

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ А.М.ГОРЬКОГО

О.Н.ЗУБ

ГРУППЫ С НЕКОТОРЫМИ СИСТЕМАМИ ДОПОЛНЯЕМЫХ

ПОДГРУПП

104. Алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1970

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

Диссертация выполнена на кафедре математики Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

- Научный руководитель - член-корреспондент АН УССР,
доктор физико-математических наук,
профессор С.Н.ЧЕРНИКОВ.
- Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор В.С.ЧАРИН,
кандидат физико-математических наук
И.Д.ИВАНЮТА.
- Ведущее предприятие - Уральский /Свердловский/ государственный университет имени А.М.Горького

Автореферат разослан 1970г.

Защита диссертации состоится 1970г.
на заседании Ученого совета Киевского государственного педагогического института /Киев, 30, Бульвар Шевченко, 22/24 /.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь совета

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

В развитии общей теории групп существенную роль играет изучение групп, подгруппы которых удовлетворяют некоторым наперед заданным требованиям. На этом пути был получен ряд фундаментальных результатов, обогативших теорию групп описанием новых конкретных видов групп. Достаточно отметить здесь исследования О.Б.Имидта, в которых изучалось строение конечных нильпотентных групп, все истинные подгруппы которых нильпотентны, и исследования советских алгебраистов /С.Н.Черникова, А.И.Мальцева, М.И.Каргаполова, В.С.Чарина и др./, посвященные локально разрешимым и локально нильпотентным группам. В качестве одного из существенных требований, налагаемых на подгруппы, является требование дополняемости, идущее от Ф.Холла [1]. В частности, Ф.Холл [1], а затем Н.В.Черникова [2], изучали строение групп, в которых все подгруппы дополняемы /такие группы были названы Н.В.Черниковой вполне факторизуемыми/. С.Н.Черниковым [3] поставлена общая задача изучения строения групп, с той или иной системой дополняемых подгрупп, послужившая толчком к многочисленным исследованиям в этом направлении не только в области абстрактных групп /см. напр. [3, 4, 5], [6], [7, 8], [9, 10] /, но также и в области топологических групп /см. напр. [11] /. В качестве системы дополняемых подгрупп, кроме совокупности всех подгрупп, рассматривались: совокупность всех абелевых подгрупп, совокупность всех циклических подгрупп, совокупность всех бесконечных подгрупп и другие совокупности. Иногда оказывалось, что требование дополняемости некоторых систем подгрупп группы равносильно требованию дополняемости всех ее подгрупп. Так, например, условие дополняемости абелевых

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

подгрупп не выводит за пределы класса вполне факторизуемых групп /С.Н.Черников [3] , М.И.Каргаполов [6] /. Более того, для конечных групп полная факторизуемость вытекает уже из предположения дополняемости одних лишь циклических подгрупп простых порядков /В.М.Горчаков [7] /.

В связи с последним результатом возникает вопрос о рассмотрении в некотором смысле двойственной задачи, именно, задачи изучения групп, в которых систему дополняемых подгрупп составляют все подгруппы непростых порядков. Однако при таком условии дополняемости существенного расширения класса вполне факторизуемых групп получить не удастся. Поэтому условие дополняемости всех подгрупп непростых порядков нуждается в некотором ослаблении, которое можно произвести путем сужения системы дополняемых подгрупп. Это сужение мы производим двумя способами: с одной стороны рассматриваются группы, все нециклические подгруппы которых дополняемы, а с другой стороны – группы, в которых все абелевы подгруппы непростых порядков дополняемы. Наряду с этим, для бесконечных групп представляется естественным изучать группы, все не локально циклические подгруппы которых дополняемы. Эти задачи были предложены автору С.Н.Черниковым и их решению посвящена настоящая диссертация. Изучение групп с указанными системами дополняемых подгрупп приводится с точностью до вполне факторизуемых групп, так как строение последних известно.

В первой главе диссертации рассматриваются конечные группы с дополняемыми нециклическими подгруппами.

Определение I. Группу G назовем квази- C – группой, если она содержит истинную нециклическую подгруппу и все не –

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

циклические подгруппы группы G дополняемы в G .

Описание конечных квази- C - групп дает

Теорема I./теоремы I.I-I.3 диссертации/. Конечная не вполне факторизуемая группа G тогда и только тогда является квази- C - группой, когда она относится к одному из следующих типов групп:

1/ прямое произведение: $G = P \times \{b\}$,

где $\{b\}$ - вполне факторизуемая циклическая группа, P силовская p - подгруппа группы G , причем либо

$P = (\{a_1\} \times \{a_2\}) \rtimes \{a_3\}$, $a_1^p = a_2^p = a_3^p = 1$, $[a_2, a_3] = a_1$,
либо

P - группа кватернионов/ в этом случае подгруппа $\{b\}$ должна быть отличной от единицы/;

2/ полупрямое произведение: $G = P \rtimes \{b\}$ /здесь P инвариантный множитель/, где P - группа кватернионов,

$P = \{a_1, a_2\}$, $a_1^4 = a_2^4 = 1$, $a_2^2 = a_1^2$, $a_1 a_2 = a_2^{-1} a_1$,
 $\{b\}$ - вполне факторизуемая группа нечетного порядка,

$b^{-1} a_1 b = a_2$, $b^{-1} a_2 b = a_1 a_2$;

3/ $G = P \rtimes \{b\}$,

где $\{b\}$ - вполне факторизуемая группа, P - силовская p - подгруппа группы G с $p \neq 2$, причем

$P = (\{a_1\} \times \{a_2\}) \rtimes \{a_3\}$, $a_1^p = a_2^p = a_3^p = 1$, $[a_2, a_3] = a_1$,
 $a_1 b = b a_1$, $b^{-1} a_2 b = a_2^2$, $b^{-1} a_3 b = a_3^p$,
 $1 < \alpha, \beta < p$, $\alpha \beta \equiv 1 \pmod{p}$;

4/ $G = \{b\} \rtimes P$,

где P - силовская p - подгруппа группы G ,
 $P = (\{a_1\} \times \{a_2\}) \rtimes \{a_3\}$, $a_1^p = a_2^p = a_3^p = 1$, $[a_2, a_3] = a_1$,

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

где $P = (\{a_1\} \times \{a_2\}) \lambda \{a_3\}$, $a_1^P = a_2^P = a_3^P = 1$, $\{a_2, a_3\} = A$,
 P - силовская p - подгруппа группы G ;

$$3/ \quad G = B \times H,$$

где H - конечная квази - C - группа типа 2/ или 3/ теоремы 1, причем порядки элементов групп B, H взаимно просты;

$$4/ \quad G = B \lambda \{a\},$$

где $\{a\}$ - силовская p - подгруппа группы G
 порядка p^γ , $\gamma > 1$, причем централизатор подгруппы B в $\{a\}$ равен $\{a^p\}$;

$$5/ \quad G = (B \times A) \lambda (\{c\} \lambda \{d\}),$$

где $\{c\} \lambda \{d\}$ - неабелева группа порядка $2q / q$ - нечетное простое число/,

A - силовская p - подгруппа группы G , причем

$$A = \{a_1\} \times \{a_2\}, \quad a_1^P = a_2^P = 1,$$

$$c^{-1}a_1c = a_1^\alpha, \quad c^{-1}a_2c = a_2^{\alpha^{q-1}},$$

$$d^{-1}a_1d = a_2, \quad d^{-1}a_2d = a_1,$$

число α принадлежит показателю q по модулю p ;

$$6/ \quad G = (B \times A) \lambda \{c\},$$

где $\{c\}$ - вполне факторизуемая группа, A - силовская

p - подгруппа группы G , имеющая разложение

$$A = \{a_1\} \times \{a_2\}, \quad a_1^P = a_2^P = 1,$$

причем любая отличная от единицы степень элемента c индуцирует в A неприводимый автоморфизм.

Следствие 1. Несчетная локально конечная RC -группа вполне факторизуема.

Следствие 2. Бесконечная локально конечная не вполне факторизуемая группа G тогда и только тогда является

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

квази - C - группой, когда $G = P \rtimes \{b\}$, где P - квази-циклическая P - группа, являющаяся силовой p -подгруппой в группе G , а $\{b\}$ - вполне факторизуемая группа.

Из полученного описания вытекает, что строение бесконечных локально конечных QAC -групп аналогично строению конечных квази - C - групп.

Третья глава диссертации посвящена изучению конечных и бесконечных локально конечных групп с дополняемыми абелевыми подгруппами непростых порядков /к абелевым группам непростых порядков отнесены и бесконечные абелевы группы/.

Определение 3. Группу G назовем QAC -группой, если она содержит истинную абелеву подгруппу непростого порядка и все абелевы подгруппы непростых порядков группы G дополняемы в G .

Описание конечных QAC - групп дает

Теорема 4 /теоремы 3.1-3.3 диссертации/. Конечная не вполне факторизуемая группа G тогда и только тогда является QAC - группой, когда она относится к одному из следующих типов групп:

$$1/ G = (\{a_1\} \times \{a_2\}) \rtimes \{a_3\}, a_1^p = a_2^p = a_3^p = 1, [a_2, a_3] = a_1, \\ p \text{ - простое число;}$$

$$2/ G = P \rtimes \{b\},$$

где P - силовая p -подгруппа группы G с $p \neq 2$, определяемая условиями:

$$P = (\{a_1\} \times \{a_2\}) \rtimes \{a_3\}, a_1^p = a_2^p = a_3^p = 1, [a_2, a_3] = a_1, \\ b^m = 1, \text{ число } m \text{ либо не делится на квадрат простого числа,} \\ \text{либо равно квадрату простого числа, причем}$$

$$b^{-1}a_1b = a_1^{\lambda}, b^{-1}a_2b = a_2^{\mu}, b^{-1}a_3b = a_3^{\nu},$$

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

$1 < \beta, \gamma < p$, $\beta\gamma \equiv \alpha \not\equiv 1 \pmod{p}$,
 α принадлежит показателю m по модулю p .

Если число m не делится на квадрат простого числа, то возможно также $\beta = 1$ или $\gamma = 1$;

$$3/ \quad G = F \rtimes \{b\},$$

где F — прямое произведение циклических групп простых порядков, инвариантных в G , причем централизатор каждой из них в подгруппе $\{b\}$ равен единице, а порядок элемента b равен квадрату простого числа;

$$4/ \quad G = \{a\} \rtimes \{b\},$$

$a^p = b^m = 1$, p — простое число, $(p, m) = 1$, число m либо не делится на квадрат простого числа, либо равно квадрату простого числа, причем

$$b^{-1}ab = a^\alpha,$$

α принадлежит показателю m по модулю p ;

$$5/ \quad G = (\{a_1\} \times \{a_2\}) \rtimes \{b\},$$

$a_1^p = a_2^p = b^4 = 1$, p — нечетное простое число, причем

$$b^{-1}a_1b = a_2, \quad b^{-1}a_2b = a_1^{-1};$$

$$6/ \quad G = (\{a_1\} \times \{a_2\}) \rtimes (\{b\} \rtimes \{d\}),$$

$$a_1^p = a_2^p = b^m = d^2 = 1,$$

p — нечетное простое число, $(m, p) = 1$, причем m либо не делится на квадрат простого числа, либо равно квадрату простого числа и

$$d^{-1}bd = b^\kappa, \quad \kappa \not\equiv 1 \pmod{m},$$

$$b^{-1}a_1b = a_1^\alpha, \quad b^{-1}a_2b = a_2^\beta,$$

$$d^{-1}a_1d = a_2, \quad d^{-1}a_2d = a_1,$$

$$\alpha \equiv \beta^\kappa \pmod{p}, \quad \beta \equiv \alpha^\kappa \pmod{p},$$

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

α, β принадлежат показателю m по модулю p ;

$$7/ \quad G = (\{a_1\} \times \{a_2\}) \rtimes ((\{b_1\} \times \{b_2\}) \rtimes \{b_3\}),$$

$$a_1^p = a_2^p = b_1^2 = b_2^2 = b_3^2 = 1,$$

p - нечетное простое число, причем

$$[b_2, b_3] = b_1,$$

$$b_1^{-1} a_1 b_1 = a_1^{-1}, \quad b_1^{-1} a_2 b_1 = a_2^{-1},$$

$$b_2^{-1} a_1 b_2 = a_1, \quad b_2^{-1} a_2 b_2 = a_2^{-1},$$

$$b_3^{-1} a_1 b_3 = a_2, \quad b_3^{-1} a_2 b_3 = a_1;$$

$$8/ \quad G = (\{a_1\} \times \{a_2\}) \rtimes ((\{b_1\} \rtimes \{d\}) \times \{b_2\}),$$

$$a_1^p = a_2^p = b_1^q = b_2^m = d^2 = 1,$$

число m не делится на квадрат простого числа, p, q - не-

четные простые числа, $(m, q) = q$, $(m, p) = 1$, причем

$$d^{-1} b_1 d = b_1^{-1},$$

$$b_1^{-1} a_1 b_1 = a_1^q, \quad b_1^{-1} a_2 b_1 = a_2^{q-1},$$

$$b_2^{-1} a_1 b_2 = a_1^p, \quad b_2^{-1} a_2 b_2 = a_2^p,$$

$$d^{-1} a_1 d = a_2, \quad d^{-1} a_2 d = a_1,$$

α, β принадлежат, соответственно, показателям q и m по модулю p ;

$$9/ \quad G = (\{a_1\} \times \{a_2\}) \rtimes \{b\},$$

$$a_1^p = a_2^p = b^m = 1, \quad (p, m) = 1,$$

p - простое число, число m либо не делится на квадрат простого числа, либо равно квадрату простого числа, причем элемент b индуцирует в подгруппе $\{a_1\} \times \{a_2\}$ неприводимый автоморфизм порядка m .

Нижеследующая теорема дает полное описание бесконечных локально конечных QAC - групп.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

Теорема 5 /теорема 3.4. диссертации/. Бесконечная локально конечная не вполне факторизуемая группа G тогда и только тогда является QAC - группой, когда

$$G = A \rtimes \langle b \rangle,$$

где A - бесконечное прямое произведение циклических групп простых порядков, инвариантных в G , причем централизатор каждой из них в подгруппе $\langle b \rangle$ равен единице, а порядок элемента b равен квадрату простого числа.

Из приведенных результатов нетрудно усмотреть, что изучаемые в диссертации класс не вполне факторизуемых локально конечных /конечных и бесконечных/ QC - групп и класс не вполне факторизуемых локально конечных /конечных и бесконечных/ QAC - групп существенно различны; в пересечение этих классов групп входят лишь конечные нильпотентные не вполне факторизуемые QAC - группы и конечные квази- C - группы типа 6/, 7/ теоремы I.

Результаты диссертации докладывались на IX Всесоюзном алгебраическом коллоквиуме /Гомель, 1968 г./, на семинаре по теории групп Института математики АН УССР, на IV Республиканской конференции молодых математиков Украины /Киев, 1968 г./ и содержатся в работах [12-17]

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

ЛИТЕРАТУРА

1. Hall Ph., *Complemented groups*, *J. London Math. Soc.*, 12 (1937), 201-204.
2. Черникова Н.В., Группы с системами дополняемых подгрупп, Матем. сб. 39/1956/, 273-292.
3. Черников С.Н., Группы с системами дополняемых подгрупп, Матем. сб. 35 /1954/, 93-128.
4. Черников С.Н., Группы с заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп, Укр. матем. журн., 17/1967/, III-131.
5. Черников С.Н., Исследования групп с заданными свойствами подгрупп, Укр. матем. журн., 21/1969/, 191-206.
6. Каргаполов М.И., Некоторые вопросы теории нильпотентных и разрешимых групп, ДАН СССР, 127 /1959/, 1164-1166.
7. Горчаков В.М., Прimitивно факторизуемые группы, Ученые записки Пермского ун-та, 17 /1960/, 15-31.
8. Горчаков В.М., О примарно факторизуемых группах, Укр. матем. журн., 14 /1962/, 3-9.
9. Christensen, *Complementation in groups*, *Math. Zeit.*, 84 (1964), 52-69.
10. Christensen, *Groups with complemented normal subgroups*, *J. London Math. Soc.*, 42 (1967), 208-216.
11. Чарин В.С., Группы с дополняемыми подгруппами, ДАН СССР, 173 /1967/, 50-53.

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

12. Зуб О.М., Скінченні групи, в яких всі нециклічні підгрупи мають доповнення, ДАН УРСР, серія А, № 10 /1968/, 891-894.
13. Зуб О.М., Нескінченні групи, в яких всі нелокально циклічні підгрупи мають доповнення, ДАН УРСР, серія А, № 5/1969/, 406-408.
14. Зуб О.Н., Бесконечные группы, все не локально циклические подгруппы которых дополняемы, IX Всесоюзный алгебраический коллоквиум /Резюме научных сообщений/, г.Гомель/1968/, 80.
15. Зуб О.М., Нескінченні групи, в яких всі нециклічні підгрупи мають доповнення, АН УРСР, Інститут математики, Четверта наукова конференція молодих математиків України, м.Київ /1968/, 14.
16. Зуб О.Н., Группы, нециклические подгруппы которых дополняемы, /в печати/.
17. Зайцев Д.І., Зуб О.М., Группы, в которых все абелевы подгруппы простейших порядков имеют доповнения, /в печати/.

Вф І9835. І4.ІУ-70г. Об'єм 0,75 п.л. Зак.2494-І50,
Книжная типография № 5, Киев, Репина, 4.