)=h(t,g(t))-$$

$$-\int_{\partial Q}\left[f_t(\xi,t)+\varphi(f(\xi,t))-\varphi(0)\right]\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}dS_\xi+$$

$$+\int_{\partial Q}\left[\varphi(g(t))+h(t,g(t))-\varphi(0)-h(t,0)\right]\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}dS_\xi\le$$

$$\le h(t,g(t))+M_2=g'(t)=\sigma_t^+(x,t),(x,t)\in Q_\tau,$$

$$\sigma^+(x,0)=g(0)=M_1\ge f_0(x),\ x\in\overline{Q}.$$

Вследствие (2) выполнено условие 2 из (10), а также очевидна монотонность оператора F. Покажем, что оператор F является вполне непрерывным на множестве $O(\sigma^-,\sigma^+)$. Пусть $u\in O(\sigma^-,\sigma^+)$, тогда

$$\left|F(u(\cdot,t))\right|\le\max_{\substack{0\le u(x,t)\le g(t),\\(x,t)\in Q_\tau}}\left|\varphi(u(x,t))+h(t,u(x,t))\right|\times$$

$$\times\int_Q G_n(x,\xi)d\xi\le\max_{\substack{0\le u(x,t)\le g(t),\\(x,t)\in Q_\tau}}\left|\varphi(u(x,t))+h(t,u(x,t))\right|$$

Следовательно, множество значений оператора F равномерно ограничено. Покажем, что это множество равностепенно непрерывно. Пусть $x,y\in Q$ и $u\in O(\sigma^-,\sigma^+)$, тогда

$$\left|F(u(x,t))-F(u(y,t)\right|\le\max_{\substack{0\le u(x,t)\le g(t),\\(x,t)\in Q_\tau}}\left|\varphi(u(x,t))+h(t,u(x,t))\right|\times$$

$$\times\int_Q\left|G_n(x,\xi)-G_n(y,\xi)\right|d\xi,$$

из которого вытекает равностепенная непрерывность оператора F. Так как $f_0(x)\in C(\overline{Q})$, то в силу теоремы 2.3 существует решение $u(x,t)$ задачи (17), (6) в Q_τ, для которого справедливо неравенство (18). Лемма 2.7 доказана.

Лемма 2.8. *Пусть выполнены условия (2), (7). Тогда для любого* $\tau<\min(T,T_1)$ *в* Q_τ *существует решение задачи (1), (5), (6).*

Доказательство. Покажем, что решение задачи (17), (6) является решением задачи (1), (5), (6). Зафиксируем произвольную точку $x\in Q$ и придадим i-ой координате этой точки приращение Δx_i. Из (17) получим $u_{it}+r_iu_i=z_i$, $i=1,...,n$, отсюда

$$u_i=\exp\{-\int_0^t r_i(x,\tau)\,d\tau\}\left(f_{0i}+\int_0^t z_i\exp\{\int_0^{\tau_2}r_i(x,\tau_1)\,d\tau_1\}\,d\tau_2\right).\tag{19}$$

Здесь $u_i=\dfrac{1}{\Delta x_i}(u(x+\Delta_i x,t)-u(x,t))$, $\Delta_i x=$ $=(0,...,0,\Delta x_i,0,...,0)$, где Δx_i стоит на i-ом месте,

$$f_{0i}=u_i|_{t=0},$$

$$r_i(x,t)=\int_0^1\varphi'(\Theta u(x+\Delta_i x,t)+(1-\Theta)u(x,t))d\Theta,$$

$z_i(x,t)=\dfrac{1}{\Delta x_i}(z(x+\Delta_i x,t)-z(x,t))$, где $z(x,t)$ – правая часть уравнения (17).

Если $u\in C(\overline{Q}_\tau)$, то из рассуждений, приведенных в [4, с. 395], следует, что

$$J_1(x,t)=\int_Q G_n(x,\xi)\left[\varphi(u(\xi,t))+h(t,u(\xi,t))\right]d\xi\in$$

$$\in C^{1,0}_{x,t}(\widetilde{Q}_\tau)\cap C(\overline{Q}_\tau),$$

$$J_2(x,t)=\int_{\partial Q}\left[f_t(\xi,t)+\varphi(f(\xi,t))\right]\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}dS_\xi\in$$

$$\in C^{2,0}_{x,t}(\widetilde{Q}_\tau)\cap C(\overline{Q}_\tau).$$

Отсюда, используя (17), получаем, что $u\in C^{0,1}_{x,t}(\overline{Q}_\tau)$. Переходя к пределу в (19) при $\Delta x_i\to 0$, имеем

$$u_{x_i}=\exp\{-\int_0^t\varphi'(u(x,\tau))d\tau\}\times$$

$$\times\left(f_{0x_i}+\int_0^t z_{x_i}\exp\{\int_0^{\tau_2}\varphi'(u(x,\tau_1))d\tau_1\}\,d\tau_2\right).\tag{20}$$

Отсюда $u\in C^{1,0}_{x,t}(\widetilde{Q}_\tau)\cap C^{0,1}_{x,t}(\overline{Q}_\tau)$. В силу свойств функции Макдональда (14), аналогично тому, как это сделано в [5, с. 60], можно показать, что $z(x,t)\in C^{2,0}_{x,t}(\widetilde{Q}_\tau)\cap C(\overline{Q}_\tau)$. Следовательно, $u(x,t)\in C^{2,1}_{x,t}(\widetilde{Q}_\tau)\cap C^{0,1}_{x,t}(\overline{Q}_\tau)$. Учитывая, что $\Delta J_1=-\varphi(u)-h(t,u)+J_1$ и $\Delta J_2=J_2$, получаем

$$\Delta(u_t+\varphi(u))=\Delta\int_Q G_n(x,\xi)\left[\varphi(u(\xi,t))+h(t,u(\xi,t))\right]d\xi-$$

$$-\Delta\int_{\partial Q}\left[f_t(\xi,t)+\varphi(f(\xi,t))\right]\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}dS_\xi=$$

$$= -\varphi(u) - h(t,u) + \int_Q G_n(x,\xi)\ \ \varphi(u(\xi,t)) + h(t,u(\xi,t))\ \ d\xi -$$

$$- \int_{\partial Q} \ f_t(\xi,t) + \varphi(f(\xi,t))\ \ \frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial \nu_\xi}\, dS_\xi =$$

$$= u_t - h(t,u).$$

Покажем справедливость (5). Так как $f(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(S_\tau)$, то существует функция $F(x,t) \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ при любом $t \in [0,\tau]$ такая, что $F(x,t) = f_t(x,t) + \varphi(f(x,t)),\ (x,t) \in S_\tau$. Из (16) и (17) следует, что $u_t + \varphi(u) = f_t + \varphi(f),\ x \in \partial Q,\ t \in [0,\tau]$. Отсюда $(u-f)_t + (u-f)\int_0^1 \varphi'(\theta u + (1-\theta) f)\, d\theta = 0$ при $x \in \partial Q,\ t \in [0,\tau]$. Интегрируя последнее равенство, имеем

$$u - f = (u - f)|_{t=0} \times$$

$$\times\ \exp\{-\int_0^t \int_0^1 \varphi'(\theta u(x,\tau) + (1-\theta) f(x,\tau))\, d\theta\, d\tau\}.$$

В силу (6) и (7) получаем (5). Лемма 2.8 доказана.

Замечание 2.9. *Положим* $f(x,t) \equiv 0,\ (x,t) \in S_T$, *и* $M_1 = M$ *в условиях (5) и (7) соответственно. Пусть* $\upsilon(t)$ *– максимальное на* $[0,T_0)$ *решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \upsilon'(t) = h(t,\upsilon),\ t > 0, \\ \upsilon(0) = M. \end{cases} \qquad (21)$$

Тогда, как видно из доказательств лемм 2.7 и 2.8, для любого $T < T_0$ *в* Q_T *существует решение задачи (1), (5), (6), для которого справедливо неравенство*

$$0 \le u(x,t) \le \upsilon(t),\ (x,t) \in Q_T.$$

3. Существование решения задачи Коши в слое.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия (2), (4). Тогда для любого* $T < T_0$ *в* Π_T *существует неотрицательное решение задачи (1), (3).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G_n(x,\xi,l)$ – функция Грина первой краевой задачи для оператора $L = I - \Delta$ в области $Q_l = \{x \in \oplus^n : |x| < l\},\ l > 0$. Рассмотрим последовательность функций $u_l(x,t)\ (l = 1,2,\ldots)$, удовлетворяющих в областях $Q_{l,T} = Q_l \times (0,T)$ уравнению (1), граничному условию

$$u_l(x,t) = 0,\ (x,t) \in S_{l,T} = \partial Q_l \times [0,T], \qquad (22)$$

и начальным данным

$$u_l(x,0) = u_0(x)\left(1 - \left(\frac{|x|}{l}\right)^2\right),\ x \in Q_l. \qquad (23)$$

Согласно пункту 2 в области $Q_{l,T}$ существует решение $u_l(x,t)$ задачи (1), (22), (23), удовлетворяющее интегро-дифференциальному уравнению

$$u_{lt}(x,t) + \varphi(u_l(x,t)) =$$

$$= \int_{Q_l} G_n(x,\xi,l)\ \ \varphi(u_l(\xi,t)) + h(t,u_l(\xi,t))\ \ d\xi -$$

$$- \varphi(0) \int_{\partial Q_l} \frac{\partial G_n(x,\xi,l)}{\partial \nu_\xi}\, dS_\xi \qquad (24)$$

и неравенству

$$0 \le u_l(x,t) \le \upsilon(t),\ (x,t) \in Q_{l,T}\ (T < T_0), \qquad (25)$$

где $\upsilon(t)$ – максимальное на $[0,T_0)$ решение задачи (21).

Из (17), (20) и (25) следует равномерная относительно l ограниченность по абсолютной величине функций u_l, u_{lt} и u_{lx_i} $(i = 1,\ldots,n)$ на всяком множестве $\overline{Q}_{m,T}$, где m – произвольное фиксированное натуральное число, $m < l$. Согласно теореме Арцела–Асколи, последовательность $u_l(x,t)$ $(l = 1,2,\ldots)$ компактна в $C(\overline{Q}_{m,T})$. Диагональным процессом выделим из $u_l(x,t)$ такую подпоследовательность $u_{l_k}(x,t)$, что для любого множества $\overline{Q}_{m,T}$ $(m = 1,2,\ldots)$ выполняется следующее соотношение:

$$u_{l_k}(x,t) \to u(x,t) \text{ равномерно в } \overline{Q}_{m,T}. \qquad (26)$$

Не уменьшая общности можно считать, что соотношение (26) выполнено для последовательности $u_l(x,t)$. В силу признака Дини последовательность $u_l(x,0)$ сходится равномерно к $u_0(x)$ в $\overline{Q}_{m,T}$. Проинтегрировав (24) по переменной t, получим

$$u_l(x,t) = u_0(x)\left(1 - \left(\frac{|x|}{l}\right)^2\right) - \int_0^t \varphi(u_l(x,\tau))\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_{Q_l} G_n(x,\xi,l)\ \ \varphi(u_l(\xi,\tau)) + h(\tau,u_l(\xi,\tau))\ \ d\xi\, d\tau -$$

$$- t\varphi(0) \int_{\partial Q_l} \frac{\partial G_n(x,\xi,l)}{\partial \nu_\xi}\, dS_\xi. \qquad (27)$$

Пусть (x,t) – произвольная точка слоя $П_T$, m такое, что $(x,t) \in \overline{Q}_{m,T}$, $m < l$. В силу соотношений (15), (25), (26) справедливо равенство

$$\lim_{l\to+\infty} \int_0^t \int_{Q_l} G_n(x,\xi,l) \ \varphi(u_l(\xi,\tau)) + h(\tau,u_l(\xi,\tau)) \ d\xi \, d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_{\oplus^n} Eb_n(x-\xi) \ \varphi(u(\xi,\tau)) + h(\tau,u(\xi,\tau)) \ d\xi \, d\tau. \ (28)$$

Переходя к пределу при $l \to +\infty$ в (27) и принимая во внимание (15), (26), (28), получим

$$u(x,t) = u_0(x) - \int_0^t \varphi(u(x,\tau)) \, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_{\oplus^n} Eb_n(x-\xi) \ \varphi(u(\xi,\tau)) + h(\tau,u(\xi,\tau)) \ d\xi \, d\tau.$$

Отсюда при $t = 0$ получаем $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \oplus^n$. Таким же образом, как в пункте 2, доказываем, что $u(x,t)$ принадлежит пространству $C^{2,1}_{x,t}(П_T)$. Теорема 3.1 доказана.

Заключение. В данной работе для любого $T < T_0$ установлена теорема существования неотрицательного решения задачи (1), (3) в слое $П_T$, где $[0,T_0)$ – промежуток существования максимального решения вспомогательной задачи Коши (21), построенной по исходной задаче (1), (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладков, А.Л. Задача Коши в классах растущих функций для некоторых нелинейных псевдопараболических уравнений / А.Л. Гладков // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 2. – С. 277–288.
2. Гладков, А.Л. Единственность решения задачи Коши для некоторых квазилинейных псевдопараболических уравнений / А.Л. Гладков // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60, № 3. – С. 356–362.
3. Фураев, В.З. О разрешимости в целом первой краевой задачи для обобщенного уравнения Буссинеска / В.З. Фураев // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19, № 11. – С. 2014–2015.
4. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – 4-е изд. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
5. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М. Трудингер; пер. Л.П. Купцовой; под ред. А.К. Гущина. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

Поступила в редакцию 13.06.2011. Принята в печать 30.06.2011
Адрес для корреспонденции: e-mail: KavitovaTV@tut.by – Кавитова Т.В.