

УСЛОВИЯ ДЕКОМПОЗИЦИИ ПОЛИНОМА ДВЕНАДЦАТОЙ СТЕПЕНИ НА ПОЛИНОМЫ ЧЕТВЕРТОЙ И ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНЕЙ

Чернявский М.М.¹, Китаров Д.А.²,

¹молодой ученый, ²магистрант ВГУ имени П.М. Машерова,
г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – Трубников Ю.В., доктор физ.-мат. наук, профессор

Ключевые слова. Композиция полиномов, двенадцатая степень, декомпозиция, разрешимость в радикалах, точные формулы, система компьютерной алгебры.

Keywords. Composition of polynomials, twelfth degree, decomposition, solvability in radicals, exact formulas, computer algebra system.

Задача о возможности представления полинома заданной степени в виде композиции полиномов меньших степеней является классической и используется в приложениях, например, в шифровании информации. В настоящее время известны некоторые разработанные машинные алгоритмы декомпозиции полиномов [1, 2]. Установление факта наличия какой-либо композиции у полинома само по себе является трудной задачей, поэтому практическую ценность представляют аналитические условия связи между коэффициентами полинома, при выполнении которых полином имеет заданную композиционную структуру. Получение таких условий требует большого числа преобразований в символьном виде и не поддается ручным вычислениям уже для полиномов относительно невысоких степеней, например, восьмой. Ситуация существенно изменилась в XXI веке с развитием систем компьютерной математики. Так, например, Ю.В. Трубниковым и В.В. Юргеласом получены явные условия наличия композиции полиномов шестой степени [3].

Цель работы – получить необходимые и достаточные условия, при которых полином двенадцатой степени представим в виде композиции полиномов четвертой и третьей степеней. Настоящее исследование является естественным продолжением работ [4] и [5].

Материал и методы. Материалом исследования являются алгебраические полиномы комплексного аргумента двенадцатой степени, являющиеся композицией полиномов меньших степеней. Методы исследования – методы алгебры с использованием системы компьютерной математики *Maple 2023*.

Результаты и их обсуждение. Доказаны теоремы следующего вида.

Теорема 1. Для того, чтобы полином двенадцатой степени

$$P_{12}(z) = z^{12} + a_1 z^{11} + a_2 z^{10} + a_3 z^9 + a_4 z^8 + a_5 z^7 + a_6 z^6 + a_7 z^5 + a_8 z^4 + a_9 z^3 + a_{10} z^2 + a_{11} z + a_{12}$$

являлся композицией полиномов вида $P_{12}(z) = f(g(z))$, где $f(z) = z^4 + b_1 z^3 + b_2 z^2 + b_3 z + b_4$, $g(z) = z^3 + c_1 z^2 + c_2 z + c_3$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия связей между его коэффициентами:

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{77}{512} a_1^4 - \frac{21}{32} a_1^2 a_2 + \frac{3}{4} a_1 a_3 + \frac{3}{8} a_2^2; & a_5 &= \frac{7}{64} a_1^3 a_2 - \frac{3}{32} a_1^2 a_3 - \frac{3}{8} a_1 a_2^2 + \frac{3}{4} a_2 a_3; \\ a_7 &= \frac{121}{8192} a_1^7 - \frac{231}{2048} a_1^5 a_2 + \frac{73}{1024} a_1^4 a_3 + \frac{33}{128} a_1^3 a_2^2 - \frac{9}{32} a_1^2 a_2 a_3 - \frac{5}{32} a_1 a_2^3 + \frac{1}{2} a_1 a_6 + \frac{3}{16} a_2^2 a_3; \\ a_8 &= -\frac{1991}{1048576} a_1^8 + \frac{763}{32768} a_1^6 a_2 + \frac{37}{4096} a_1^5 a_3 - \frac{765}{8192} a_1^4 a_2^2 + \frac{19}{256} a_1^3 a_2 a_3 + \frac{67}{512} a_1^2 a_2^3 - \\ &\quad - \frac{1}{8} a_1^2 a_6 - \frac{9}{64} a_1 a_2^2 a_3 - \frac{7}{256} a_2^4 + \frac{1}{2} a_2 a_6; \\ a_{10} &= \frac{2541}{4194304} a_1^{10} - \frac{6749}{1048576} a_1^8 a_2 + \frac{363}{131072} a_1^7 a_3 + \frac{821}{32768} a_1^6 a_2^2 + \frac{313}{16384} a_1^5 a_2 a_3 - \frac{349}{8192} a_1^4 a_2^3 + \\ &\quad + \frac{21}{1024} a_1^4 a_6 + \frac{85}{2048} a_1^3 a_2^2 a_3 - \frac{5}{64} a_1^2 a_2 a_6 - \frac{7}{256} a_1 a_2^3 a_3 + \frac{1}{4} a_1 a_9 - \frac{1}{256} a_2^5 + \frac{29}{1024} a_2^4 a_1 + \frac{1}{16} a_2^2 a_6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} = & -\frac{1}{33554432}(3a_1^2 - 8a_2)(1533a_1^9 - 14816a_1^7a_2 + 7008a_1^6a_3 + 49536a_1^5a_2^2 - 41728a_1^4a_2a_3 - \\
& - 63488a_1^3a_2^3 + 49152a_1^3a_6 + 67584a_1^2a_2^2a_3 - 131072a_1a_2a_6 + 20480a_2^4a_1 - 16384a_2^3a_3 + 1048576a_9). \\
\text{При этом } c_1 = & \frac{a_1}{4}; c_2 = \frac{1}{32}(-3a_1^2 + 8a_2); c_3 = \frac{7}{128}a_1^3 - \frac{3}{16}a_1a_2 + \frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{4}b_1; \\
b_2 = & \frac{77}{8192}a_1^6 - \frac{63}{1024}a_1^4a_2 - \frac{5}{128}a_1^3a_3 + \frac{15}{128}a_1^2a_2^2 + \frac{3}{16}a_1a_2a_3 - \frac{1}{16}a_2^3 - \frac{3}{8}a_3^2 + a_6 + \frac{3}{8}b_1^2; \\
b_3 = & -\frac{231}{1048576}a_1^9 + \frac{187}{65536}a_1^7a_2 - \frac{89}{32768}a_1^6a_3 - \frac{3}{256}a_1^5a_2^2 + \frac{71}{4096}a_1^4a_2a_3 + \frac{5}{256}a_1^3a_3^2 + \frac{17}{1024}a_1^3a_2^3 - \\
& - \frac{1}{16}a_1^3a_6 - \frac{15}{512}a_1^2a_2^2a_3 - \frac{3}{32}a_1a_2a_3^2 + \frac{1}{4}a_1a_2a_6 - \frac{1}{256}a_2^4a_1 + \frac{1}{64}a_2^3a_3 - \frac{1}{2}a_3a_6 + \frac{1}{8}a_3^3 + a_9 + \\
& + \left(\frac{77}{16384}a_1^6 - \frac{63}{2048}a_1^4a_2 - \frac{5}{256}a_1^3a_3 + \frac{15}{256}a_1^2a_2^2 + \frac{3}{32}a_1a_2a_3 - \frac{1}{32}a_2^3 - \frac{3}{16}a_3^2 + \frac{1}{2}a_6 \right) b_1 + \frac{1}{16}b_1^3; \\
b_4 = & -\frac{6713}{268435456}a_1^{12} + \frac{1267}{4194304}a_1^{10}a_2 - \frac{105}{1048576}a_1^9a_3 - \frac{2931}{2097152}a_1^8a_2^2 + \frac{187}{262144}a_1^7a_3a_2 + \\
& + \frac{405}{131072}a_1^6a_2^3 + \frac{3}{32768}a_1^6a_3^2 + \frac{7}{16384}a_1^6a_6 - \frac{57}{32768}a_1^5a_3a_2^2 - \frac{1}{2048}a_1^4a_2a_3^2 - \frac{5}{1024}a_1^4a_2a_6 - \\
& - \frac{217}{65536}a_1^4a_2^4 + \frac{1}{64}a_1^3a_3a_6 + \frac{9}{4096}a_1^3a_2^3a_3 - \frac{5}{2048}a_1^3a_3^3 - \frac{7}{128}a_1^3a_9 + \frac{3}{2048}a_1^2a_2^5 + \frac{3}{256}a_1^2a_2^2a_6 - \\
& - \frac{1}{512}a_1a_2^4a_3 + \frac{3}{256}a_1a_2a_3^3 + \frac{3}{16}a_1a_2a_9 - \frac{1}{16}a_1a_2a_3a_6 - \frac{1}{4}a_3a_9 - \frac{3}{256}a_3^4 + \frac{1}{16}a_3^2a_6 + a_{12} + \\
& \left(-\frac{231}{4194304}a_1^9 + \frac{187}{262144}a_1^7a_2 - \frac{89}{131072}a_1^6a_3 - \frac{3}{1024}a_1^5a_2^2 + \frac{71}{16384}a_1^4a_2a_3 + \frac{17}{4096}a_1^3a_2^3 + \right. \\
& + \frac{5}{1024}a_1^3a_3^2 - \frac{1}{64}a_1^3a_6 - \frac{15}{2048}a_1^2a_2^2a_3 - \frac{3}{128}a_1a_2a_3^2 - \frac{1}{1024}a_1a_2^4 + \frac{1}{16}a_1a_2a_6 + \frac{1}{256}a_2^3a_3 + \\
& \left. + \frac{1}{32}a_3^3 - \frac{1}{8}a_3a_6 + \frac{1}{4}a_9 \right) b_1 + \left(\frac{77}{131072}a_1^6 - \frac{63}{16384}a_1^4a_2 - \frac{5}{2048}a_1^3a_3 + \frac{15}{2048}a_1^2a_2^2 + \right. \\
& \left. + \frac{3}{256}a_1a_2a_3 - \frac{1}{256}a_2^3 - \frac{3}{128}a_3^2 + \frac{1}{16}a_6 \right) b_1^2 + \frac{1}{256}b_1^4;
\end{aligned}$$

параметр b_1 остается свободным.

Удобно выбирать $b_1 = 0$. Заметим, что выполнения условий теоремы достаточно для разрешимости исходного полинома двенадцатой степени в радикалах.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор № Ф23М-003).

Заключение. Таким образом, в работе получены необходимые и достаточные условия представимости произвольного полинома двенадцатой степени комплексного аргумента в виде композиции полиномов четвертой и третьей степеней. Также получены формулы прямого перехода от коэффициентов исходного полинома к коэффициентам полиномов, составляющих композицию.

1. Kozen, D. Polynomial Decomposition Algorithms / D. Kozen, S. Landau // Journal of Symbolic Computation. – 1989. – Vol. 7, № 5. – P. 445–456.

2. Перминова, М.Ю. Алгоритм декомпозиции полиномов, основанный на разбиениях / М.Ю. Перминова, В.В. Кручинин, Д.В. Кручинин // Доклады ТУСУРа. – 2015. – № 4(38). – С. 102–107.

3. Трубников, Ю.В. Об условиях представимости полиномов четвертой и шестой степени в виде суперпозиции полиномов второй и третьей степени / Ю.В. Трубников, В.В. Юргелас // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2019. – № 1(102). – С. 17–24. URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/18080> (дата обращения: 09.09.2024)

4. Грицкевич, Н.С. Декомпозиция полиномов восьмой степени на полиномы второй и четвертой степеней / Н.С. Грицкевич, Д.А. Китаров // XVI Машеровские чтения: матер. Междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и моло-

дых ученых, Витебск, 21 окт. 2022 г.: в 2 т. / ВГУ имени П.М.Машерова. – Витебск, 2022. – Т.1. – С.15–16. URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/34645> (дата обращения: 09.09.2024)

5. Чернявский, М.М. Аналитические условия представимости полинома восьмой степени в виде композиции полиномов меньших степеней / М.М. Чернявский, Н.С. Грицкевич // XVI Машеровские чтения: матер. Междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 21 окт. 2022 г.: в 2 т. / ВГУ имени П.М.Машерова. – Витебск, 2021. – Т. 1. – С. 48–51. URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/34660> (дата обращения: 09.09.2024)

COMPLETE ISOMETRY GROUP OF A HOMOGENEOUS MANIFOLD OF A SPECIAL NON-UNIMODULAR LIE GROUP

Yang G.,

*master's degree graduate at VSU named after P.M. Masherov, Vitebsk, Republic of Belarus
Scientific supervisor – Podoksenov M.N., Ph.D. physics and math. sciences, associate professor*

Ключевые слова. Группа Ли, изометрия, полупрямое произведение, однородное многообразие.

Keywords. Lie group, isometry, semidirect product, homogeneous manifold.

In paper [1] we found the matrix representation and full group of isometries the homogeneous manifold of the special three-dimensional non-unimodular Lie group S_3 equipped with left-invariant Riemannian metric. The purpose of this paper is to find a matrix representation of this group of isometries and to study the structure of this group.

Material and methods. We consider the special non-unimodular three-dimensional Lie group S_3 , equipped with left-invariant Riemannian metrics, and the full group of isometries of the resulting homogeneous manifold. We use methods of algebra and differential geometry.

Results and its discussion. In paper [1] we found the matrix representations of Lie group S_3 and its Lie algebra $\mathfrak{S}_3$. These representations helped us to introduce the natural coordinates in S_3 and $\mathfrak{S}_3$. Then we found the canonical form of the left-invariant metric tensor in the natural coordinates, and we found the full group of isometries of the resulting homogeneous manifold. This group is four-dimensional, not connected, and with respect to the natural coordinates it acts according to the formulas

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + h_1, \\ x'_2 = (x_2 \cos at - x_3 \sin at)e^{h_1} + h_2, \\ x'_3 = (x_2 \sin at + x_3 \cos at)e^{h_1} + h_3, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + h_1, \\ x'_2 = (x_2 \sin at + x_3 \cos at)e^{h_1} + h_2, \\ x'_3 = (x_2 \cos at - x_3 \sin at)e^{h_1} + h_3, \end{cases} \quad (2)$$

where $H(h_1, h_2, h_3)$ is an arbitrary element of the Lie group S_3 , $t \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

We will call the transformations, which act by these formulas the isometries of the first and of the second kind respectively. Only the transformations of the first kind form the group, and we denote this group as $I_e(S_3)$.

If we consider the implementation of the Lie group S_3 in the form of column vectors with components $(x_1, 1, x_2, x_3, 1)$, then the action of transformations from $I_e(S_3)$ can be represented as a matrix

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{h_1} \cos at & -e^{h_1} \sin at & h_2 \\ 0 & 0 & e^{h_1} \sin at & e^{h_1} \cos at & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Let us assign coordinates (t, h_1, h_2, h_3) to such transformation. The coordinate t is cyclic: coordinates (t, h_1, h_2, h_3) and $\left(t + \frac{2\pi}{a}, h_1, h_2, h_3\right)$ define the same point. Suppose, that we have two transformations with coordinates (t_1, h_1, h_2, h_3) and (t_2, g_1, g_2, g_3) . Then, by multiplying the corresponding matrices, we find that the group operation in $I_e(S_3)$ is given by the formulas