Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»

Н.В. Гриб, М.Н. Подоксёнов

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ ФИГУР И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

Учебное пособие

*Допущено Министерством образования
Республики Беларусь в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования
по математическим специальностям*

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2024*

УДК 514+744+004.92(075.8)
ББК 22.151я73+30.11я73+32.972я73
Г82

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 6 от 25.06.2024.

Авторы: заведующий кафедрой математики и методики преподавания математики БГПУ, кандидат физико-математических наук, доцент **Н.В. Гриб;** доцент кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксёнов**

Рецензенты:
кафедра фундаментальной математики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина;
доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания
математики Белорусского государственного университета,
кандидат физико-математических наук, доцент *С.Г. Кононов*

Гриб, Н.В.

Г82 Геометрические построения фигур и преобразования плоскости : учебное пособие / Н.В. Гриб, М.Н. Подоксёнов. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2024. – 111 с.
ISBN 978-985-30-0153-2.

Данное учебное издание подготовлено в соответствии с учебной программой по курсу «Геометрические построения фигур и преобразования плоскости» для студентов, обучающихся по специальности «Физико-математическое образование». Излагаются теоретический материал, примеры решения задач и задания для решения на практических занятиях.

УДК 514+744+004.92(075.8)
ББК 22.151я73+30.11я73+32.972я73

ISBN 978-985-30-0153-2

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено прежде всего для студентов, получающих общее высшее образование по специальности 6-05-0113-04 Физико-математическое образование и изучающих учебную дисциплину «Геометрические построения фигур и преобразования плоскости», для преподавателей этой дисциплины, а также всех интересующихся геометрией.

С точки зрения профессиональной направленности раздел «Геометрические построения фигур и преобразования плоскости» занимает важное место в подготовке будущих преподавателей математики, так как он, пусть и в небольшом объёме, изучается в курсе математики средней школы. Геометрические преобразования играют особо существенную роль, ведь именно они положены в основу современной классификации различных отраслей геометрии. Например, группы движений и подобий определяют евклидову геометрию. С преобразованиями плоскости тесно связано изложение теории геометрических построений на плоскости циркулем и линейкой. Дело здесь в том, что метод преобразований – один из основных методов решения задач на построение.

Данное издание состоит из двух глав. В первой главе – «Преобразования плоскости» – изучаются основные преобразования плоскости: движения, подобия, аффинные преобразования, инверсия. Представлены свойства этих преобразований, их аналитическое выражение в аффинной или декартовой системе координат, классификация. В отдельном параграфе приводятся примеры решения задач, в том числе примеры применения преобразований плоскости к решению задач элементарной планиметрии, а также задач с практическим содержанием. В последнем параграфе содержатся задачи для практических занятий и самостоятельного решения. Задачи повышенной сложности помечены звёздочкой.

Во второй главе – «Геометрические построения на плоскости» – изучаются основные методы решения задач на построение геометрических фигур на плоскости с помощью циркуля и линейки: метод геометрических мест (пересечений), метод движений, метод подобия, алгебраический метод, а также метод инверсии. Здесь же рассматривается критерий разрешимости задач на построение циркулем и линейкой и приводятся примеры неразрешимых задач. В завершение изучаются построения, которые можно выполнить одним циркулем или одной линейкой. Примеры решения задач не собраны в отдельный параграф, как в предыдущей части, а содержатся в каждом из параграфов, необходимость этого продиктована характером излагаемого материала. Задачи для практических занятий и самостоятельного решения приведены в последнем параграфе.

Некоторые излагаемые в издании темы выходят за рамки учебной программы по дисциплине «Геометрические построения фигур и преобразования плоскости» и рекомендуются для самостоятельного изучения студентами (например, метод инверсии).

Учебное пособие также содержит приложение, в котором кратко излагаются сведения из курсов алгебры и аналитической геометрии, которые важны для понимания теоретического материала. Отдельный параграф в приложении посвящён теоремам Дезарга и Паскаля, которые обычно доказываются в проективной геометрии. Эти теоремы позволяют обосновать некоторые интересные построения, которые можно выполнить одной линейкой.

ГЛАВА 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

В этой главе мы познакомимся с основными преобразованиями плоскости: движениями, подобиями, аффинными преобразованиями, инверсией, а также свойствами перечисленных преобразований. Данные знания будут необходимы при изучении темы «Геометрические построения фигур на плоскости», а также предмета «Методы изображения фигур и основания геометрии».

1.1. *Преобразование множества. Преобразование плоскости*

***Определение* 1.1.** Пусть даны произвольные непустые множества X и Y. Предположим, что *каждому* элементу $x \in X$ в силу некоторого закона поставлен в соответствие только один элемент $y \in Y$. Тогда говорят, что *дано отображение f множества* X *во множество* Y. Множество X называется *областью определения отображения* f и обозначается $D(f)$.

Мы рассматриваем только множества, состоящие из точек плоскости. Поэтому в дальнейшем вместо «элемент множества» используем «точка».

***Определение* 1.2.** Если при отображении f точке $M \in X$ соответствует точка $M' \in Y$, то точка M' называется *образом точки* M, а M – *прообразом точки* M'. Пишем в этом случае $M' = f(M)$. Множество $\{y \in Y | \exists x \in X: \ y = f(x)\}$, состоящее из всех точек, имеющих прообраз, обозначается $E(f)$ или $f(X)$.

Заметим, что в определении не говорится о том, что $E(f)$ обязательно совпадает со всем Y (рисунок 1.1).

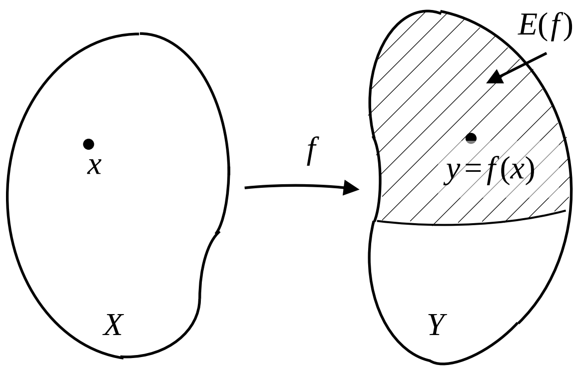


Рис. 1.1

***Пример* 1.1.** Пусть γ – окружность, AB – её диаметр, а l – прямая, на которой он лежит. Каждой точке P окружности поставим в соответствие её ортогональную проекцию P' на прямую l. Получим отображение $f: \gamma \to l$ (рисунок 1.2). В данном случае $E(f)$ есть отрезок AB, и он не совпадает со всей прямой l.

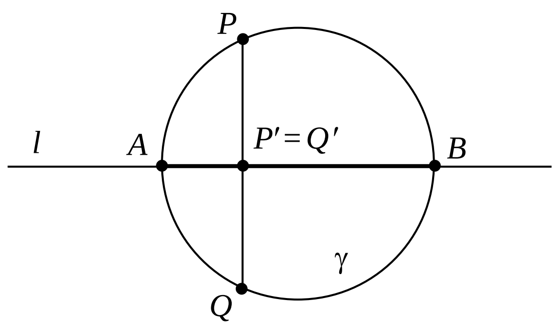


Рис. 1.2

***Определение* 1.3.** Если множество значений $f(X)$ совпадает со всем множеством Y, то отображение $f: X \to Y$ называется *сюръективным*, или *отображением множества* X *«на» множество* Y (или *«на всё» множество* Y). Другими словами, f называется сюръективным, если каждая точка множества Y имеет хотя бы один прообраз во множестве X.

В последнем примере точки за пределами отрезка AB не имеют прообразов. Поэтому отображение f не является сюръективным. Точки же из отрезка AB (кроме самих A и B) имеют не один прообраз, а два.

***Определение* 1.4.** Отображение $f: X \to Y$ называется *инъективным*, если каждая точка $M' \in Y$ имеет не более одного прообраза во множестве X. Другими словами, отображение $f: X \to Y$ называется *инъективным*, если для двух различных точек $A, B \in X$ выполнено $f(A) \neq f(B)$.

Можно ещё сформулировать это так: отображение $f: X \to Y$ является *инъективным*, если не допускается, чтобы две различные точки из X отображались в одну точку из Y. Отображение из примера 1.1 не является инъективным.

***Пример* 1.2.** Пусть $X = ABC$ – правильный треугольник, вписанный в окружность ω. Каждой точке $M \in X$ поставим в соответствие её проекцию M' на окружность из центра окружности (рисунок 1.3). Получим отображение $g: X \to \omega$. Оно является одновременно инъективным и сюръективным.

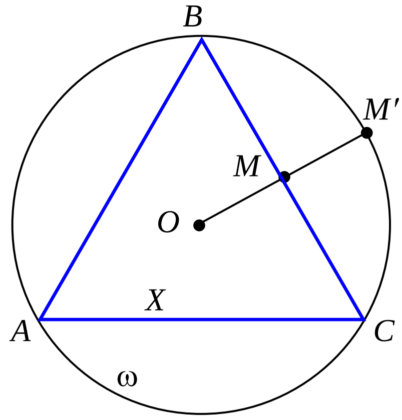


Рис. 1.3

***Определение* 1.5.** Если отображение $f: X \to Y$ является одновременно инъективным и сюръективным, то оно называется *биективным*, или *взаимно однозначным*, отображением множества X на множество Y, или коротко *биекцией*.

***Определение* 1.6.** Пусть $f: X \to Y$ – биективное отображение. Отображение $f^{-1}: Y \to X$, которое действует по правилу

$$f(M) = M' \Leftrightarrow f^{-1}(M') = M,$$

называется *обратным к отображению* f.

Биективность – это необходимое и достаточное условие существования обратного отображения. Обратное отображение тоже будет биективным.

***Определение* 1.7.** *Преобразованием множества* X называется биективное отображение $f: X \to X$ множества X на себя.

***Определение* 1.8.** Простейшим примером преобразований является *тождественное преобразование* $id: X \to X$, которое каждую точку M переводит в себя: $id(M) = M$.

***Пример* 1.3.** Пусть $X = ABC$ – правильный треугольник, O – его ортоцентр. Каждой точке $M \in X$ поставим в соответствие точку M', полученную в результате поворота M на угол 120° против часовой стрелки вокруг ортоцентра (рисунок 1.4). Получившееся отображение $h: X \to X$ является преобразованием множества X. При повороте треугольник совместится сам с собой и в каждую точку $M' \in X$ переходит только одна точка $M \in X$.

***Определение* 1.9.** Пусть $f: X \to X$ и $g: X \to X$ – два преобразования одного и того же множества. Говорим, что эти преобразования *равны*, или *совпадают*, если для любой точки $M \in X$ выполнено $f(M) = g(M)$. Будем в таком случае писать $f = g$.

***Определение* 1.10.** Пусть $f: X \to X$ и $g: X \to X$ – два преобразования одного и того же множества. Тогда отображение, которое получается в результате их последовательного выполнения, называется *композицией* преобразований f и g. Оно обозначается так: $g \circ f: X \to X$ – и действует по правилу $(g \circ f)(M) = g(f(M))$ (т.е. если $M' = f(M)$, $M'' = g(M')$, то $M'' = (g \circ f)(M)$).

Нетрудно доказать, что композиция двух преобразований тоже будет преобразованием и что композиция обладает свойством ассоциативности: $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$.

Композицию преобразований можно проиллюстрировать с помощью схемы на рисунке 1.5.

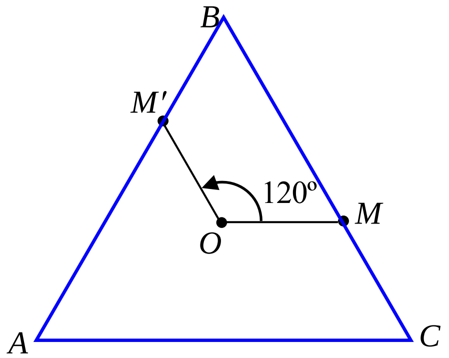


Рис. 1.4

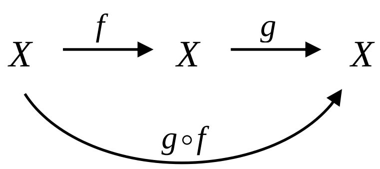


Рис. 1.5

Очевидно, что для любого преобразования $f: X \to X$ существует обратное преобразование и $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id$.

***Определение* 1.11.** Если результат последовательного выполнения двух преобразований не зависит от порядка выполнения этих преобразований, т.е. $g \circ f = f \circ g$, то говорят, что эти преобразования *коммутируют* между собой.

***Определение* 1.12.** Пусть на плоскости π задана аффинная система координат. Говорим, что формулы

$$\begin{cases} x' = \varphi_1(x, y), \\ y' = \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

являются *формулами преобразования* $f:\pi \to \pi$, если каждая точка $M(x, y)$ переходит под действием этого преобразования в точку $M'(x', y')$, координаты которой вычисляются по данным формулам.

1.2. *Аффинное преобразование*

***Определение* 1.13.** Преобразование плоскости $f:\pi \to \pi$ называется *аффинным*, если оно действует по формулам вида

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + x_0, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

и при этом $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$

Последнее условие, на самом деле, можно доказать: если $\Delta = 0$, то f не будет биекцией, а значит, и преобразованием.

В матричном виде формулы (1.1) можно переписать так:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{X}_0, \tag{1.1$'$}$$

где

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

***Пример* 1.4.** Преобразование, которое действует по формулам

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky, \quad k > 0, \end{cases}$$

представляет собой *равномерное сжатие* (при $k < 1$) или *растяжение* (при $k > 1$) вдоль оси Oy (или к оси Ox). Это преобразование является аффинным. Его действие показано на рисунке 1.6 для $k = 1/2$. Под действием такого преобразования окружность переходит в эллипс.

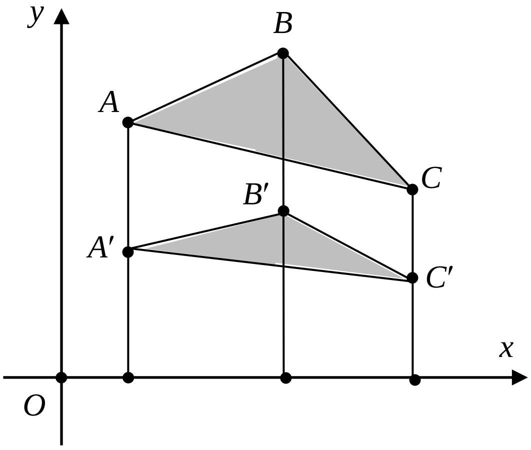


Рис. 1.6

Пусть $f:\pi \to \pi$ – аффинное преобразование плоскости. Тогда оно переводит эквивалентные направленные отрезки в эквивалентные направленные отрезки, и мы можем определить действие этого преобразования на векторы.

***Определение* 1.14.** Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $\vec{a}' = \overrightarrow{A'B'}$. Тогда пишем, что $\vec{a}' = f(\vec{a})$.

Выясним, по каким формулам аффинное преобразование действует на векторы. Пусть преобразование $f:\pi\to\pi$ определяется формулами (1.1), $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}'=\overrightarrow{A'B'}$. Тогда $\vec{a}(x_2-x_1, y_2-y_1)$ и

$$A'(a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_1\,,\,a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_2),$$

$$B'(a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_1\,,\,a_{21}x_2+a_{22}y_2+a_2),$$

$$\vec{a}'\,(a_{11}(x_2-x_1)+a_{12}(y_2-y_1)\,,\,a_{21}(x_2-x_1)+a_{22}(y_2-y_1)).$$

Таким образом, координатный столбец вектора $\overrightarrow{A'B'}$ получается умножением координатного столбца вектора $\overrightarrow{AB}$ на матрицу **A**, т.е. координаты векторов преобразуются по закону

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y\,, \\ y'=a_{21}x+a_{22}y \end{cases} \Leftrightarrow \qquad \mathbf{X}'=\mathbf{AX},$$

где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$ – координатные столбцы векторов $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ соответственно.

Замечание. Строго говоря, на векторы действует не само аффинное преобразование, а определяемое им линейное преобразование (линейный оператор) векторов плоскости. Преобразование F, действующее на множестве всех векторов плоскости, называется линейным, если для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любого действительного числа α выполняются условия: 1) $F(\vec{a}+\vec{b})=F(\vec{a})+F(\vec{b})$; 2) $F(\alpha\vec{a})=\alpha F(\vec{a})$. Справедливость этих условий в нашем случае легко установить с помощью полученных формул.

Линейные преобразования изучаются в курсе алгебры (см., например, [4, стр. 33]). В дальнейшем для краткости мы часто будем говорить об аффинном преобразовании, на самом деле имея в виду определяемое им линейное преобразование.

***Определение* 1.15.** Две фигуры называются *аффинно эквивалентными* (*аффинно конгруэнтными*), если существует аффинное преобразование, переводящее одну фигуру в другую.

***Определение* 1.16.** Говорят, что преобразование *сохраняет ориентацию плоскости*, если каждый правый (левый) репер переводит в правый (левый) репер. Преобразование *меняет ориентацию плоскости*, если каждый правый (левый) репер переводит в левый (правый) репер.

Без доказательства приведём важнейшие свойства аффинных преобразований.

1. *Определение аффинного преобразования не зависит от выбора системы координат, т.е. при выборе другой системы координат преобразование будет задаваться формулами вида* (1.1).
2. *Композиция аффинных преобразований есть аффинное преобразование.*
3. *Преобразование, обратное к аффинному, тоже является аффинным.*
4. *Тождественное преобразование является аффинным.*

5. (Основное свойство аффинных преобразований.) *Аффинное преобразование переводит прямые в прямые. При этом параллельные прямые переходят в параллельные прямые.*

6. *Аффинное преобразование с* $\Delta>0$ *сохраняет ориентацию плоскости; аффинное преобразование с* $\Delta<0$ *меняет ориентацию плоскости.*

7. *Аффинное преобразование сохраняет простое отношение трёх точек.*

8. *Аффинное преобразование отрезок переводит в отрезок.*

9. *Аффинное преобразование однозначно определяется заданием трёх точек, не лежащих на одной прямой, и их образов*: $A'=f(A)$, $B'=f(B)$, $C'=f(C)$.

10. *Аффинное преобразование треугольник переводит в треугольник. Два любых треугольника аффинно конгруэнтны.*

11. *Аффинное преобразование параллелограмм переводит в параллелограмм. Два любых параллелограмма аффинно конгруэнтны.*

12. *Аффинное преобразование эллипс (гиперболу, параболу) переводит в эллипс (гиперболу, параболу). Два любых эллипса (гиперболы, параболы) аффинно конгруэнтны.*

13. *Аффинное преобразование увеличивает площади фигур в* $|\Delta|$ *раз и, как следствие, сохраняет отношение площадей фигур.*

Замечание. Часто аффинное преобразование определяют как переводящее прямые в прямые, и потом доказывают, что оно определяется уравнениями вида (1.1).

1.3. *Основные движения плоскости. Свойства движений*

***Определение* 1.17.** *Движением плоскости* называется её преобразование, сохраняющее расстояния между точками. Это значит, что преобразование $f:\pi\to\pi$ является движением, если для любых точек A, B и их образов $A'=f(A)$ и $B'=f(B)$ выполнено $|A'B'|=|AB|$.

Из определения непосредственно вытекает, что преобразование f^{-1}, обратное к движению f, тоже является движением, и что тождественное преобразование является движением.

***Пример* 1.5.** *Параллельный перенос плоскости* p задаётся вектором $\vec{a}$. При этом переносе каждая точка A переходит в такую точку $A'=p(A)$, что $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$ (рисунок 1.7).

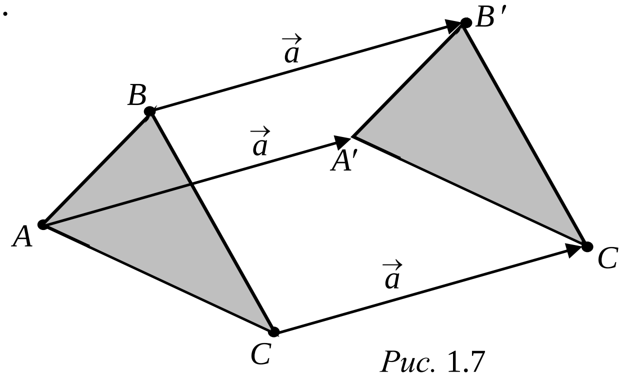


Рис. 1.7

Пусть в произвольной аффинной системе координат $A(x,y)$,

$\vec{a}(a_1, a_2)$. Тогда $A'(x+a_1, y+a_2)$. Это значит, что формулы параллельного переноса на вектор $\vec{a}$ имеют вид:

$$\begin{cases} x' = x + a_1, \\ y' = y + a_2. \end{cases} \tag{1.2}$$

Если использовать координатные столбцы

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

то формулы (1.2) можно переписать в виде матричного равенства

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \mathbf{A}. \tag{1.2$'$}$$

Обратное преобразование $p^{-1}: \pi \to \pi$, очевидно, является параллельным переносом, который задаётся вектором $-\vec{a}$. Тождественное преобразование плоскости тоже представляет собой параллельный перенос, который задаётся нулевым вектором.

Пусть p_1 есть параллельный перенос на вектор $\vec{a}(a_1, a_2)$, а p_2 – параллельный перенос на вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$. Тогда их композиция $p_2 \circ p_1$ действует по формулам

$$\begin{cases} x'' = x' + (a_1 + b_1), \\ y'' = y' + (a_2 + b_2) \end{cases}$$

и сама является параллельным переносом на вектор $\vec{a} + \vec{b}$ (рисунок 1.8). Отсюда следует, что результат выполнения двух параллельных переносов не зависит от порядка их выполнения: $p_2 \circ p_1 = p_1 \circ p_2$. Таким образом, любые параллельные переносы коммутируют между собой.

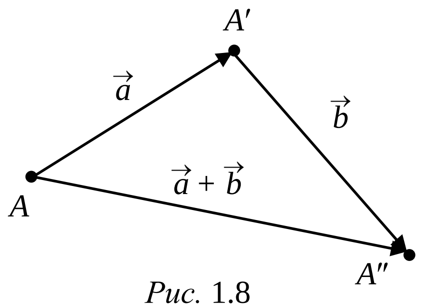


Рис. 1.8

***Пример* 1.6.** Пусть система координат является декартовой. [Поворот на угол α]() (против часовой стрелки при $\alpha > 0$ и по часовой стрелке при $\alpha < 0$) вокруг начала координат (рисунок 1.9) $r_\alpha : \pi \to \pi$ действует по формулам

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha, \\ y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha. \end{cases} \tag{1.3}$$

Эти формулы можно переписать в матричном виде:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{X}, \tag{1.3$'$}$$

где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$ такие же, как в (1.2′), а

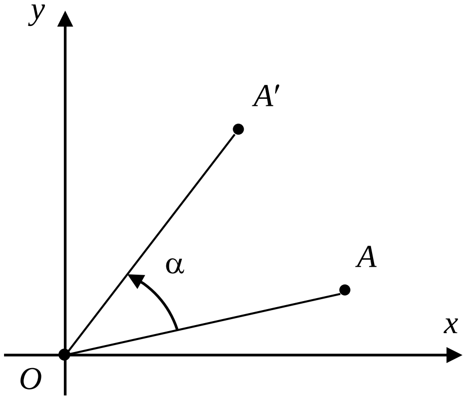


Рис. 1.9

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad -$$

матрица, которую будем называть *матрицей поворота*. Если $r_\beta : \pi \to \pi$ – поворот на угол β, то очевидно, что $r_\beta \circ r_\alpha = r_\alpha \circ r_\beta = r_{\alpha+\beta}$.

Упражнение. Самостоятельно убедитесь, что для матриц поворотов выполнено $\mathbf{R}_{\alpha+\beta} = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta = \mathbf{R}_\beta \cdot \mathbf{R}_\alpha$.

Таким образом, *при последовательном выполнении поворотов их матрицы перемножаются*. Мы также видим, что любые два поворота вокруг начала координат коммутируют между собой и их матрицы тоже коммутируют. Можно проверить, что поворот и параллельный перенос не коммутируют, т.е. результат их последовательного выполнения зависит от порядка выполнения.

Если $\alpha = 0$, то поворот представляет собой тождественное преобразование и его матрица является единичной:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что преобразование, обратное повороту на угол α, – это поворот на угол $-\alpha$: $(r_\alpha)^{-1} = r_{-\alpha}$. Он задаётся матрицей

$$\mathbf{R}_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Упражнение. Самостоятельно убедитесь, что $\mathbf{R}_{-\alpha} \cdot \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{E}$, т.е. $\mathbf{R}_{-\alpha} = (\mathbf{R}_\alpha)^{-1}$. Это значит, что обратный поворот задаётся обратной матрицей. Мы видим, что операциям над преобразованиями соответствуют точно такие же преобразования над их матрицами.

В дальнейшем поворот на угол α вокруг произвольной точки A будем обозначать $r_{A,\alpha}$. Если речь идёт о повороте вокруг начала координат или центр поворота не имеет значения, мы будем опускать обозначение точки.

***Пример* 1.7.** *Осевая симметрия* относительно прямой l задаётся следующим образом. Для того чтобы построить точку A', симметричную точке A, мы проводим перпендикуляр AA_0 к прямой l и продолжаем его ещё на такое же расстояние (рисунок 1.10). Другими словами, $\overrightarrow{A_0A'} = -\overrightarrow{A_0A}$.

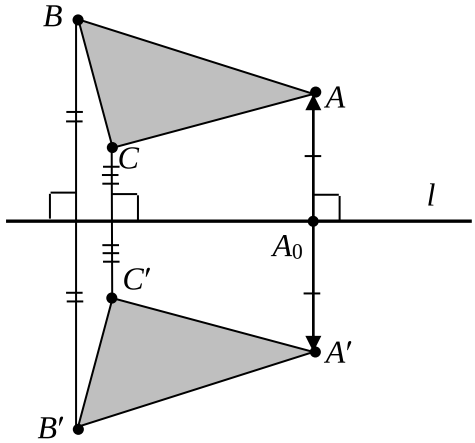


Рис. 1.10

Пусть система координат декартова. При симметрии относительно координатной оси Ox точка $A(x,y)$ переходит в точку $A'(x,-y)$ (рисунок 1.11). Поэтому эта симметрия (обозначим её s_1) задаётся формулами

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases} \qquad (1.4)$$

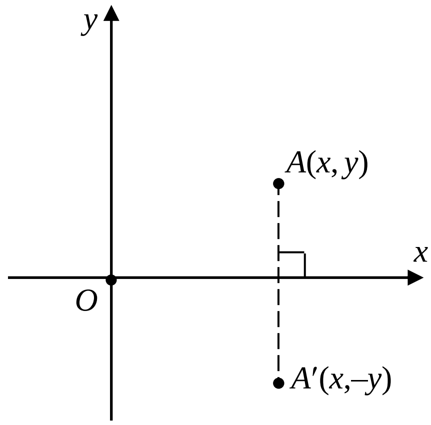


Рис. 1.11

В матричном виде (1.4) можно записать так:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{S}_1\mathbf{X},$$

где

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично симметрия относительно Oy задаётся матрицей

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем через s_l будет означать осевую симметрию относительно прямой l.

***Пример* 1.8.** <u>*Центральная симметрия*</u> s_M относительно произвольной точки M определяется следующим образом. Точка A (рисунок 1.12) переходит в такую точку A', что

$$\overrightarrow{MA'} = -\overrightarrow{MA}.$$

При симметрии относительно начала координат точка $A(x, y)$ переходит в точку $A'(-x,-y)$ (рисунок 1.13). Значит, центральная симметрия относительно начала координат s_O задаётся формулами

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases} \qquad (1.5)$$

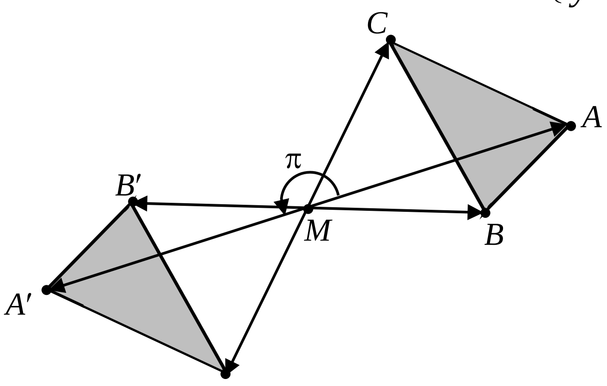


Рис. 1.12

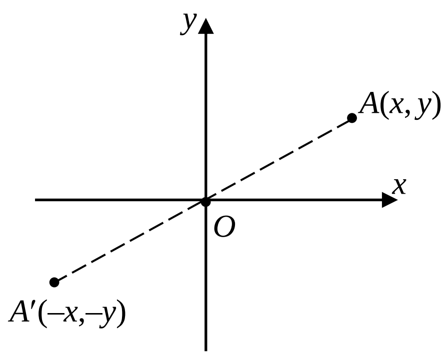


Рис. 1.13

Очевидно, что центральная симметрия – это поворот на угол 180°, и мы не будем рассматривать её как отдельное преобразование. Заметим, что при подстановке в (1.3) $\alpha = \pi$ мы как раз получим формулы (1.5).

По формулам параллельного переноса, поворота и осевой симметрии легко заметить, что эти движения являются аффинными преобразованиями. Ниже мы покажем, что любое движение является их композицией.

Отсюда будет следовать, что любое движение является аффинным преобразованием, поэтому многие свойства движений следуют из аналогичных свойств аффинных преобразований.

Перечислим важнейшие свойства движений.

1. *Композиция движений есть движение.*

2. *Преобразование, обратное к движению, тоже является движением.*

3. *Тождественное преобразование является движением.*

4. *Движение переводит прямые в прямые. При этом параллельные прямые переходят в параллельные прямые.*

5. *Пусть* $\mathcal{R}=(O, A_1, A_2)$ *и* $\mathcal{R}'=(O', A_1', A_2')$ *– произвольные ортонормированные реперы плоскости* π. *Тогда существует одно и только одно движение плоскости, которое переводит репер* $\mathcal{R}$ *в репер* $\mathcal{R}'$. *При этом движении точка* M *с данными координатами в репере* $\mathcal{R}$ *переходит в точку* M' *с такими же координатами в репере* $\mathcal{R}'$.

6. *Движение однозначно определяется заданием трёх точек, не лежащих на одной прямой, и их образов:* $A'=f(A)$, $B'=f(B)$, $C'=f(C)$.

7. *Движение с* $\Delta>0$ *сохраняет ориентацию плоскости, движение с* $\Delta<0$ *меняет ориентацию плоскости.*

8. *Движение сохраняет простое отношение трёх точек.*

9. *Движение отрезок переводит в отрезок.*

10. *Движение сохраняет площади фигур.*

11. *Движение сохраняет углы.*

Нельзя не отметить, что именно понятие движения лежит в основе определения равенства фигур. В школе равные фигуры определяются как совместимые наложением. Теперь становится понятно, что под наложением имеется в виду движение плоскости.

***Определение* 1.18.** Две фигуры на плоскости называют *равными*, если существует движение, переводящее одну фигуру в другую.

Позже мы докажем, что композиция поворота и параллельного переноса (в любой последовательности) является поворотом, только с другим центром. Композиция же осевой симметрии и параллельного переноса не всегда является осевой симметрией.

***Определение* 1.19.** Преобразование, которое является композицией осевой симметрии s_l и параллельного переноса p на вектор $\vec{a}\,||\,l$, называется *скользящей симметрией*.

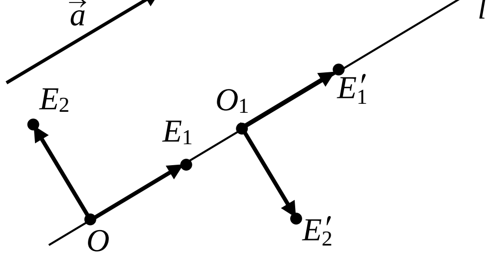


Рис. 1.14

На рисунке 1.14 показано действие скользящей симметрии на специально выбранный ортонормированный репер. Если вектор переноса $\vec{a}$ нулевой, то тогда скользящая симметрия является осевой симметрией, в противном случае – не является.

1.4. *Группа движений плоскости и её подгруппы*

***Определение* 1.20.** Пусть G – некоторое множество преобразований плоскости (необязательно всех). Введём на этом множестве операцию умножения преобразований – их композицию: $f \cdot g = f \circ g$. Если относительно этой операции G образует группу, то G называется *группой преобразований плоскости*.

Понятие группы изучается в курсе алгебры. Напомним определение.

***Определение* 1.21.** Пусть G – произвольное непустое множество, на котором задана операция «$\cdot$», сопоставляющая каждым двум элементам $f, g \in G$ третий элемент из этого же множества. Говорим, что множество G с операцией «$\cdot$» образует *группу*, если выполнены следующие аксиомы:

1. $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)\ \forall f, g, h \in G$ – ассоциативность умножения.

2. $\exists\, e \in G$ такой, что $e \cdot f = f \cdot e = f$ – существование единичного (нейтрального) элемента.

3. $\forall f \in G\ \exists f^{-1} \in G$ такой, что $f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = e$ – существование обратного элемента.

Обозначаем группу так: $\langle G, \cdot \rangle$.

Пусть G – множество всех преобразований плоскости. Как мы уже отмечали, композиция преобразований обладает свойством ассоциативности, нейтральным элементом является тождественное преобразование, обратный элемент также всегда существует – обратное преобразование. Таким образом, множество G всех преобразований плоскости образует группу.

***Определение* 1.22.** Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ – группа, а $H \subset G$ – некоторое подмножество G. Тогда H называется *подгруппой группы* G, если относительно операции «$\cdot$» H является группой.

Пусть H – подмножество G. Для того чтобы проверить, что H является подгруппой G, достаточно убедиться в следующем:

1) замкнутость H относительно групповой операции;

2) $\forall f \in H$ обратное преобразование f^{-1} тоже принадлежит H.

Действительно, ассоциативность композиции выполняется автоматически, а принадлежность H тождественного преобразования следует из приведённых двух условий.

В примерах 1.5 и 1.6 (раздел 1.3) мы показали, что множество всех параллельных переносов плоскости и множество всех поворотов плоскости около начала координат удовлетворяют этим двум условиям, т.е. образуют группы. Обозначим через $SO(2)$ группу поворотов вокруг начала координат, через $P(2)$ – группу параллельных переносов, а через $E(2)$ – группу всех движений плоскости. Тогда $SO(2)$, $P(2)$ – подгруппы в $E(2)$.

Поскольку $s_1 \cdot s_1 = id$, то симметрия s_1 плоскости относительно Ox вместе с тождественным преобразованием образует группу $S(2)$, состоящую из двух элементов. Она также является подгруппой в $E(2)$.

Обозначим через $O(2)$ группу, которую образуют все повороты с центром в начале координат, симметрии относительно Ox и их композиции.

***Определение* 1.23.** $O(2)$ называется *ортогональной группой*, а $SO(2)$ – *специальной ортогональной группой*.

Легко проверить, что совокупность всех аффинных преобразований плоскости образует группу, обозначим её $A(2)$. Все рассмотренные выше группы движений являются подгруппами в $A(2)$.

Замечание. Когда мы говорим о группе $S(2)$, речь не идёт о группе, которая включает в себя симметрии относительно всех прямых. Можно доказать, что любое движение плоскости можно разложить в композицию не более чем трёх симметрий. Таким образом, группа, которая включает в себя все симметрии, содержит и все движения плоскости.

1.5. *Аналитическое выражение движений плоскости*

Если два ортонормированных базиса $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ одинаково ориентированы, то $\mathcal{B}'$ получается из $\mathcal{B}$ поворотом, если все векторы отложить из одной точки.

Пусть f – движение плоскости, $\mathcal{R} = (O, E_1, E_2)$ – произвольный ортонормированный репер, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – соответствующий векторный базис. Тогда под действием движения репер $\mathcal{R}$ переходит в новый репер $\mathcal{R}' = f(\mathcal{R}) = (O', E_1', E_2')$.

Случай 1. Пусть репер $\mathcal{R}'$ одинаково ориентирован с $\mathcal{R}$. Рассмотрим параллельный перенос p плоскости на вектор $\overrightarrow{OO'}$ (при этом возможно, что $O = O'$, т.е. $\overrightarrow{OO'}$ нулевой), в результате которого получим промежуточный репер $\mathcal{R}'' = p(\mathcal{R}) = (O', E_1'', E_2'')$. Он имеет тот же векторный базис, что и репер $\mathcal{R}$. Тогда $\mathcal{R}'$ получается из $\mathcal{R}''$ в результате поворота $r_{O',\alpha}$ (рисунок 1.15) на некоторый угол α (при этом α может быть равным нулю).

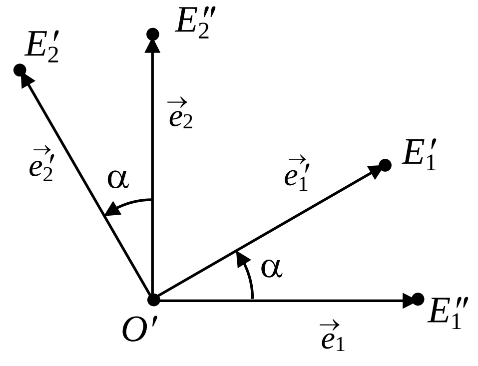


Рис. 1.15

Рассмотрим преобразование $f_1 = r_{O',\alpha} \circ p$. Тогда f_1 так же, как и f, переводит репер $\mathcal{R}$ в репер $\mathcal{R}'$. Согласно свойству 9 аффинных преобразований, эти преобразования совпадают: $f_1 = f$.

Тем самым мы доказали, что f раскладывается в композицию параллельного переноса и поворота (либо само является поворотом $r_{O,\alpha}$ около O, если $O = O'$, или параллельным переносом p на вектор $\overrightarrow{OO'}$, если $\alpha = 0$).

Из этого следует, что и любой другой репер плоскости будет переходить в одинаково ориентированный с ним репер, т.е. f сохраняет ориентацию плоскости.

Случай 2. Пусть $\mathcal{R}'$ и $\mathcal{R}$ противоположно ориентированы. Рассмотрим такие же параллельный перенос p и промежуточный репер $\mathcal{R}'' = (O', E_1'', E_2'')$. Тогда репер $\mathcal{R}'$ получается из $\mathcal{R}''$ в результате действия двух преобразований: симметрии s относительно оси $O'E_1''$ и поворота $r_{O',\alpha}$ (рисунок 1.16). Преобразование $r_{O',\alpha} \circ s \circ p$ является движением и переводит репер $\mathcal{R}$ в репер $\mathcal{R}'$, поэтому оно совпадает с f. Значит, f раскладывается в композицию параллельного переноса, поворота и симметрии (при этом параллельный перенос и поворот могут оказаться тождественными преобразованиями). Из этого следует, что и любой другой репер плоскости будет переходить в противоположно ориентированный с ним репер, т.е. f меняет ориентацию плоскости.

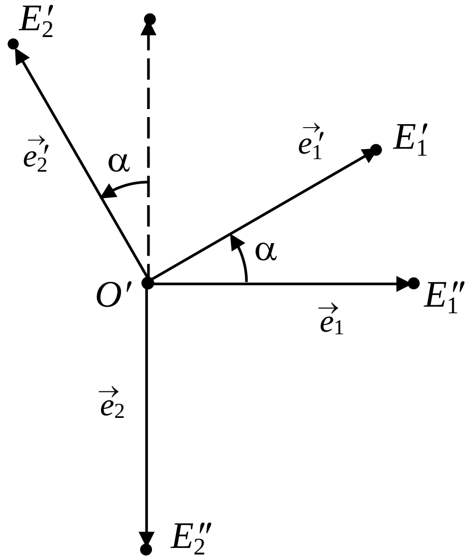


Рис. 1.16

Определение **1.24.** Если движение плоскости не меняет ориентацию плоскости, то оно называется *движением первого рода*. Если движение меняет ориентацию плоскости, то оно называется *движением второго рода*.

Пусть f – движение первого рода, $f = r_\alpha \circ p$ – его разложение в композицию параллельного переноса и поворота. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка плоскости, $M'(x', y') = f(M)$, а $M''(x'', y'')$ – промежуточная точка, получающаяся из M в результате параллельного переноса: $M'' = p(M)$. Тогда $M' = r_\alpha(M'')$. Пусть $\vec{p}(a_1, a_2)$ – вектор, задающий перенос. Тогда в декартовой системе координат имеем формулы:

$$\begin{cases} x'' = x + a_1, \\ y'' = y + a_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x''\cdot\cos\alpha - y''\cdot\sin\alpha, \\ y = x''\cdot\sin\alpha + y''\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Отсюда получаем формулы, задающие движение первого рода:

$$\begin{cases} x' = (x + a_1)\cdot\cos\alpha - (y + a_2)\cdot\sin\alpha, \\ y' = (x + a_1)\cdot\sin\alpha + (y + a_2)\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Если раскрыть скобки и обозначить

$$x_0 = a_1\cdot\cos\alpha - a_2\cdot\sin\alpha, \quad y_0 = a_1\cdot\sin\alpha + a_2\cdot\cos\,\alpha,$$

то получим формулы:

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha + x_0, \\ y' = x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha + y_0. \end{cases} \qquad (1.6)$$

В матричном виде:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{R}_\alpha\mathbf{X} + \mathbf{X}_0.$$

Пусть f – движение второго рода. Тогда параллельный перенос задаётся теми же формулами, а преобразование $r_\alpha \circ s$ задаётся матрицей

$$\mathbf{R}'_\alpha = \mathbf{R}_\alpha\,\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем формулы, задающие движение:

$$\begin{cases} x' = (x + a_1)\cdot\cos\alpha + (y + a_2)\cdot\sin\alpha, \\ y' = (x + a_1)\cdot\sin\alpha - (y + a_2)\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Если раскрыть скобки и обозначить

$$x_0 = a_1\cdot\cos\alpha + a_2\cdot\sin\alpha, \quad y_0 = a_1\cdot\sin\alpha - a_2\cdot\cos\,\alpha,$$

то получим формулы:

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha + x_0, \\ y' = x\cdot\sin\alpha - y\cdot\cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

Замечание. Разложение движения $f = r_\alpha \circ p$ или $f = r_\alpha \circ s \circ p$ не является единственным и зависит от выбора репера $\mathcal{R}$ и от порядка, в котором мы производим разложение. Например, преобразование, изображённое на рисунке 1.16, можно осуществить и другим способом: сначала поворот, а затем симметрия относительно $O'E'_1$. Можно совершить поворот на угол $\pi + \alpha$, а затем симметрию относительно $O'E'_2$ (рисунок 1.17).

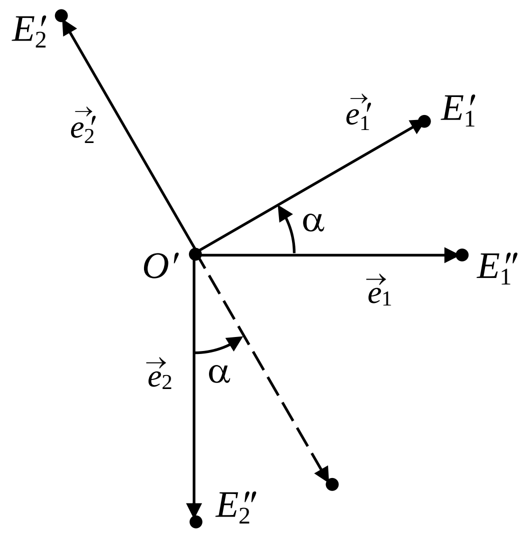


Рис. 1.17

1.6. *Классификация движений плоскости*

***Определение* 1.25.** Точка M плоскости называется <u>*неподвижной точкой преобразования*</u> $f: \pi \to \pi$, если $f(M) = M$. Прямая l называется *инвариантной относительно преобразования* f, если каждая точка этой прямой переходит под действием преобразования в точку этой же прямой: $N \in l \Rightarrow f(N) \in l$. Если каждая точка прямой l является неподвижной точкой преобразования f, то и вся прямая l тоже называется *неподвижной прямой*.

I. ***Классификация движений первого рода***

1. *Движение* f *имеет более чем одну неподвижную точку.* Тогда f – тождественное преобразование (симметрия относится к движениям второго рода).

2. *Движение* f *имеет ровно одну неподвижную точку.* Тогда f – поворот на угол $\alpha \neq 0$.

2.1. $\alpha \neq \pi$ и $\alpha \neq -\pi$. Тогда f не имеет инвариантных прямых.

2.2. $\alpha = \pm\pi$, т.е f – центральная симметрия. Тогда f имеет бесконечное множество инвариантных прямых. Инвариантными будут все прямые, которые проходят через точку O, и только они.

3. *Движение* f *не имеет неподвижных точек.* Тогда f – это параллельный перенос. Инвариантными будут все прямые, параллельные вектору переноса, и только они.

II. ***Классификация движений второго рода***

1. *Движение* f *имеет прямую, состоящую из неподвижных точек.* Тогда f – осевая симметрия (тождественное преобразование относится к движениям первого рода).

2. *Движение* f *не имеет неподвижных точек.* Тогда такое преобразование можно представить в виде композиции $f = s \circ p$ параллельного переноса и осевой симметрии, причём вектор переноса и ось симметрии параллельны. Как мы уже выяснили, такое преобразование называется скользящей симметрией.

Если выбрать ортонормированный репер $\mathcal{R} = (O, E_1, E_2)$ так, что $O, E_1 \in l$ (рисунок 1.14), то получим формулы для преобразований p и s_l:

$$p\colon \begin{cases} x'' = x + a, \\ y'' = y, \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x' = x'', \\ y' = -y''. \end{cases}$$

Отсюда выводим формулы

$$f\colon \begin{cases} x' = x + a, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Скользящая симметрия не имеет неподвижных точек и имеет ровно одну инвариантную прямую.

Все найденные виды движений, а также их неподвижные точки и инвариантные прямые представим в таблице 1.

***Таблица* 1**

Название движения	Инвариантные точки	Инвариантные прямые
1. Тождественное преобразование	все точки плоскости	все прямые плоскости
2.1. Поворот на угол $\alpha \neq \pm\pi$, $\alpha \neq 0$	центр поворота	нет
2.2. Центральная симметрия ($\alpha = \pm\pi$)	центр симметрии O	любая прямая, проходящая через O
3. Параллельный перенос на вектор $\vec{p} \neq \vec{0}$.	нет	любая прямая, параллельная вектору $\vec{p}$
4. Осевая симметрия	все точки оси	ось симметрии и любая перпендикулярная ей прямая
5. Скользящая симметрия	нет	ось симметрии

Заметим, что тождественное преобразование тоже можно отнести и к поворотам (при $\alpha = 0$), и к параллельным переносам (при $\vec{a} = \vec{0}$). Также можно считать, что центральная симметрия является частным случаем поворота, а осевая симметрия – частным случаем скользящей симметрии. Поэтому можно сказать, что любое движение плоскости есть одно из трёх: параллельный перенос, поворот, скользящая симметрия.

Очевидно, что композиция двух движений первого рода есть движение первого рода, и движение, обратное к движению первого рода, тоже является движением первого рода. Тождественное преобразование также относится к первому роду. Таким образом, все движения первого рода образуют группу, которую обозначим $SE(2)$.

1.7. *Группа симметрий геометрической фигуры*

Пусть F – некоторая фигура на плоскости. Обозначим G_F – множество всех движений плоскости, переводящих фигуру F в себя. Очевидно, что $id \in G_F$, и если $f, g \in G_F$, то $g \circ f \in G_F$ и $f^{-1} \in G_F$. Следовательно, G_F – это группа, которая является подгруппой в группе $E(2)$.

***Пример* 1.9.** Пусть F – это треугольник, который не является равнобедренным (рисунок 1.18). Под действием движения из G_F каждая сторона треугольника должна переходить в другую сторону, равную ей. Но поскольку равных сторон нет, то каждая сторона может переходить только сама в себя. Следовательно, все вершины должны оставаться на месте, а это значит, что группа G_F содержит только тождественное преобразование.

***Пример* 1.10.** Пусть F – это равнобедренный треугольник (рисунок 1.19). Тогда одна боковая сторона может под действием движения либо переходить в себя, либо в другую боковую сторону, а основание может переходить только в себя. Следовательно, группа G_F состоит из двух элементов: тождественного преобразования и симметрии относительно высоты, проведённой к основанию.

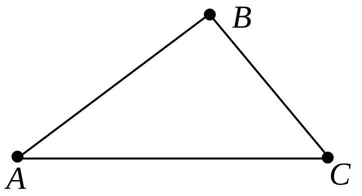


Рис. 1.18

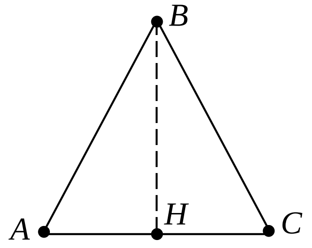


Рис. 1.19

***Пример* 1.11.** Пусть F – это равносторонний треугольник (рисунок 1.20). Тогда группа G_F состоит из шести элементов: тождественного преобразования, симметрий относительно всех высот треугольника и поворотов на $120°$ и $240°$ вокруг центра O треугольника. Каждая из симметрий является преобразованием второго рода, а композиция любых двух симметрий является преобразованием первого рода, т.е. поворотом. Например, если мы совершим последовательно симметрии относительно AH_1 и AH_2, то получим поворот на $120°$ вокруг O.

***Пример* 1.12.** Пусть F – это квадрат. Тогда G_F состоит из восьми элементов: тождественного преобразования, четырёх симметрий относительно диагоналей и прямых, соединяющих середины противоположных сторон, а также из поворотов на $90°$, $180°$ и $270°$ вокруг центра O (рисунок 1.21).

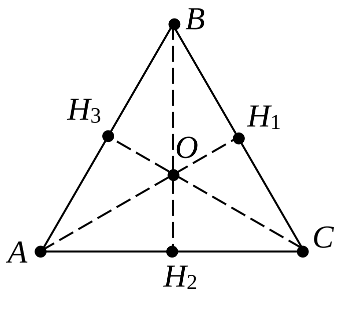


Рис. 1.20

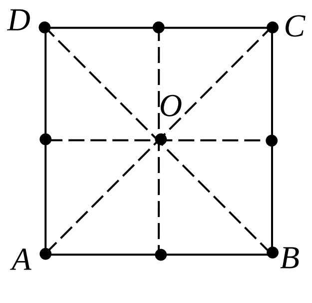


Рис. 1.21

Упражнение. Самостоятельно определите, из каких элементов состоят группы G_F для произвольных прямоугольника, ромба, эллипса, а также для правильного шестиугольника.

***Пример* 1.13.** Пусть F – это окружность. Тогда G_F содержит бесконечное число элементов. Эта группа включает в себя все повороты вокруг центра окружности и симметрии относительно всех прямых, проходящих через центр.

***Пример* 1.14.** Пусть F состоит из двух параллельных прямых l_1 и l_2 (рисунок 1.22). Тогда G_F тоже состоит из бесконечного числа элементов. Эта группа включает в себя параллельные переносы на любой вектор, параллельный прямым, симметрию относительно прямой h, равноудалённой от l_1 и l_2, а также симметрии относительно всех прямых, перпендикулярных l_1 и l_2. Те же самые симметрии имеет фигура, состоящая из l_1, l_2 и всех точек, лежащих между ними (полоса).

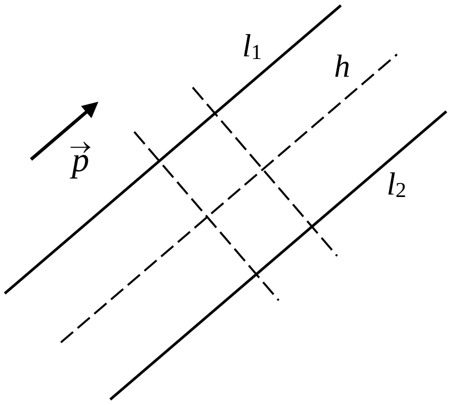


Рис. 1.22

Упражнение. Укажите, какие ещё движения входят в G_F для полосы.

***Определение* 1.26.** Фигура F называется <u>*ограниченной*</u>, если её можно поместить в круг достаточно большого радиуса (т.е. существуют число R и точка O такие, что $F \subseteq B(O,R)$, где $B(O,R) = \{M \mid |OM| \le R\}$).

<u>*Свойства группы*</u> G_F <u>*для ограниченной фигуры*</u> F:

1. *G_F не содержит параллельных переносов (кроме переноса на $\vec{0}$) и скользящих симметрий.*

2. *F имеет не более чем один центр симметрии.*

3. *Если F имеет центр симметрии O, то все оси симметрии (если они существуют) проходят через O.*

4. *Если F имеет более чем одну ось симметрии, то все оси симметрии проходят через одну точку.*

***Определение* 1.27.** Группа G_F для ограниченной фигуры F называется <u>*группой симметрий*</u> фигуры F.

1.8. *Преобразование подобия*

***Определение* 1.28.** Преобразование $g:\pi \to \pi$ называется <u>*подобием*</u>, если для любых точек $A, B \in \pi$ и их образов $A' = g(A)$, $B' = g(B)$ выполнено $|A'B'| = k|AB|$, где $k = \text{const} > 0$. Число k называется <u>*коэффициентом подобия*</u>.

В дальнейшем такое преобразование обозначаем g_k.

***Определение* 1.29.** <u>*Гомотетией с центром в точке*</u> A называется преобразование плоскости, которое каждой точке M плоскости сопоставляет точку M' так, что

$$\overrightarrow{AM'} = t\overrightarrow{AM}, \tag{1.7}$$

где $t \neq 0$. Число t называется <u>*коэффициентом гомотетии*</u>.

В дальнейшем будем обозначать гомотетию с центром в точке A и коэффициентом t как $h_{A,t}$. В тех случаях, когда центр находится в начале координат или он не имеет значения, обозначение точки будем опускать.

На рисунках 1.23 и 1.24 показано, как строится $\Delta A'B'C'$, гомотетичный данному ΔABC с коэффициентами 2 и –2, если центр гомотетии находится в начале координат.

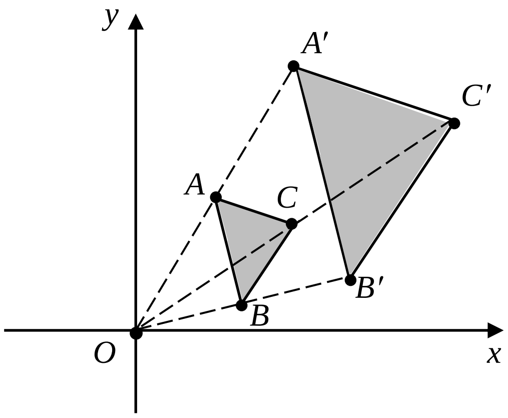


Рис. 1.23

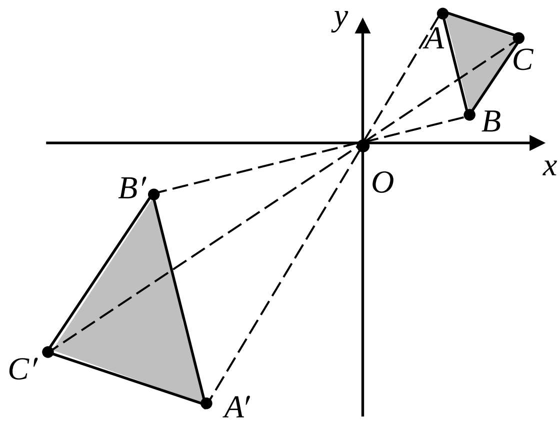


Рис. 1.24

Докажем, что гомотетия является подобием. Пусть M_1, M_2 – произвольные точки, а M_1', M_2' – их образы, A – центр гомотетии. Тогда

$$\overrightarrow{M_1'M_2'} = \overrightarrow{AM_2'} - \overrightarrow{AM_1'} = t\overrightarrow{AM_2} - t\overrightarrow{AM_1} = t(\overrightarrow{AM_2} - \overrightarrow{AM_1}) = t\overrightarrow{M_1M_2}.$$

Согласно определению произведения вектора на число, $|M_1'M_2'| = |t||M_1M_2|$. Значит, гомотетия является подобием с коэффициентом $k = |t|$.

При $k=1$ подобие будет движением. При $t=1$ гомотетия будет тождественным преобразованием, а при $t=-1$ – центральной симметрией.

Пусть центр O гомотетии h_t является началом ортонормированного репера $\mathcal{R} = \{O, E_1, E_2\}$ и в этом репере $M(x, y)$, $M'(x', y')$. Тогда $\overrightarrow{OM}(x, y)$, $\overrightarrow{OM'}(x', y')$, и из определения 1.29 получаем формулы, по которым действует h_t :

$$\begin{cases} x' = tx, \\ y' = ty. \end{cases} \tag{1.8}$$

Заметим, что эти формулы верны и в произвольной аффинной системе координат.

Произвольное подобие является композицией гомотетии и движения. Формулы (1.8) можно записать в матричном виде так:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{H}_t \mathbf{X}, \tag{1.8′}$$

где

$$\mathbf{H}_t = t\mathbf{E} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

($\mathbf{E}$ – единичная матрица).

Очевидно, что $h_k \circ h_t = h_t \circ h_k = h_{tk}$ и $\mathbf{H}_k\mathbf{H}_t = \mathbf{H}_t\mathbf{H}_k = \mathbf{H}_{tk}$, т.е. две гомотетии с центром в начале координат коммутируют, и композиции гомотетий соответствует произведение их матриц. При этом коэффициенты гомотетий тоже перемножаются.

Преобразованием, обратным к h_k, является $h_{1/k}$. Оно задаётся матрицей $\mathbf{H}_{1/k}$.

Свойства гомотетии:

1. *Гомотетия, отличная от тождественного преобразования, переводит прямую, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную ей прямую, а прямую, проходящую через центр гомотетии, – в себя.*
2. *Гомотетия сохраняет ориентацию плоскости.*
3. *Гомотетия обладает всеми свойствами движений* **1**–**7** *из* §1.3.

***Теорема* 1.1.** *Пусть g_k – преобразование подобия с коэффициентом k, а h_k – гомотетия с тем же коэффициентом и центром в произвольной точке M_0. Тогда существует одно и только одно движение f такое, что $g_k = f \circ h_k$.*

Из этой теоремы и свойств гомотетии следует, что *подобие тоже обладает свойствами* **1**–**8** *аффинных преобразований из* §1.2.

Упражнение. Выпишите эти свойства ещё раз, переформулировав их для подобия.

Пусть g_k – преобразование подобия и $g_k = h_k \circ f$ – его разложение в соответствии с теоремой 1.4. Гомотетия g_k сохраняет ориентацию плоскости. Движение f либо сохраняет ориентацию плоскости, либо меняет её. В соответствии с этим подобие либо сохраняет ориентацию плоскости, либо меняет её.

***Определение* 1.30.** Если подобие сохраняет ориентацию плоскости, то оно называется *преобразованием подобия первого рода*. Если подобие меняет ориентацию плоскости, то оно называется *преобразованием подобия второго рода*.

Пусть g_k – подобие первого рода с коэффициентом k, а h_k – гомотетия с тем же коэффициентом и центром в начале координат. Пусть f – движение такое, что $g_k = f \circ h_k$. Тогда f действует по формулам:

$$\mathbf{X}' = (\mathbf{R}_\alpha \mathbf{H}_k)\mathbf{X} + \mathbf{X}_0 .$$

Найдём произведение матриц:

$$\mathbf{R}_\alpha \mathbf{H}_k = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{pmatrix} = k\mathbf{R}_\alpha .$$

В итоге действие f в матричном виде записывается так:

$$\mathbf{X}' = k\mathbf{R}_\alpha\mathbf{X} + \mathbf{X}_0,$$

а в развёрнутом виде:

$$\begin{cases} x' = kx\cdot\cos\alpha - ky\cdot\sin\alpha + x_0, \\ y' = kx\cdot\sin\alpha + ky\cdot\cos\alpha + y_0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Аналогично подобие второго рода задаётся формулами:

$$\begin{cases} x' = kx\cdot\cos\alpha + ky\cdot\sin\alpha + x_0, \\ y' = kx\cdot\sin\alpha - ky\cdot\cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

***Теорема* 1.2.** *Преобразование подобия, отличное от движения, имеет неподвижную точку, и притом только одну.*

Доказательство. Пусть f – подобие первого рода с коэффициентом k, а $M(x, y)$ – его неподвижная точка. Тогда согласно (1.9) должно выполняться

$$\begin{cases} x = kx\cdot\cos\alpha - ky\cdot\sin\alpha + x_0, \\ y = kx\cdot\sin\alpha + ky\cdot\cos\alpha + y_0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(k\cdot\cos\alpha - 1) - ky\cdot\sin\alpha = -x_0, \\ kx\cdot\sin\alpha + y(k\cdot\cos\alpha - 1) = -y_0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = (k\cdot\cos\alpha - 1)^2 + (k\cdot\sin\alpha)^2 = k^2 - 2k\cdot\cos\alpha + 1 \geq 0$$

(самостоятельно разберитесь, почему). При этом $\Delta = 0$ возможно только тогда, когда одновременно $k = 1$ и $\alpha = 0$, что соответствует тождественному преобразованию. Значит, по правилу Крамера система (1.10) имеет решение, и притом единственное.

Аналогично, если f – подобие второго рода с коэффициентом k, получаем систему

$$\begin{cases} x(k\cdot\cos\alpha - 1) + ky\cdot\sin\alpha = -x_0, \\ kx\cdot\sin\alpha - y(k\cdot\cos\alpha + 1) = -y_0. \end{cases}$$

Её определитель

$$\Delta = -k^2\cos^2\alpha + 1 - k^2\sin^2\alpha = 1 - k^2$$

не равен 0 при $k \neq 1$. Значит, эта система тоже имеет единственное решение.

Следствие. *Если преобразование подобия не имеет неподвижных точек или имеет более одной неподвижной точки, то оно является движением.*

Классификация преобразований подобия

I. *Подобия первого рода*:

1. *Гомотетия.*
2. *Центрально-подобное вращение (композиция гомотетии и поворота, имеющих общий центр).*
3. *Параллельный перенос.*

II. <u>*Подобия второго рода:*</u>

1. *Осевая симметрия.*
2. *Центрально-подобная симметрия (композиция гомотетии и симметрии, если центр гомотетии лежит на оси симметрии).*
3. *Скользящая симметрия.*

Мы уже отмечали, что под действием аффинного преобразования площади многоугольников изменяются по закону $S(\Phi') = |\Delta| \cdot S(\Phi)$. В случае движения $|\Delta| = 1$, и движения сохраняют площади фигур. В случае подобия с коэффициентом k выполнено $|\Delta| = k^2$, поэтому при увеличении линейных размеров в k раз площадь плоской фигуры возрастает в k^2 раз.

1.9. *Перспективно-аффинное преобразование*

***Определение* 1.31.** Аффинное преобразование $f: \pi \to \pi$ называется <u>*перспективно-аффинным*</u>, если оно имеет по крайней мере две неподвижные точки и при этом не является тождественным. Прямая, проходящая через неподвижные точки, называется <u>*осью*</u> перспективно-аффинного преобразования.

Найдём формулы, по которым действует такое преобразование. Выберем аффинный репер $\mathcal{R} = (O, E_1, E_2)$ так, чтобы неподвижными были точки O и E_1. Мы имеем $O(0, 0)$, $E_1(1, 0)$. Подставляем эти координаты в (1.1):

$$\begin{cases} 0 = a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 + x_0, \\ 0 = a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 0 + y_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 + x_0, \\ 0 = a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 + y_0. \end{cases}$$

Из первой системы получаем $x_0 = y_0 = 0$, а затем из второй системы находим $a_{11} = 1$, $a_{21} = 0$. Значит, формулы перспективно-аффинного преобразования в данном репере имеют вид

$$\begin{cases} x' = x + a_{12} y, \\ y' = a_{22} y. \end{cases} \tag{1.11}$$

Из этой системы находим, что точка $E_2(0, 1)$ переходит в точку $E_2'(a_{12}, a_{22})$.

Свойства перспективно-аффинного преобразования:

1. *Любая точка оси перспективно-аффинного преобразования является неподвижной под действием этого преобразования.*
2. *Если A, B – произвольные точки плоскости, не лежащие на оси, A', B' – их образы под действием перспективно-аффинного преобразования, то прямые AA' и BB' параллельны или совпадают.*
3. *Если прямая l пересекает ось перспективно-аффинного преобразования в точке A, то её образ l' тоже проходит через точку A. Если l параллельна оси, то её образ l' тоже параллелен оси.*
4. *Перспективно-аффинное преобразование однозначно определяется заданием оси a и двух соответственных точек B и B' ($B \notin a$).*

Пусть даны ось a и соответственные точки B *и* B' ($B \notin a$), а M – произвольная точка плоскости. Покажем, что мы можем однозначно построить её образ M'.

Построим прямую $m || BB'$, проходящую через M (рисунки 1.25 и 1.26). Согласно свойству 3 образ M' точки M лежит на этой прямой. Пусть $N = BM \cap a$. Тогда согласно свойству 3 прямая BN переходит в прямую $B'N$. Значит, $M' \in B'N$. Итак, $M' = m \cap B'N$.

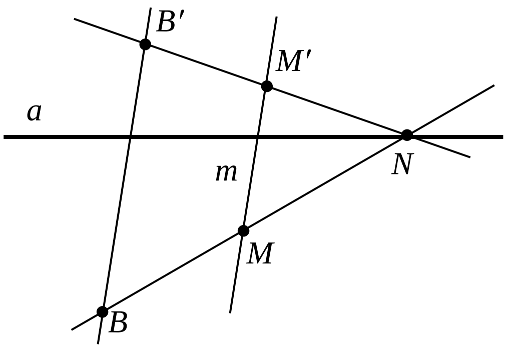


Рис. 1.25

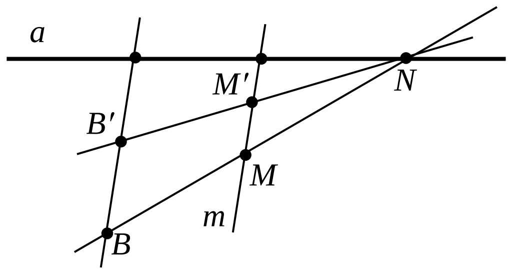


Рис. 1.26

Заметим, что в этом построении не имеет значения, лежат ли точки M и M' по одну сторону от оси преобразования или по разные стороны.

Когда $BB' || a$, ход построения не меняется (рисунок 1.27). Мы показали построение двух соответственных точек, лежащих по разные стороны от оси: из M получается M', из P получается P'.

Ход построения немного меняется, если окажется, что $BM || a$. Тогда прямая $B'M'$ тоже должна быть параллельной к a (рисунок 1.28). Поэтому проводим прямую $n || BM$ через точку B'. Тогда $M' = m \cap n$.

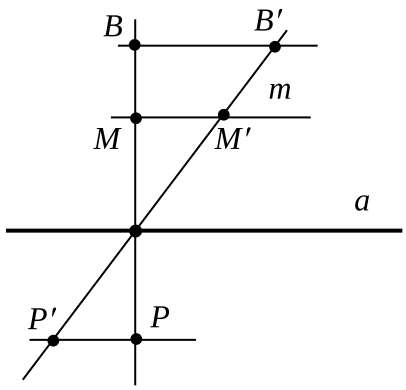


Рис. 1.27

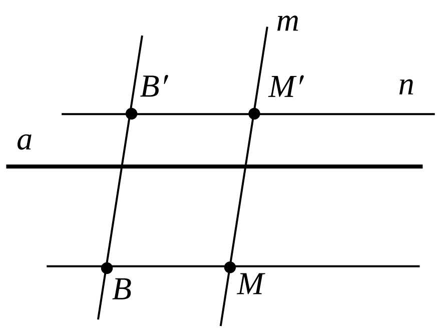


Рис. 1.28

Мы видим, что при перспективно-аффинном преобразовании каждая точка может смещаться по прямой, пересекающей ось, а может смещаться параллельно оси.

***Определение* 1.32.** Если соответственные точки перспективно-аффинного преобразования лежат на прямых, не параллельных оси, то преобразование называется *косым сжатием плоскости*, а направление прямых, соединяющих соответственные точки, – *направлением сжатия*. Если соответственные точки перспективно-аффинного преобразования лежат на прямых, параллельных оси, то преобразование называется *сдвигом плоскости*.

Пусть $f:\pi\to\pi$ – сдвиг плоскости. Выберем ортонормированный репер $\mathcal{R}=(O, E_1, E_2)$ так, чтобы $\{O, E_1\}\in a$. Тогда $\overrightarrow{E_2E_2'}\,||\,a$ (рисунок 1.29). Поэтому $E_2'(a_{12},1)$, и формулы преобразования принимают вид:

$$\begin{cases} x'=x+a_{12}y, \\ y'=y. \end{cases}$$

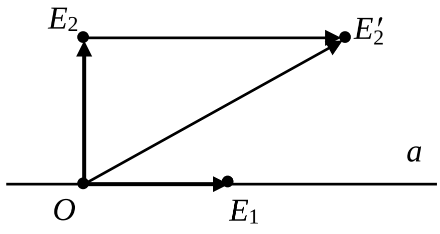


Рис. 1.29

Пусть $f:\pi\to\pi$ – косое сжатие, a – его ось. Тогда в таком же ортонормированном репере преобразование будет задаваться формулами (1.11) при $a_{22}\neq 1$. Если же допустить, что репер $\mathcal{R}=(O,A_1,A_2)$ может быть аффинным (не ортонормированным), то мы можем выбрать его следующим образом. Сначала выбираем $A_2\notin a$, затем получаем $O=A_2A_2'\cap a$, и после этого выбираем $A_1\in a,\ A_1\neq O$ (рисунок 1.30). В таком случае $A_2'(0, k)$. Поэтому формулы (1.11) принимают вид

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=ky. \end{cases} \tag{1.12}$$

Так как f не является тождественным, то $k\neq 1$. Число k называется *коэффициентом сжатия* (при $|k|>1$ мы будем иметь растяжение). Заметим, что k может быть отрицательным.

Пусть M – произвольная точка плоскости, M' – её образ, а $M_0= =MM'\cap a$ (рисунок 1.31). Тогда f действует по правилу: $\overrightarrow{M_0M'}=k\overrightarrow{M_0M}$.

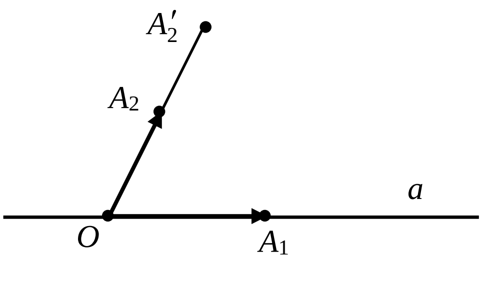


Рис. 1.30

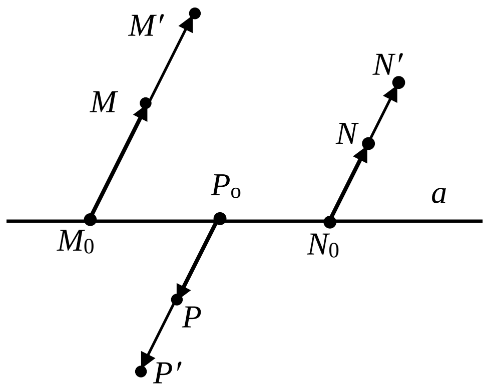


Рис. 1.31

Действительно, если в выбранном репере $M(x,y)$, то $M'(x,ky)$, $M_0(x, 0)$. Поэтому $\overrightarrow{M_0M}\,(0, y)$, $\overrightarrow{M_0M'}(0, ky)$. Это значит, каждая точка становится в $|k|$ раз дальше от оси, при этом все точки смещаются по параллельным прямым. При отрицательном k точка переходит в другую полуплоскость относительно оси.

***Определение* 1.33.** Если $k=-1$, то косое сжатие плоскости называется *косой симметрией*. Если направление сжатия перпендикулярно оси a, то косое сжатие плоскости называется *сжатием к прямой* a.

На рисунках 1.32–1.35 показано, как преобразуется фигура под действием сжатия к прямой, косого сжатия (с положительным коэффициентом), сдвига плоскости и косой симметрии соответственно.

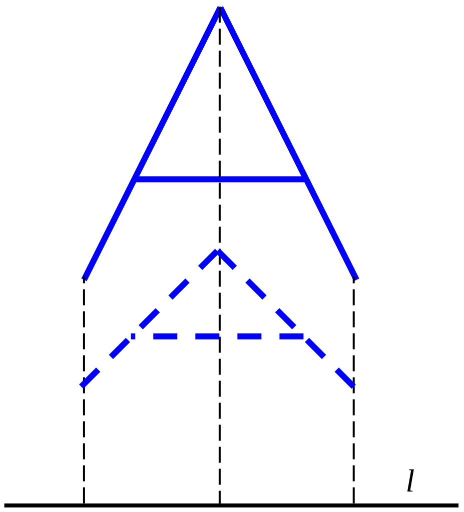


Рис. 1.32

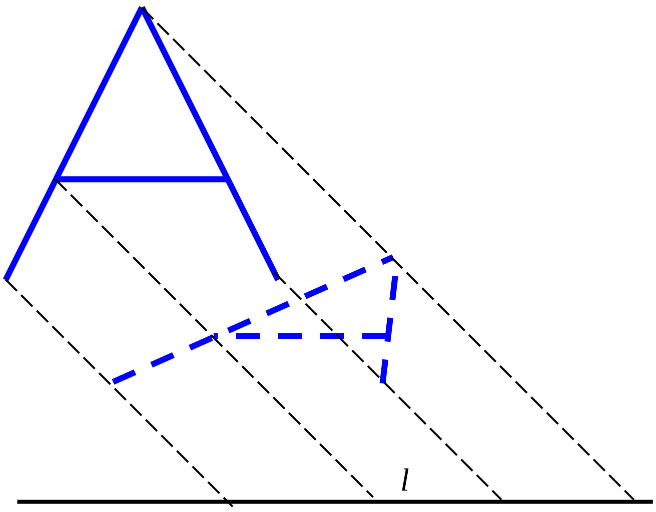


Рис. 1.33

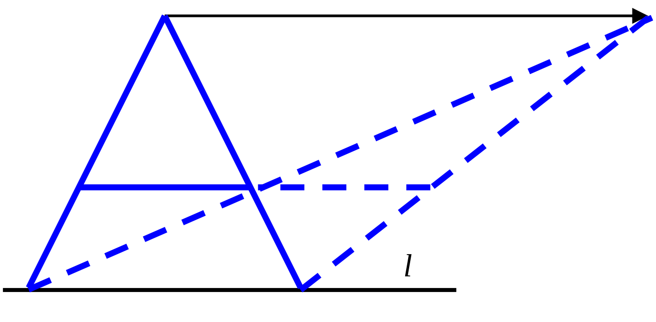


Рис. 1.34

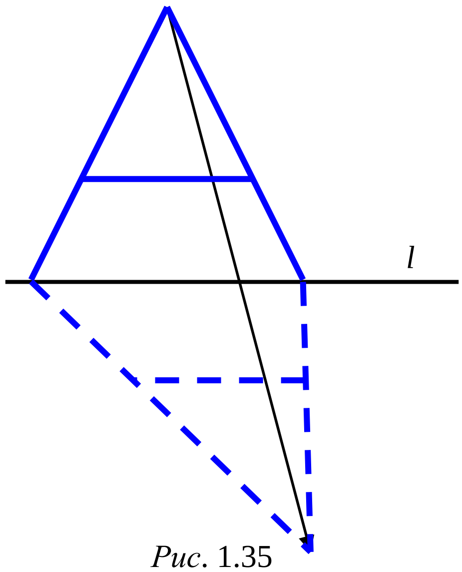


Рис. 1.35

***Замечания.* 1.** Формулы сжатия к прямой имеют вид (1.12) в ортонормированном репере.

2. Очевидно, что сжатие к прямой с коэффициентом $k=-1$ есть осевая симметрия.

3. Мы можем определить тип перспективно-аффинного преобразования с помощью собственных значений определяемого им линейного преобразования векторов (см. приложение, параграф 3.2). Любое перспективно-аффинное преобразование имеет собственное значение $\lambda_1 = 1$. Если оно только одно, то мы имеем сдвиг плоскости, причём соответствующий собственный вектор является направляющим для оси преобразования. Если существует ещё одно собственное значение λ_2, то мы имеем косое сжатие с коэффициентом $k = \lambda_2$. В частности, для косой симметрии $\lambda_2 = -1$, а для осевой симметрии дополнительно собственные векторы должны быть перпендикулярны. Случай кратных собственных значений $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ соответствует только тождественному преобразованию (при условии, что точно известно наличие хотя бы одной неподвижной точки).

1.10. *Приложение движений и подобий к решению задач планиметрии*

Задача 1. Два населённых пункта K и M расположены по разные стороны канала. В каком месте стоит построить мост (перпендикулярно берегам канала) и прямолинейные дороги от населённых пунктов к мосту, чтобы путь между данными пунктами был кратчайшим?

Решение. Пусть KK_1M_1M – кратчайший путь от точки K к точке M через мост K_1M_1 (рисунок 1.36). Этот путь состоит из отрезка K_1M_1, равного по длине ширине канала, и двух отрезков KK_1 и M_1M, соединяющих населённые пункты с мостом. Так как ширина канала – величина постоянная, то для кратчайшего пути сумма длин отрезков KK_1 и M_1M должна быть наименьшей. С помощью параллельного переноса сместим отрезок M_1M так, чтобы точка M_1 совпала с точкой K_1. При этом точка M_1 перейдёт в точку M_2.

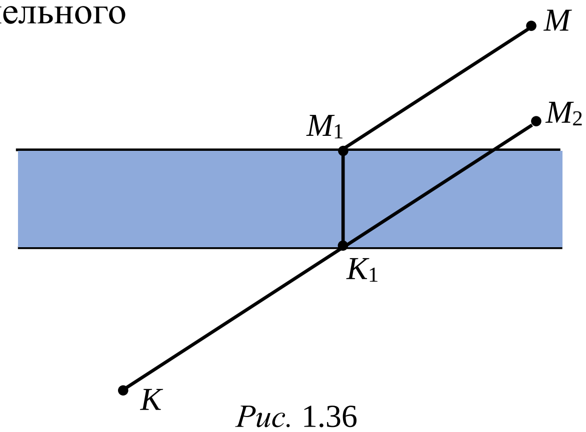


Рис. 1.36

По свойству параллельного переноса $KK_1 + K_1M_2 = KK_1 + M_1M$. Чтобы сумма длин отрезков KK_1 и K_1M_2 была наименьшей, необходимо, чтобы точки K, K_1 и M_2 лежали на одной прямой.

Таким образом, для нахождения требуемого местоположения моста через канал достаточно сначала сместить точку M перпендикулярно берегам канала на ширину канала, а затем соединить построенную точку M_2 с точкой K. Искомой точкой K_1 будет точка пересечения этой прямой с линий берега канала, ближайшего к пункту K. ■

Задача 2. Даны прямая l и точки A и B, лежащие по одну сторону от неё. Найдите точку M на прямой l такую, что сумма расстояний $AM + MB$ имеет наименьшее значение.

Решение. Рассмотрим точку B', симметричную точке B относительно прямой l (рисунок 1.37). Тогда для любой точки N прямой l выполняется $NB = NB'$, поэтому

$$AN + NB = AN + NB'.$$

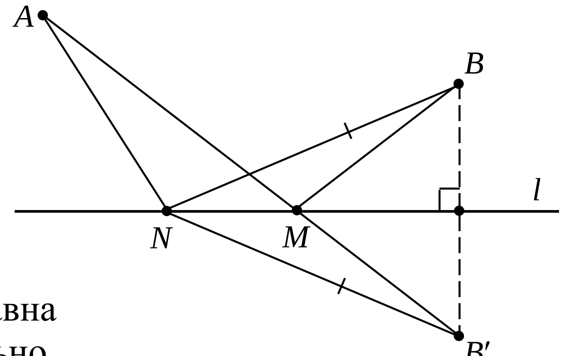


Рис. 1.37

Таким образом, сумма $AN+NB$ равна длине ломаной ANB'. Следовательно, наименьшую величину сумма расстояний $AN + NB$ будет иметь в том случае, когда наименьшую длину будет иметь ломаная ANB'. Но ломаная ANB' будет иметь наименьшую длину, если она обратится в отрезок прямой. Тогда точка N будет иметь положение искомой точки M в месте пересечения отрезка AB' прямой l. ■

***Задача* 3.** Пусть ΔABC не является равнобедренным, M – точка пересечения медиан, H – точка пересечения высот, O – центр описанной окружности. Доказать, что M делит отрезок OH в отношении $1:2$.

Решение. Пусть A_1, B_1, C_1 – середины сторон треугольника ABC (рисунок 1.38). Тогда $\Delta A_1B_1C_1$ состоит из средних линий треугольника ABC. Пусть g – гомотетия с центром M и коэффициентом –1/2. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 делятся точкой M в отношении 2:1. Поэтому $g(A) = A_1$, $g(B) = B_1$, $g(C) = C_1$, т.е. $g(\Delta ABC) = \Delta A_1B_1C_1$.

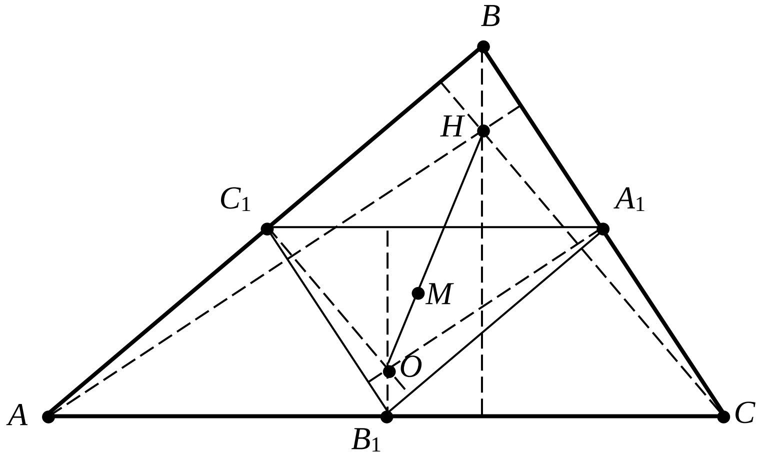


Рис. 1.38

Гомотетия сохраняет углы между прямыми. Поэтому высоты треугольника ABC переходят в высоты $\Delta A_1B_1C_1$, а эти высоты служат серединными перпендикулярами для ΔABC. Значит, точка H пересечения высот переходит в точку пересечения серединных перпендикуляров, т.е. в точку O. Согласно определению гомотетии $\overrightarrow{MO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MH}$, а именно это и означает, что точка M делит отрезок OH в отношении $1:2$. ■

Следствие. *Точки H, M, O лежат на одной прямой, которая называется прямой Эйлера*.

***Задача* 4.** Точка B лежит на отрезке AC. По одну сторону от прямой AC построены правильные треугольники ABD и BCE. Точка M – середина отрезка AE, N – середина DC. Докажите, что ΔBMN – правильный (рисунок 1.39).

Решение. Рассмотрим поворот на угол $60°$ вокруг точки B: $r_{B,60°}$. Тогда точка A переходит в D, а точка E – в точку C. Значит, отрезок AE переходит в отрезок DC, а точка M – в точку N. Поэтому при повороте отрезок BM переходит в отрезок BN, т.е. эти отрезки равны и угол между ними равен $60°$.■

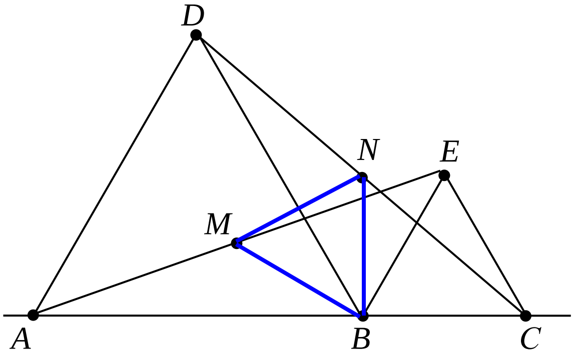


Рис. 1.39

Задача 5. Дан квадрат $ABCD$. На его сторонах отмечены точки P и K такие, что $BP=1$, $KD=4$ (рисунок 1.40). Найдите угол $\angle PAK$, если $PK=5$.

Решение. Применим трижды поворот плоскости около точки A на угол $-90°$ (рисунок 1.41). Заметим, что треугольники ΔPKA, ΔKAP_1, ΔP_1AK_1, ΔK_1AP_2, ΔP_2AK_2, ΔK_2AP_3, ΔP_3AK_3 и ΔK_3AP равны по трём сторонам. Тогда $8\cdot\angle PKA=360°$. $\angle PKA=45°$. ■

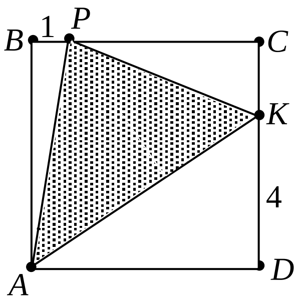


Рис. 1.40

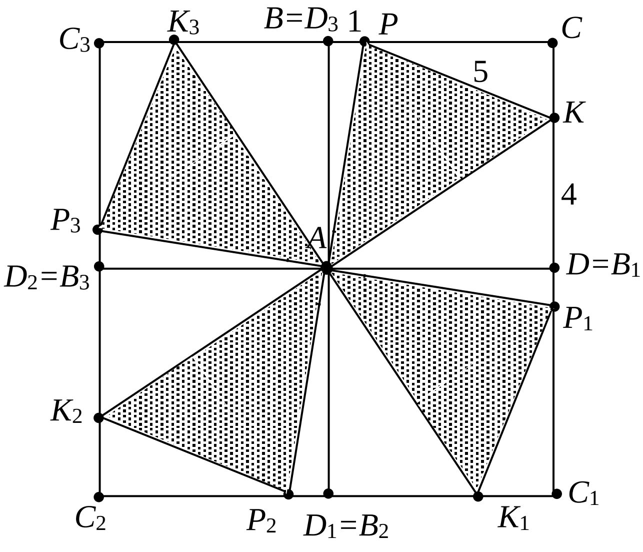


Рис. 1.41

1.11. *Применение аффинных преобразований к решению задач планиметрии*

Задача 1. Доказать, что для произвольной трапеции $ABCD$ точка E пересечения прямых, содержащих боковые стороны, точка G пересечения диагоналей и середины оснований F и H лежат на одной прямой.

Решение. По свойству 10 аффинных преобразований ΔAED может быть переведён в некоторый равнобедренный $\Delta A'E'D'$ подходящим аффинным преобразованием f (рисунок 1.42). При этом трапеция $ABCD$ перейдёт в трапецию $A'B'C'D'$ (так как сохраняется параллельность прямых, свойство 5), точка G – в точку G' пересечения её диагоналей, а точки F и H – в середины оснований F' и H' (инвариантность простого отношения трёх точек, свойство 7). У трапеции $A'B'C'D'$ точки E', F', G', H' лежат на прямой E', H'. А т.к. аффинное преобразование прямую переводит в прямую, то точки E, F, G, H тоже лежат на одной прямой. ■

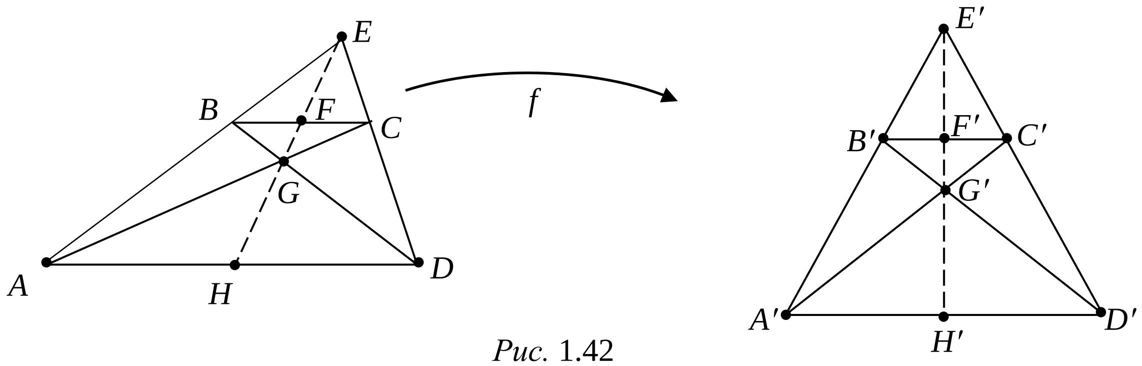


Рис. 1.42

Задача 2. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1.

Решение. По свойству существует аффинное преобразование f, которое переводит данный треугольник ΔABC в некоторый правильный треугольник $\Delta A'B'C'$ (рисунок 1.43). При этом середины отрезков переходят в середины отрезков, поэтому медианы треугольника ΔABC переходят в медианы треугольника $\Delta A'B'C'$.

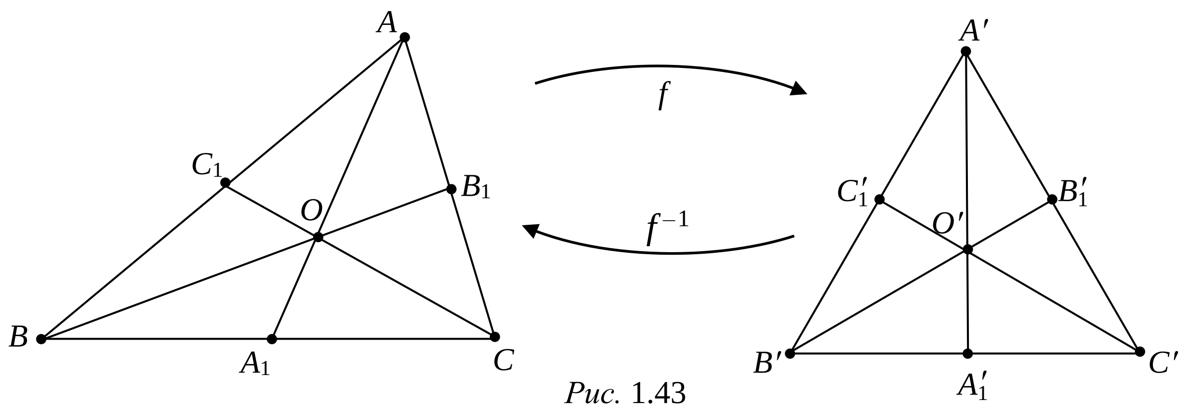


Рис. 1.43

В правильном треугольнике факт, сформулированный в условии задачи, выполняется. С помощью обратного преобразования f^{-1} переведём $\Delta A'B'C'$ в ΔABC. Тогда точка O' пересечения медиан $\Delta A'B'C'$ перейдёт в точку O пересечения медиан ΔABC, причём отношение отрезков 2:1 сохраняется. ■

Задача 3. Пусть ΔABC – произвольный, AA_1, BB_1 – его медианы, пересекающиеся в точке O. Доказать, что $S_{AOB} = S_{CA_1OB_1}$.

Решение. С помощью подходящего аффинного преобразования переведём ΔABC в правильный $\Delta A'B'C'$ (рисунок 1.44). В нём $S_{A'O'B'} = S_{C'A_1'O'B_1'}$, т.к. каждая из этих фигур состоит из двух равных треугольников. С помощью обратного преобразования f^{-1} переведём $\Delta A'B'C'$ в ΔABC. Отношение площадей сохраняется (свойство 13), поэтому $S_{AOB} = S_{CA_1OB_1}$.

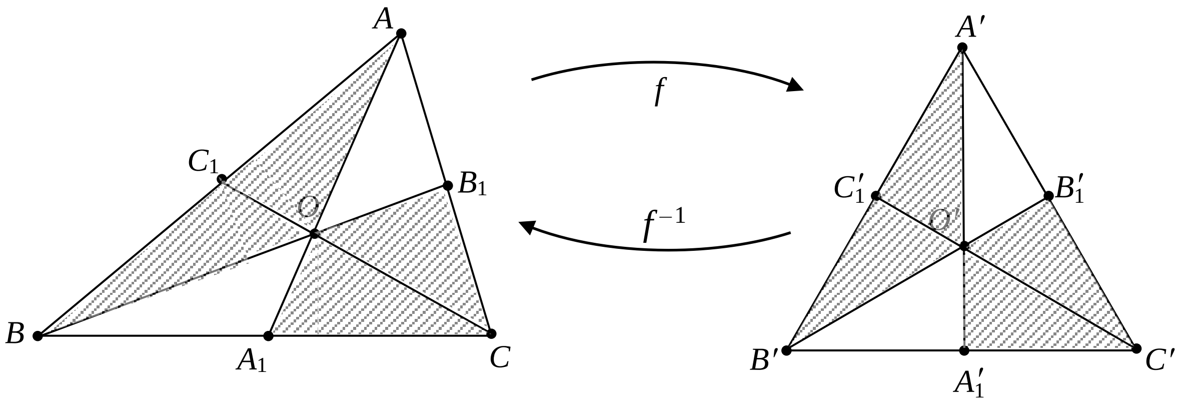


Рис. 1.44

Задача 4. Доказать, что аффинное преобразование трапецию переводит в трапецию и что любые две трапеции с одинаковым отношением оснований аффинно эквивалентны.

Решение. Аффинное преобразование параллельные прямые переводит в параллельные прямые, пересекающиеся – в пересекающиеся. Значит, аффинное преобразование трапецию переводит в трапецию.

Теперь докажем, что две любые трапеции с одинаковым отношением оснований аффинно конгруэнтны. Рассмотрим трапеции $ABCD$ и $A'B'C'D'$ такие, что $BC{:}AD=B'C'{:}A'D'$ (рисунок 1.45).

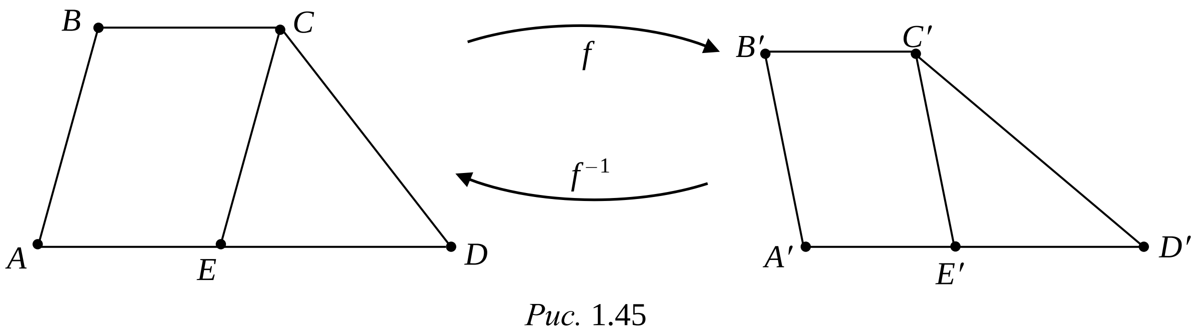


Рис. 1.45

Проведём $CE||AB$ и $C'E'||A'B'$. Существует аффинное преобразование f, переводящее параллелограмм $ABCE$ в параллелограмм $A'B'C'E'$. Если точка D под действием данного преобразования переходит в точку D', то данное преобразование переводит трапецию $ABCD$ в некоторую трапецию $A'B'C'D''$. Так как аффинное преобразование сохраняет простое отношение трёх точек, то $AE:ED = A'E':E'D''$. У трапеций одинаковое отношение оснований, поэтому $AE:ED = A'E':E'D'$. Но тогда $E'D'' = E'D'$ и $D' = D''$. Значит, $f(D) = D'$. Тогда f переводит трапецию $ABCD$ в трапецию $A'B'C'D'$. Если отношение оснований не равно, то $f(D) \neq D'$ и такие трапеции не будут аффинно эквивалентными.

Задача 5. Через центр параллелограмма провести две прямые (не параллельные сторонам и не содержащие диагонали), которые делят его на 4 равновеликие фигуры.

Решение. Подходящим аффинным преобразованием переведём параллелограмм в квадрат (рисунок 1.46). В квадрате искомыми прямыми будут любые перпендикулярные прямые, проходящие через центр. Например, проведём такие прямые, которые делят стороны в отношении 1:3. Квадрат при этом разобьётся на четыре равные фигуры. Прообразами этих прямых являются прямые, делящие эти стороны параллелограмма в отношении 1:3. Аффинное преобразование сохраняет отношение площадей, поэтому площади четырёх частей параллелограмма равны.

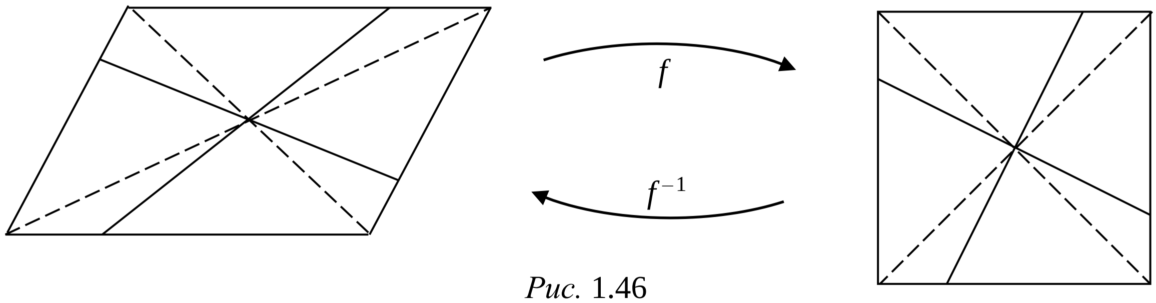


Рис. 1.46

Задача 6. На день рождения испекли торт овальной формы, с украшениями в виде цветочков. Как порезать его на 4 равные части так, чтобы не испортить украшения, если они расположены так, как показано на изображении (рисунок 1.47)?

Решение. Рассмотрим вместо торта некоторый эллипс γ. Заметим, что разделить эллипс на 4 части с помощью проведения главных диаметров нельзя, так как вдоль главных диаметров расположены украшения. Проведём сопряжённые диаметры d_1 и d_2 так, чтобы они не проходили через украшения. Разделят ли они эллипс на 4 части равной площади? С помощью подходящего аффинного преобразования f переведём эллипс γ в окружность γ'. Сопряжённые диаметры эллипса d_1 и d_2 при данном преобразовании перейдут в сопряжённые диаметры окружности d_1' и d_2'.

Легко показать, что окружность сопряжёнными диаметрами делится на 4 части равной площади. Так как аффинное преобразование сохраняет отношение площадей, то части, на которые поделят сопряжённые диаметры эллипс, будут также равны по площади. Таким образом, разделить торт на 4 равные части можно проведением любых сопряжённых диаметров.

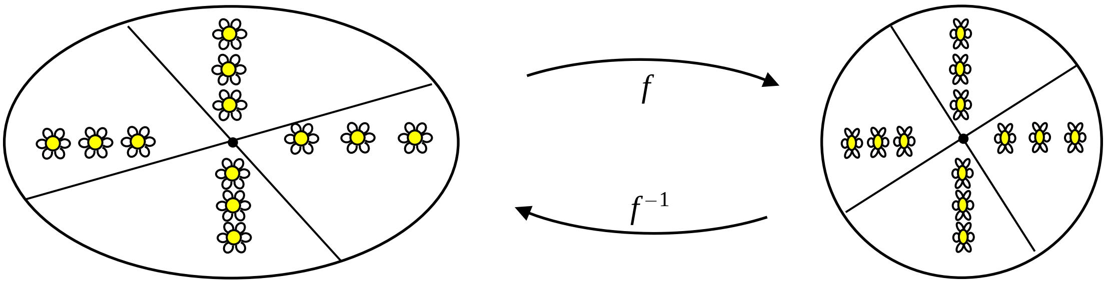


Рис. 1.47

Задача 7. Найти площадь эллипса с полуосями a и b.

Решение. Два любых эллипса аффинно эквивалентны, поэтому данный эллипс можно перевести с помощью аффинного преобразования f в окружность (рисунок 1.48). При этом описанный около эллипса прямоугольник перейдёт в описанный около окружности квадрат.

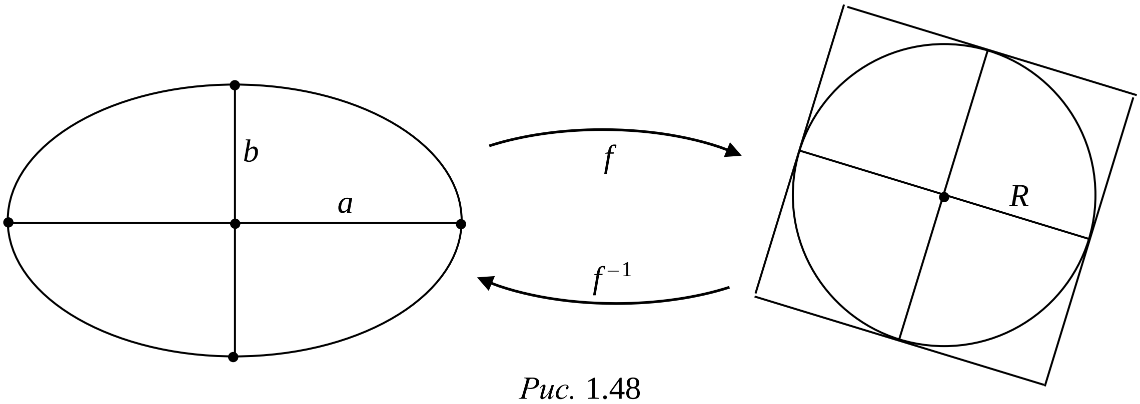


Рис. 1.48

Аффинное преобразование сохраняет отношение площадей, поэтому

$$\frac{S_{\text{эллипса}}}{S_{\text{прямоугольника}}} = \frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{квадрата}}} \Rightarrow$$

$$S_{\text{эллипса}} = \frac{S_{\text{круга}} \cdot S_{\text{прямоугольника}}}{S_{\text{квадрата}}} = \frac{\pi r^2 \cdot 4ab}{4r^2} = \pi ab.$$

Задача 8. В эллипсе с центром O проведены сопряжённые диаметры A_1A_2 и B_1B_2. Найти отношение площади ΔA_1OB_1 к площади эллипса.

Решение. Переведём с помощью аффинного преобразования f данный эллипс в окружность так, что данные диаметры перейдут в перпендикулярные диаметры $A_1'A_2'$ и $B_1'B_2'$ окружности (рисунок 1.49).

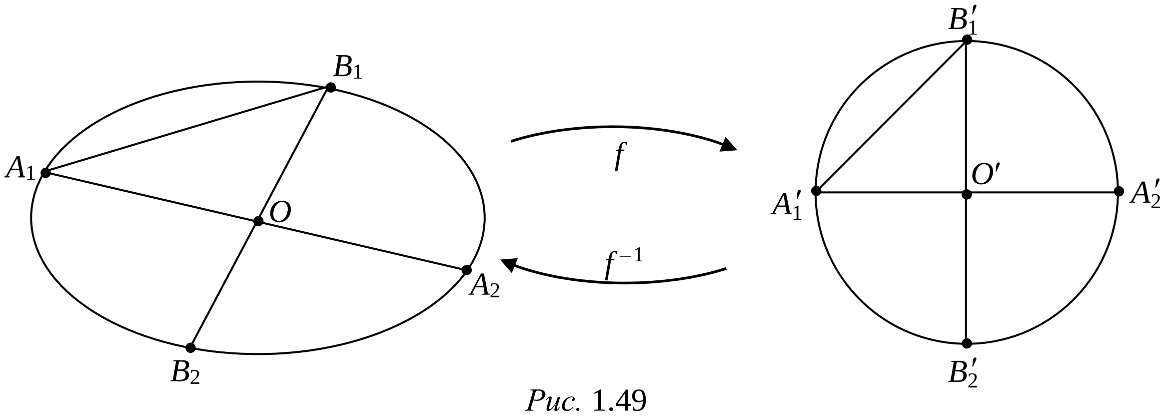


Рис. 1.49

Тогда

$$\frac{S_{\Delta A_1OB_1}}{S_{\text{эллипса}}}=\frac{S_{\Delta A_1'OB_1'}}{S_{\text{круга}}}=\frac{1}{2}r^2:\pi=\frac{1}{8\pi}.$$

Задача 9. Доказать, что диагонали параллелограмма, описанного около эллипса, содержат сопряжённые диаметры этого эллипса.

Решение. Подходящим аффинным преобразованием f переведём эллипс в окружность. Параллелограмм, описанный около эллипса, перейдёт в параллелограмм, описанный около окружности, т.е. в ромб (рисунок 1.50).

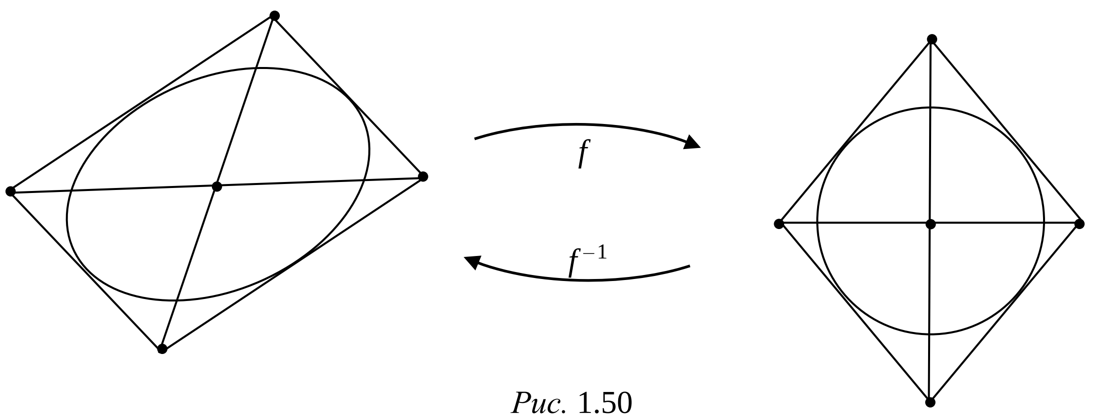


Рис. 1.50

Диагонали ромба перпендикулярны, поэтому содержат сопряжённые диаметры окружности, но в сопряжённые диаметры могут перейти только сопряжённые диаметры, поэтому их прообразы – диаметры эллипса – тоже сопряжённые.

Задача 10. Описать место середин хорд эллипса, соединяющих концы сопряжённых диаметров эллипса.

Решение. Подходящим аффинным преобразованием f переведём эллипс ω в окружность ω'. Сопряжённые диаметры эллипса переходят в перпендикулярные диаметры окружности, а они являются диагоналями квадрата. Середины хорд – это середины сторон квадрата (рисунок 1.51). Для любого квадрата они лежат на окружности γ' с радиусом в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем радиус исходной окружности ω'.

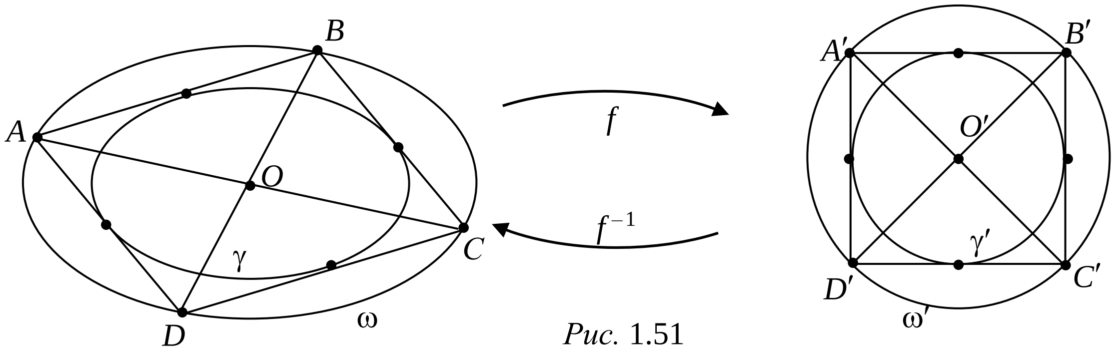


Рис. 1.51

Искомое геометрическое место точек γ – это прообраз γ'. Значит, γ – это эллипс с тем же центром, что и ω, который в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем эллипс ω.

1.12. *Инверсия*

***Определение* 1.34.** Пусть $\omega=(O, r)$ – некоторая окружность на плоскости. Обозначим $X=\boldsymbol{R}^2\setminus\{O\}$ – плоскость без точки O. Пусть $M\in X$ – любая точка. Сопоставим ей точку M' на луче OM такую, что

$$|OM|\cdot|OM'|=r^2. \tag{1.13}$$

Получим преобразование $i\colon X\to X$ множества X, которое называется *инверсией относительно* ω. Точка O называется *центром инверсии*, число r^2 – *степенью инверсии*.

Из равенства (1.13) непосредственно вытекает *свойство взаимности для инверсии*: если $M'=i(M)$, то $M=i(M')$. Следовательно, $i^{-1}=i$, т.е. инверсия обратна сама себе. Все преобразования плоскости, которые обладают таким свойством, называются *инверсными*. Примерами инверсных преобразований являются центральная и осевая симметрии.

Покажем, как на чертеже построить инверсию данной точки.

1 случай. Точка M лежит вне окружности ω. Построим касательные MN и MP к ω (рисунок 1.52). Тогда $M'=PN\cap OM$.

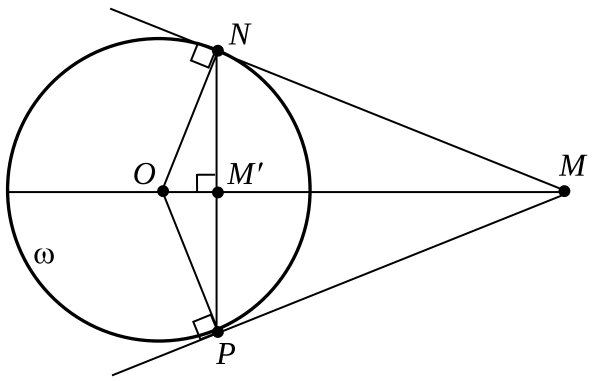


Рис. 1.52

Действительно, треугольник OMN является прямоугольным, а NM' – высота, проведённая к гипотенузе. По свойству высоты треугольники $OM'N$ и OMN подобны. Отсюда получаем, что

$$|OM'|:|OP|=|OP|:|OM| \quad\Leftrightarrow\quad |OM|\cdot|OM'|=OP^2=r^2.$$

2 случай. Точка M лежит внутри ω. Построим хорду NP, проходящую через M, перпендикулярно к OM, затем касательные l_1 и l_2

к окружности, проходящие через N и P. Тогда $M' = l_1 \cap l_2$. Можно построить только одну касательную l_1. Тогда $M' = l_1 \cap OM$.

Формулы, по которым действует инверсия в декартовой системе координат с центром O:

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{r^2 y}{x^2+y^2}.$$

Из свойства взаимности инверсии немедленно получаем обратные формулы:

$$x = \frac{r^2 x'}{x'^2+y'^2}, \quad y = \frac{r^2 y'}{x'^2+y'^2}.$$

В дальнейшем везде O – центр инверсии, и предполагается, что все прямые и окружности, проходящие через O, не включают в себя саму точку O.

***Теорема* 1.3. а)** *При инверсии прямая, проходящая через O, переходит в себя;*

б) *прямая, не проходящая через O, переходит в окружность, проходящую через O.*

Если прямая l имеет с ω непустое пересечение, то построить её образ γ на чертеже очень просто.

Пусть $\{N, P\} = \omega \cap l$. Тогда γ – это окружность, проходящая через три точки N, P, O (рисунок 1.53). Отметим сразу, что центр C окружности γ лежит на продолжении перпендикуляра, опущенного из O на прямую l.

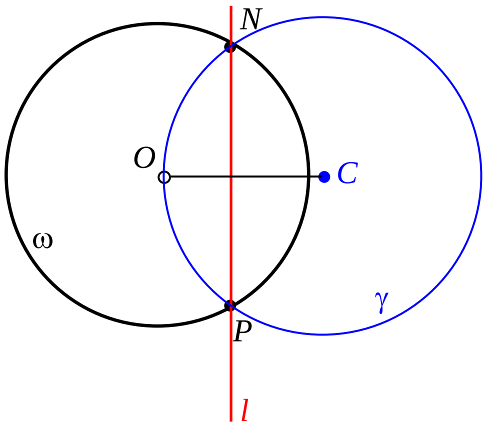


Рис. 1.53

Пусть l касается ω в одной точке P. Тогда центр C окружности γ лежит на середине отрезка OP, а её радиус равен $r/2$ (рисунок 1.54).

Пусть l не пересекает ω. Тогда мы опустим перпендикуляр OD на прямую l, найдём инверсию точки D: $F = i(D)$. Тогда C – середина OF и $\gamma = (C, CO)$ (рисунок 1.55).

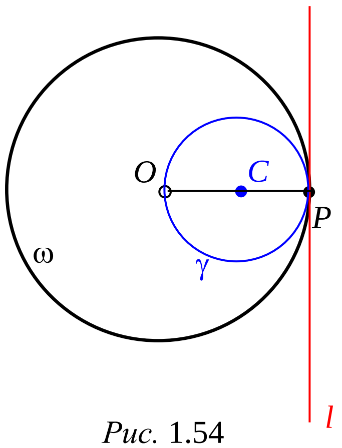


Рис. 1.54

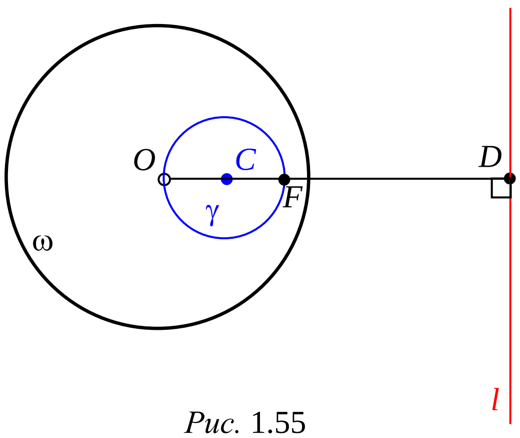


Рис. 1.55

Но тут мы неявно использовали пока ещё недоказанное утверждение, что C лежит на перпендикуляре OD. Это утверждение вытекает из соображений симметрии: при симметрии относительно прямой OD прямая l и окружность ω переходят в себя, значит и γ тоже должна переходить в себя.

***Теорема* 1.4.** **а)** *При инверсии окружность, проходящая через* O, *переходит в прямую, не проходящую через* O;

б) *окружность, не проходящая через* O, *переходит в окружность, не проходящую через* O; *при этом* O *лежит на одной прямой вместе с центрами этих окружностей.*

***Теорема* 1.5.** *Пусть* γ_1 – *окружность или прямая,* γ_2 – *окружность;* $\gamma'_1 = i(\gamma_1)$, $\gamma'_2 = i(\gamma_2)$ – *их образы. Если* γ_1 *и* γ_2 *касаются друг друга в точке* $M \neq O$, *то* γ'_1 *и* γ'_2 *тоже касаются друг друга в точке* $M' = i(M)$.

***Определение* 1.35.** *Углом между двумя кривыми* в их общей точке M называется угол между их касательными в точке M (рисунок 1.56).

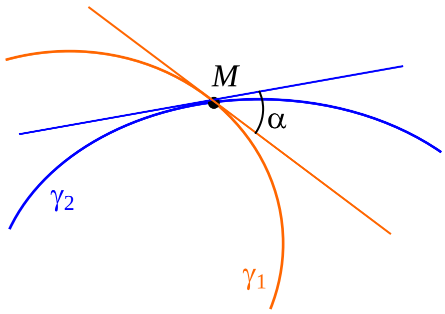


Рис. 1.56

***Определение* 1.36.** Пусть $f : \pi \to \pi$ – преобразование плоскости. Если для любых кривых γ_1 и γ_2 угол между ними в точке $M = \gamma_1 \cap \gamma_2$ равен углу между их образами $\gamma'_1 = f(\gamma_1)$, $\gamma'_2 = f(\gamma_2)$ в точке $M' = \gamma'_1 \cap \gamma'_2$, то говорят, что преобразование f *сохраняет углы между кривыми*. Такое преобразование называется *конформным*.

***Теорема* 1.6.** *Инверсия является конформным преобразованием.*

Замечания. **1.** Напомним, что инверсия является преобразованием плоскости с выколотой точкой O. Поэтому, когда идёт речь о сохранении углов между кривыми, предполагается, что эти кривые не проходят через O.

2. Преобразование множества $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ (комплексной плоскости с выколотой точкой 0), действующее по формуле $f(z) = r^2/\overline{z}$, в точности совпадает с инверсией относительно окружности, задаваемой уравнением $|z| = r$.

1.13. *Примеры решения задач*

***Задача* 1.** *Найдите образы точки* $A(10, 9)$:

а) *при симметрии относительно прямой* $l: x + 3y - 17 = 0$;

б) *при повороте на угол* $\alpha < \pi$, *тангенс которого равен* 4/3, *вокруг точки* $O'(2, 3)$;

в) *при последовательном выполнении этих двух преобразований.*

Решение. а) ***Первый способ решения.*** Геометрический смысл коэффициентов A и B в общем уравнении прямой $Ax+By+C=0$ – это координаты вектора нормали к прямой: $\vec{n}(A, B)$. В нашем случае мы делаем вывод, что вектор $\vec{n}(1,3)$ перпендикулярен прямой l. Пусть h – это прямая, перпендикулярная к l. Тогда для неё вектор $\vec{n}(1,3)$ будет направляющим. Поэтому уравнение прямой h:

$$\begin{cases} x = 10 + t, \\ y = 9 + 3t. \end{cases}$$

Находим координаты точки D пересечения прямых l и h:

$$10 + t + 3(9 + 3t) - 17 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10t + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_D = -2.$$

Подставляем это t в уравнение прямой h и находим координаты точки $D(8, 3)$. Пусть B – точка, симметричная точке A относительно l. Тогда $t_B = 2t_D = -4$. Поэтому $B(6,–3)$.

б) Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{O'A}$. Тогда его координаты будут при повороте преобразовываться так же, как и координаты точки при повороте на тот же угол вокруг начала координат. Находим $\sin\alpha = 4/5$, $\cos\alpha = 3/5$. Формулы преобразования координат при повороте на угол α вокруг начала координат имеют вид:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}(3x - 4y), \\ y' = \dfrac{1}{5}(4x + 3y). \end{cases} \tag{1.14}$$

Находим координаты вектора $\vec{a}(8, 6)$ и подставляем в эти формулы. Находим результат поворота: $\vec{c}(0,10)$. Если точка C получена поворотом точки A вокруг O', то $\overrightarrow{O'C} = \vec{c}$. Поэтому $C(2,13)$.

в) После выполнения первого преобразования мы получаем точку $B(6,–3)$. Находим координаты вектора $\vec{b}(4,-6)$ и подставляем в формулы (1.14). Находим результат поворота: $\vec{f}(7{,}2; -0{,}8)$. Если точка F получена поворотом точки A вокруг O', то $\overrightarrow{O'F} = \vec{f}$. Поэтому $F(9{,}2; 2{,}2)$.

***Ответ*: $B(6,–3)$, $C(2,13)$, $F(9{,}2; 2{,}2)$.**

***Второй способ решения пункта* а):** находим длину вектора нормали: $|\vec{n}| = \sqrt{10}$. Находим расстояние от точки A до прямой l, при этом в числителе формулы убираем модуль (получившуюся величину иногда называют отклонением точки от прямой):

$$h = \frac{10 + 3\cdot 9 - 17}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10} = 2|\vec{n}|.$$

Следовательно, если D – проекция точки A на прямую l (рисунок 1.57), то $\overrightarrow{DA} = 2\vec{n}$, а если B – симметричная к A точка, то

$$\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{DA} = 4\vec{n}.$$

Значит, $\overrightarrow{BA}(4,\ 12)$. Вычитая эти координаты из координат точки A, находим $B(6,–3)$.

***Третий способ решения пункта* а)** заключается в том, что мы сначала составляем формулы симметрии относительно данной прямой l, а затем подставляем координаты точки A в эти формулы.

Каким образом составляются формулы осевой симметрии, будет показано в следующей задаче.

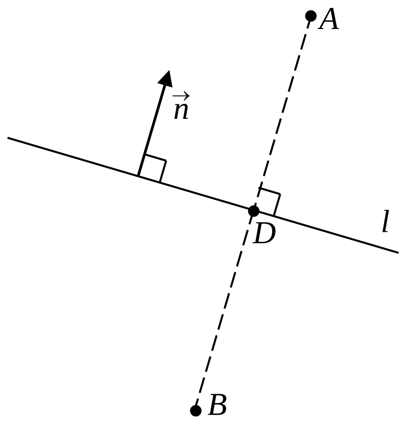


Рис. 1.57

***Задача* 2.** *Составить формулы, по которым действуют*:

а) *симметрия относительно прямой* $l\colon x + 2y - 3 = 0$;

б) *скользящая симметрия, которая определяется осью* l *и вектором* $\vec{\mathbf{p}}(4,–2)$.

Решение. а) Осевая симметрия – это преобразование второго рода. Оно действует по формулам

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha + x_0, \\ y' = x\cdot\sin\alpha - y\cdot\cos\alpha + y_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Выберем на прямой l две точки: $A(1, 1)$, $B(3, 0)$. Симметрия относительно прямой l оставляет эти точки на месте. Подставляем их координаты в (1.6) вместо (x, y) и (x', y'):

$$\begin{cases} 1 = \cos\alpha + \sin\alpha + x_0, \\ 1 = \sin\alpha - \cos\alpha + y_0, \\ 3 = 3\cdot\cos\alpha + x_0, \\ 0 = 3\cdot\sin\alpha + y_0. \end{cases}$$

Вычитаем из первого уравнения третье, а из второго – четвёртое:

$$\begin{cases} -2 = -2\cdot\cos\alpha + \sin\alpha, \\ \ \ 1 = -2\cdot\sin\alpha - \cos\alpha. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим, что $\sin\alpha = -0{,}8$, $\cos\alpha = 0{,}6$. Подставим эти значения в третье и четвёртое уравнения. Получаем $x_0 = 1{,}2$; $y_0 = 2{,}4$. Найденные значения подставляем в (1.6):

$$\begin{cases} x' = \ \ 0{,}6x - 0{,}8y + 1{,}2, \\ y' = -0{,}8x - 0{,}6y + 2{,}4. \end{cases}$$

б) Для того, чтобы получить уравнение скользящей симметрии, мы добавим в последнюю систему координаты вектора $\vec{\mathbf{p}}$**:**

$$\begin{cases} x' = \ \ 0{,}6x - 0{,}8y + 5{,}2\,, \\ y' = -0{,}8x - 0{,}6y + 0{,}4\,. \end{cases}$$

В качестве ответа следует привести две последние системы.

***Задача* 3.** *Докажите, что преобразование, которое задаётся формулами*

$$f\colon \begin{cases} x' = \ \ 15x + 8y + 2\,, \\ y' = -8x + 15y + 36, \end{cases}$$

является подобием. В композицию каких двух основных преобразований оно раскладывается?

Решение. Составим матрицу данного преобразования:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}.$$

Умножим матрицу $\mathbf{A}$ на транспонированную матрицу:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 289 & 0 \\ 0 & 289 \end{pmatrix} = 17^2\mathbf{E}.$$

Значит, матрица пропорциональна ортогональной матрице с коэффициентом 17. Следовательно, f – подобие с коэффициентом $k = 17$. Поскольку $\det\mathbf{A} > 0$, то f – подобие первого рода. Следовательно, f действует по формулам

$$\begin{cases} x' = kx\cdot\cos\alpha - ky\cdot\sin\alpha + x_1, \\ y' = kx\cdot\sin\alpha + ky\cdot\cos\alpha + y_1. \end{cases} \tag{1.9}$$

Сравнивая с формулами, которые даны по условию задачи, находим, что

$$k\cdot\cos\alpha = 15,\ -k\cdot\sin\alpha = 8 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{15}{17},\ \sin\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Значит, α – угол из IV четверти, т.е. $\alpha = -\arcsin\dfrac{8}{17}$.

Любое подобие имеет единственную неподвижную точку. Найдём её координаты. Для этого в формулах преобразования заменим x', y' на x, y и решим получившуюся систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x = \ \ 15x + 8y + 2\,, \\ y = -8x + 15y + 36, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ \ 14x + 8y = -2\,, \\ -8x + 14y = -36. \end{cases}$$

Решаем эту систему любым способом и находим, что $x = 1$, $y = -2$. Мы выяснили, что $M_{\text{o}}(1,-2)$ – неподвижная точка.

***Ответ*:** Преобразование f является подобием первого рода и раскладывается в композицию гомотетии с центром $M_{\text{o}}(1,-2)$ и коэффициентом 17, а также поворота с центром M_{o} на угол $\alpha = -\arcsin\dfrac{8}{17}$.

***Задача* 4.** *Аффинное преобразование плоскости переводит точки* $A(2,\ 0)$, $B(0,\ 1)$, $C(1,\ 1)$ *соответственно в точки* $A'(-4,\ 14)$, $B'(5,\ 15)$,

$C'(3,16)$. *Составить формулы, по которым действует данное преобразование.*

Решение. Общие формулы аффинного преобразования имеют вид

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + x_0, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

Подставляем в эти формулы попарно координаты точек A и A', B и B', C и C', получаем систему, состоящую из 6 линейных уравнений.

$$\begin{cases} -4 = 2a_{11} + 0a_{12} + x_0, \\ 14 = 2a_{21} + 0a_{22} + y_0 \\ 5 = 0a_{11} + 1a_{12} + x_0, \\ 15 = 0a_{21} + 1a_{22} + y_0, \\ 3 = 1a_{11} + 1a_{12} + x_0, \\ 16 = 1a_{21} + 1a_{22} + y_0. \end{cases} \tag{1.15}$$

В качестве неизвестных здесь выступают шесть коэффициентов из системы (1.1). При этом в первом, третьем и пятом уравнениях будут одни неизвестные, а во втором, четвёртом и шестом – другие. Система (1.15) распадается на две отдельные системы, в каждой из которых будет по три уравнения и три неизвестных.

$$\begin{cases} 2a_{11} \quad + x_0 = -4, \\ \qquad a_{12} + x_0 = 5, \\ a_{11} + a_{12} + x_0 = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a_{12} \quad + y_0 = 14, \\ \qquad a_{22} + y_0 = 15, \\ a_{21} + a_{22} + y_0 = 16. \end{cases}$$

Методы решения таких систем изучаются в курсе алгебры. Поэтому приводим сразу ответ.

Ответ: $\begin{cases} x' = -2x + 5y, \\ y' = x + 3y + 12. \end{cases}$

***Задача* 5.** *Даны два аффинных преобразования, действующие по формулам*

$$f\colon \begin{cases} x' = 2x + y - 7, \\ y' = 5x + 3y - 12, \end{cases} \qquad g\colon \begin{cases} x' = \ \ 3x + 8, \\ y' = -4x + 3y - 9. \end{cases}$$

а) *Найдите формулы, по которым действуют преобразования* $f \circ g$ *и* $g \circ f$.

б) *Найдите формулы преобразования* f^{-1}.

Решение. а) Запишем данные преобразования в матричном виде:

$$f\colon \mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{B}, \qquad g\colon \mathbf{X}' = \mathbf{CX} + \mathbf{D},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Запись $f\circ g$ означает, что первым действует преобразование g. Поэтому мы должны формулы преобразования g подставить в формулы преобразования f. Для того чтобы подстановка стала более понятной, мы в формуле того преобразования, которое действует позже, добавляем по одному штриху: $f: \mathbf{X}''=\mathbf{A}\mathbf{X}'+\mathbf{B}.$ Тогда матричная запись преобразования

$$f\circ g:\quad \mathbf{X}''=\mathbf{A}(\mathbf{C}\mathbf{X}+\mathbf{D})+\mathbf{B}=(\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{X}+(\mathbf{A}\mathbf{D}+\mathbf{B})=$$

$$=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\-4&3\end{pmatrix}\mathbf{X}+\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\-9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\3&9\end{pmatrix}\mathbf{X}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

В развёрнутом виде, опуская лишний штрих слева, получаем:

$$f\circ g:\ \begin{cases} x'=2x+3y,\\ y'=3x+9y+1.\end{cases}$$

Формулы преобразования $g\circ f$ составим с помощью непосредственной подстановки, без использования матриц. Поскольку вторым действует преобразование g, мы в его формуле добавим по одному штриху ко всем координатам.

$$g:\ \begin{cases} x''=\ \ 3x'+8,\\ y''=-4x'+3y'-9.\end{cases}$$

Теперь подставляем в эти формулы выражения для x' и y' из формул преобразования f.

$$g\circ f:\ \begin{cases} x''=3(2x+y-7)+8=6x+3y-13,\\ y''=-4(2x+y-7)+3(5x+3y-12)-9=-7x+5y-17.\end{cases}$$

Для получения окончательного ответа остаётся опустить по одному штриху слева.

б) Из матричной записи преобразования f находим, что

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}'-\mathbf{B}). \qquad (1.16)$$

Находим обратную матрицу.

$$A_{11}=3,\quad A_{12}=-5,$$
$$A_{21}=-1,\ A_{22}=2;$$
$$\det\mathbf{A}=1;$$
$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}.$$

Подставляем её в формулу (1.16):

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'+7\\y'+12\end{pmatrix}.$$

В развёрнутом виде:

$$\begin{cases} x = \ 3(x'+7)-(y'+12) = 3x'-y'-9\,, \\ y = -5(x'+7)+3(y'+12) = -5x' + 3y' + 1\,. \end{cases}$$

***Ответ*:**

$$f\circ g\colon \begin{cases} x' = 2x+3y\,, \\ y' = 3x+9y+1. \end{cases} \quad g\circ f\colon \begin{cases} x' = x+3y-13\,, \\ y' = -7x+5y-17\,. \end{cases} \quad f^{-1}\colon \begin{cases} x = 3x'-y'-9\,, \\ y = -5x' + 3y' + 1\,. \end{cases}$$

***Задача* 6.** *Докажите, что аффинное преобразование*

$$f\colon \begin{cases} x' = 2{,}5x-y+4\,, \\ y' = -x+y \end{cases}$$

имеет инвариантную прямую, и найдите её уравнение.

Решение. 1 *способ.* Пусть $Ax+By+C=0$ – уравнение искомой прямой l. Заменим в нём (x,y) на (x',y') и подставим вместо (x',y') выражения из формул преобразования:

$$A(2{,}5x-y+4)+B(-x+y)+C=0\,,$$

$$(2{,}5A-B)x+(-A+B)y+(4A+C)=0\,. \tag{1.17}$$

Получившееся уравнение задаёт множество, которое должно перейти в прямую l под действием преобразования f. Но это множество и есть прямая l, т.е. уравнение (1.17) должно тоже задавать прямую l. Согласно признаку совпадения прямых имеем

$$\frac{2{,}5x-y+4}{A} = \frac{-A+B}{B} = \frac{4A+C}{C} \quad \Leftrightarrow \quad 2{,}5-\frac{B}{A} = -\frac{A}{B}+1 = 4\frac{A}{C}+1\,. \tag{1.18}$$

Обозначим $t=A/B$ и из первого равенства находим:

$$2{,}5-\frac{1}{t} = -t+1 \quad \Rightarrow \quad t^2+1{,}5t-1=0 \quad \Rightarrow \quad t_1=-2,\ t_2=0{,}5.$$

Так как коэффициенты в уравнении прямой определяются с точностью до пропорциональности, мы можем взять любые A и B, удовлетворяющие данным условиям: $A_1=2$, $B_1=-1$; $A_2=1$, $B_2=2$. Тогда из второго равенства в (1.18) находим:

$$3 = 4\frac{2}{C}+1 \qquad \text{или} \qquad 0{,}5 = 4\frac{1}{C}+1$$

$$C_1=4,\ C_2=-8\,.$$

***Ответ*:** Данное аффинное преобразование имеет две инвариантные прямые: $l_1\colon\ 2x-y+4=0$, $l_2\colon\ x+2y-8=0$.

2 *способ.* Найдём сначала неподвижную точку данного преобразования:

$$\begin{cases} x = 2{,}5x-y+4\,, \\ y = -x+y\,, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1{,}5xy = -4, \\ x = 0. \end{cases}$$

Значит, $M_0(0, 4)$ – неподвижная точка. Найдём собственные векторы данного преобразования. Для этого составим сначала его матрицу **A**, затем матрицу $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$. Затем составим характеристическое уравнение и найдём его корни.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2{,}5 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix}2{,}5-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{pmatrix},$$

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})=(2{,}5-\lambda)(1-\lambda)-1=\lambda^2-3{,}5\lambda+1{,}5,$$

$$\lambda^2-3{,}5\lambda+1{,}5=0.$$

Из данного уравнения находим собственные значения преобразования: $\lambda_1=0{,}5$, $\lambda_2=3$. Затем находим соответствующие собственные векторы.

$$\mathbf{A}-0{,}5\mathbf{E}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0{,}5\end{pmatrix},\qquad \begin{cases}2x-y=0,\\ -x+0{,}5y=0,\end{cases}\qquad \vec{\mathbf{a}}(1,2);$$

$$\mathbf{A}-3\mathbf{E}=\begin{pmatrix}-0{,}5 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix},\qquad \begin{cases}0{,}5x+y=0,\\ x+y=0,\end{cases}\qquad \vec{\mathbf{b}}(2,-1).$$

При составлении второй системы уравнений мы сразу поменяли знаки. Инвариантные прямые проходят через точку $M_0(0, 4)$, а векторы $\vec{\mathbf{a}}(1,2)$ и $\vec{\mathbf{b}}(2,-1)$ являются для них направляющими. Поэтому их канонические уравнения имеют вид:

$$l_1:\ \frac{x}{1}=\frac{y-4}{2},\qquad l_2:\ \frac{x}{2}=\frac{y-4}{-1}.$$

Преобразуя эти уравнения к общему виду, получим тот же ответ.

***Задача* 6′.** *Найдите все инвариантные прямые преобразования*

$$f:\ \begin{cases}x'=2x-3y+3,\\ y'=-2x+7y-6.\end{cases}$$

К какому типу аффинных преобразований f относится?

Решение. Находим неподвижные точки данного преобразования:

$$\begin{cases}x=2x-3y+3,\\ y=-2x+7y-6,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x-3y=-3,\\ -2x+6y=6.\end{cases}$$

Мы видим, что уравнения пропорциональны, т.е. система имеет бесконечное количество решений. Координаты всех неподвижных точек удовлетворяют уравнению $x-3y=-3$, т.е. все неподвижные точки образуют прямую

$$l_1:\ x-3y+3=0.$$

Мы уже можем сказать, что f – перспективно аффинное преобразование с осью l_1, и мы можем указать вектор нормали к l_1 : $\vec{\mathbf{n}}_1(1,-3)$. Найдём собственные значения данного преобразования:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 7\end{pmatrix},\qquad \mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix}2-\lambda & -3\\ -2 & 7-\lambda\end{pmatrix},$$

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = (2-\lambda)(7-\lambda)-6 = \lambda^2-9\lambda+8,$$
$$\lambda^2-9\lambda+8=0,$$

Из этого уравнения находим собственные значения преобразования: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 8$. Затем соответствующие собственные векторы:

$$\mathbf{A}-1\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x-3y=0, \\ -2x+6y=0. \end{cases} \qquad \vec{\mathbf{a}}(3,1);$$

$$\mathbf{A}-8\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} 6x+3y=0, \\ 2x+y=0. \end{cases} \qquad \vec{\mathbf{b}}(1,-2).$$

Очевидно, что найденный вектор $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}_1$, т.е. $\vec{a}$ является направляющим вектором прямой l_1. Любая прямая, параллельная вектору $\vec{b}$, будет инвариантной для преобразования f. Три такие прямые изображены на чертеже (рисунок 1.58). Нам надо составить их уравнения. Вектор $\vec{n}_2(2, 1)$ перпендикулярен $\vec{b}$, и поэтому он является вектором нормали ко всем этим прямым.

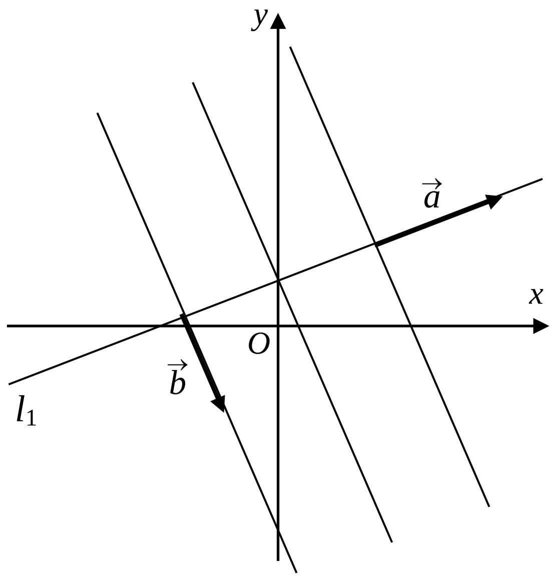


Рис. 1.58

Отсюда получаем уравнение семейства прямых:

$$2x+y+C=0,\ C\in\boldsymbol{R}.$$

Поскольку $\lambda_2 = 8$, то $f(\vec{b}) = 8\vec{b}$. Поэтому f есть косое сжатие (растяжение) к оси l_1 с коэффициентом $k=8$.

***Ответ*:** Данное аффинное преобразование имеет инвариантную прямую l_1: $x-3y+3=0$ и семейство инвариантных прямых $2x+y+C=0$, $C\in\boldsymbol{R}$. Оно является косым сжатием к оси l_1 с коэффициентом $k=8$.

Замечание. Если выяснится, что матрица преобразования имеет только одно собственное значение $\lambda=1$ (и она отлична от единичной матрицы), то данное преобразование является сдвигом плоскости.

Задача 7. *Составьте уравнение инверсии с центром в начале координат и коэффициентом 100. Какая кривая является образом прямой* $3x+4y+50=0$ *под действием данного преобразования? Составьте её уравнение и сделайте чертёж к задаче. На чертеже покажите а) точки А и В пересечения прямой с осями координат и образы этих точек; б) точку С прямой, которая остаётся неподвижной.*

Решение. Формулы преобразования имеют вид:

$$x' = \frac{100x}{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{100y}{x^2+y^2}.$$

Для составления уравнения образа данной прямой нам нужны формулы обратного преобразования:

$$x = \frac{100x'}{x'^2+y'^2}, \quad y = \frac{100y'}{x'^2+y'^2}.$$

Подставляем эти формулы в уравнение прямой:

$$\frac{300x'}{x'^2+y'^2} + \frac{400y'}{x'^2+y'^2} + 50 = 0.$$

Умножаем уравнение на $x'^2+y'^2$ и делим на 50:

$$6x' + 8y' + x'^2 + y'^2 = 0.$$

Выделяем полные квадраты:

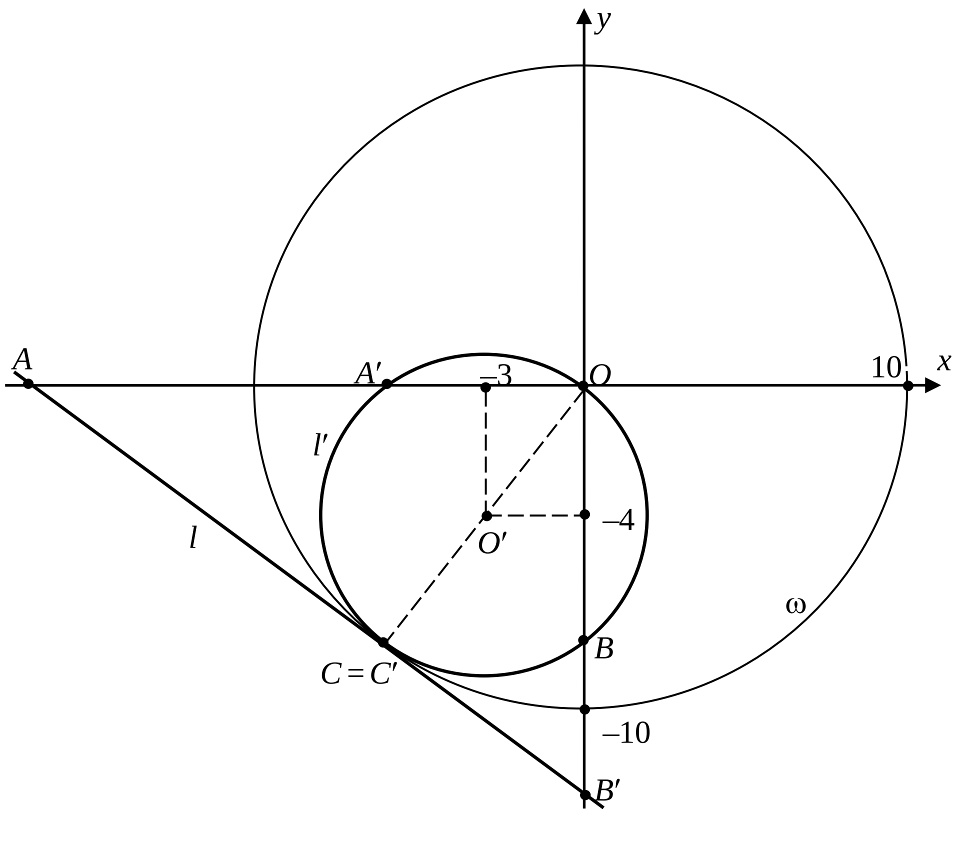


Рис. 1.59

$$(x'^2+6x'+9)-9+(y'^2+8y'+16)-16=0,$$

$$(x'+3)^2+(y'+4)^2=25.$$

Ответ: Окружность с центром в точке $O'(-3,-4)$ и радиусом 5, проходящая через начало координат и имеющая уравнение $(x'+3)^2+(y'+4)^2=25$ (рисунок 1.59).

***Задача* 8.** *Перспективно-аффинное преобразование с осью* l: $x+y=0$ *переводит точку* $A(-3,0)$ *в точку* $A'(3,3)$.

а) *Дать характеристику* (*название*) *данному преобразованию;*

б) *построить на чертеже образ* B' *точки* $B(-5{,}5;\ 1{,}5)$ *при этом преобразовании;*

в) *составить формулы, по которым действует данное преобразование. С их помощью проверить правильность построения* B'.

Решение. а), б) Изобразим на чертеже ось l и точки A, A' (рисунок 1.60). Пусть $C = AA' \cap l$. Мы видим по чертежу, что $C(-1, 1)$ и $\overrightarrow{CA'} = -2\overrightarrow{AC}$. Значит, данное преобразование есть косое сжатие с коэффициентом -2. Проведём прямую $m = AB$. Пусть $D = m \cap l$. Согласно свойству перспективно-аффинного преобразования образ m' прямой m проходит тоже через D. Значит, $m' = CA'$. По свойству перспективно-аффинного преобразования прямые, соединяющие соответственные точки перспективно-аффинного преобразования, параллельны. Поэтому строим $b \| AA'$, $B' = m' \cap b$.

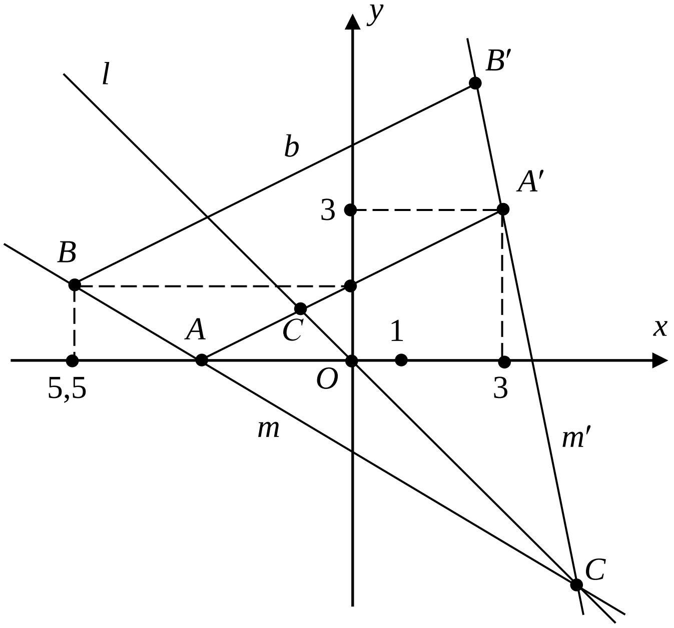


Рис. 1.60

в) Любая точка оси перспективно-аффинного преобразования является неподвижной. Поэтому точки $O(0,0)$ и $C(-1, 1)$ переходят в себя. Общие формулы аффинного преобразования имеют вид (1.1). Подставляем справа и слева в них по очереди координаты точек O и C, а затем справа координаты A, слева координаты A'. Получаем систему из шести уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, x_0, y_0:

$$\begin{cases} 0 = 0a_{11} + 0a_{12} + x_0, \\ 0 = 0a_{21} + 0a_{22} + y_0, \\ -1 = -1a_{11} + 1a_{12} + x_0, \\ 1 = -1a_{21} + 1a_{22} + y_0, \\ 3 = -3a_{11} + 0a_{12} + x_0, \\ 3 = -3a_{21} + 0a_{22} + y_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = 0, \\ -a_{11} + a_{12} = -1, \\ -a_{21} + a_{22} = 1, \\ -3a_{11} = 3, \\ -3a_{21} = 3. \end{cases}$$

Отсюда находим $a_{11} = -1$, $a_{21} = -1$, $a_{12} = -2$, $a_{22} = 0$. Окончательно формулы данного преобразования имеют вид

$$\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Подставляя сюда координаты $B(-5{,}5;\ 1{,}5)$, находим $B'(2{,}5;\ 5{,}5)$. Это соответствует чертежу.

***Ответ*:** **а)** Данное аффинное преобразование является косым сжатием с коэффициентом $k = -2$; **б)** $B'(2{,}5;\ 5{,}5)$; **в)** $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = -x. \end{cases}$

1.14. *Задания для решения на практических занятиях и самостоятельного решения*

Во всех задачах система координат предполагается декартовой.

1. Координатное задание аффинных преобразований

Контрольные вопросы

1. Дайте определение аффинного преобразования.
2. Дайте определение композиции преобразований $f \circ g$.
3. Какое свойство называется основным свойством аффинных преобразований?
4. Сколько нужно иметь произвольных точек и их образов, чтобы однозначно определить аффинное преобразование? Какому дополнительному требованию должны удовлетворять точки и их образы?
5. Что такое простое отношение трёх точек одной прямой? Какое свойство аффинных преобразований связано с этим понятием?
6. Какие геометрические фигуры называются аффинно конгруэнтными? Приведите примеры аффинно конгруэнтных фигур?
7. Как изменяются площади фигур под действием аффинного преобразования?

Задачи

1. Дана координатная запись аффинного преобразования:

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 2, \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$$

а) Найдите образы следующих точек под действием данного преобразования: $O(0,0)$, $A(-1,1)$, $B(-6,4)$, $C(3,7)$.

б) Найдите прообразы следующих точек под действием данного преобразования: $O(0,0)$, $A(-10,0)$, $B(1,5)$.

2. Дана координатная запись аффинного преобразования:

$$\begin{cases} x' = -x - 2y + 4, \\ y' = 2x - 6y + 5. \end{cases}$$

а) Найдите образы следующих прямых под действием преобразования:
1) оси Ox; 2) оси Oy; 3) прямой $x - 8y + 10 = 0$.
б) Найдите прообразы следующих прямых:
1) оси Ox; 2) оси Oy; 3) прямой $x + 2y + 5 = 0$.

3. Даны матрица аффинного преобразования и две соответственные точки M и M' ($M' = f(M)$). Составьте формулы этого преобразования.

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $M(1,0)$, $M'(3,8)$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M(0,1)$, $M'(-5,1)$.

4. Составьте формулы аффинного преобразования, которое переводит три данные точки A, B, C в точки A', B', C'.

а) $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, $A'(1,-3)$, $B'(2,0)$, $C'(3,1)$;
б) $A(1,0)$, $B(-2,1)$, $C(-1,-1)$, $A'(3,1)$, $B'(-4,-5)$, $C'(0,2)$.

5. Даны формулы, по которым действуют два аффинных преобразования f и g. Найдите формулы, по которым действует их композиция $f \circ g$.

а) $f\colon \begin{cases} x' = 3x - 5, \\ y' = y - 9. \end{cases}$ $g\colon \begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = 3x - 2y. \end{cases}$ б) $f\colon \begin{cases} x' = 8x - 3y + 5, \\ y' = x + 2y - 9. \end{cases}$ $g\colon \begin{cases} x' = -x + 4y + 1, \\ y' = -3x - 2y + 4. \end{cases}$

6. Даны формулы, по которым действует аффинное преобразование f. Найдите формулы, по которым действует преобразование f^{-1}.

а) $\begin{cases} x' = -y - 1, \\ y' = x + 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x + y - 7, \\ y' = x - y + 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 3x + y - 17, \\ y' = -3x + 7y + 2. \end{cases}$

2. Неподвижные точки и инвариантные прямые

Контрольные вопросы

1. Какая точка называется неподвижной точкой данного преобразования плоскости?
2. Какая прямая называется а) инвариантной, б) неподвижной прямой данного преобразования?

Задачи

7. Найдите неподвижные точки аффинных преобразований, заданных следующими формулами.

а) $\begin{cases} x' = 4x + y - 4, \\ y' = x + 2y - 2, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -4x - 2y + 3, \\ y' = -4x + 3y - 12. \end{cases}$

8. Найдите неподвижные точки и инвариантные прямые аффинных преобразований, заданных следующими формулами. Для нахождения инвариантных прямых используйте два способа.

а) $\begin{cases} x' = 2x + 4y - 8, \\ y' = 2x - 5y - 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x + 3y + 3, \\ y' = y. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 5x - 2y - 6, \\ y' = -2x + 2y + 3. \end{cases}$

9. Составьте формулы аффинного преобразования, которое переводит начало координат в точку $O'(3, 1)$ и все точки прямой $3x + 4y + 1 = 0$ оставляет неподвижными.

10. Пусть ABC – произвольный треугольник, а аффинное преобразование переводит его вершины A, B, C соответственно в вершины B, A, C. Найдите неподвижные точки и инвариантные прямые данного преобразования.

11. Пусть ABC – произвольный треугольник, а аффинное преобразование переводит его вершины A, B, C соответственно в вершины C, A, B. Докажите, что данное преобразование не имеет инвариантных прямых и имеет единственную неподвижную точку; определите, какая именно точка является неподвижной.

3. Координатное задание преобразований движения и подобия

Контрольные вопросы

1. Какое преобразование называется движением плоскости?
2. Сформулируйте свойства движений.
3. На сколько родов подразделяются движения? Чем отличаются движения, относящиеся к этим родам?
4. Выпишите формулы, по которым действуют движения каждого рода.
5. Какое преобразование называется подобием плоскости?
6. Дайте определение гомотетии.
7. Сформулируйте свойства подобий.
8. На сколько родов подразделяются подобия? Чем отличаются подобия, относящиеся к этим родам?
9. Выпишите формулы, по которым действуют подобия каждого рода.

Задачи

12. Составьте формулы, по которым действует параллельный перенос на вектор $\vec{a}(1,-2)$. Найдите образы точек $O(0, 0)$, $A(-2, 4)$ под действием этого преобразования.

13. Составьте формулы, по которым действует поворот на угол α с центром в начале координат.

а) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; б) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$; в) $\alpha = 120°$; г) $\alpha = -135°$; д) $\alpha = \arccos\frac{3}{5}$.

14. Составьте формулы, по которым действует поворот на угол α с центром в данной точке M_0.

а) $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$, $M_0(2,0)$; б) $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, $M_0(4,4)$; в) $\alpha=60°$, $M_0(-1,\sqrt{3})$;

г) $\alpha=-135°$, $M_0(3,-3)$; д) $\alpha=\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$, $M_0(-4, 3)$.

15. Составьте формулы, по которым действует симметрия относительно данной прямой.

а) $x+2=0$; б) $y-12=0$; в) $x+y=0$; г) $x-y+2=0$;
д) $3x-4y+25=0$; е) $x+2y=0$.

16. Докажите, что преобразование, заданное следующими формулами, является осевой симметрией. Найдите уравнение оси симметрии.

а) $\begin{cases} x'=-\dfrac{4}{5}x-\dfrac{3}{5}y, \\ y'=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=\dfrac{2}{\sqrt{5}}x-\dfrac{1}{\sqrt{5}}y, \\ y'=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}x-\dfrac{2}{\sqrt{5}}y. \end{cases}$

17. Составьте формулы, по которым действует центрально-подобная симметрия относительно данной прямой с данным коэффициентом.

а) $x=0$, $k=2$; б) $y=2$, $k=4$; в) $x-y=0$, $k=3$;
г) $x-y+4=0$, $k=2$.

18. Найдите координатное задание центрально-подобного вращения на данный угол α с данным коэффициентом растяжения k.

а) $\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$, $k=4$; б) $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, $k=\sqrt{3}$; в) $\alpha=120°$, $k=2$;

г) $\alpha=135°$, $k=2\sqrt{2}$.

19. Докажите, что только осевая и центральная симметрии являются движениями, которые относятся к инверсным преобразованиям.

4. Задачи на определение типа преобразования

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять матрица преобразования для того, чтобы это преобразование было а) движением; б) подобием.
2. Приведите классификацию а) движений, б) подобий.

Задачи

20. Выясните, какие из преобразований, заданных следующими формулами, являются движениями, а какие подобиями.

а) $\begin{cases} x'=-y, \\ y'=x. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=2x, \\ y'=y. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'=5x-2, \\ y'=5y+15. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x'=12x+5y-2, \\ y'=5x-12y. \end{cases}$

д) $\begin{cases} x'=0{,}6x+0{,}8y-1, \\ y'=-0{,}8x+0{,}6y-15. \end{cases}$

21. Докажите, что следующие преобразования являются движениями, и определите, к какому типу движений они относятся. Для осевой или скользящей симметрии определите её ось. Для поворота (в том числе центральной симметрии) найдите центр поворота и угол поворота.

а) $\begin{cases} x' = -x-2, \\ y' = -y-2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2 + \sqrt{2}, \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1, \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 - \sqrt{3}. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x' = -x-8, \\ y' = y. \end{cases}$ д) $\begin{cases} x' = x-1, \\ y' = -y. \end{cases}$

22. Докажите, что следующие преобразования являются подобиями, найдите коэффициент подобия и определите, к какому типу они относятся. Для центрально-подобного вращения найдите центр вращения и угол поворота.

а) $\begin{cases} x' = -3y-3, \\ y' = 3x-1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = \frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y + 3, \\ y' = \frac{3}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{2}y + 3\sqrt{3} + 2. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 13x+9y-24, \\ y' = 9x-13y-18. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x' = 7x-6, \\ y' = 7y. \end{cases}$

5. Различные задачи на движения плоскости

23. Докажите, что композиция двух симметрий относительно двух параллельных прямых является параллельным переносом. Найдите вектор, на который осуществляется этот перенос.
24. Докажите, что композиция двух центральных симметрий относительно двух различных точек является параллельным переносом.
25. Докажите, что композиция двух симметрий относительно двух пересекающихся прямых является поворотом. В частности, если прямые перпендикулярны, то композиция двух осевых симметрий является центральной симметрией.
26. Пусть A_1, B_1, C_1 есть соответственно середины сторон BC, AC, AB произвольного треугольника ABC. Докажите, что аффинное преобразование, которое переводит точки A, B, C в соответственно точки A_1, B_1, C_1, является гомотетией. Определите центр гомотетии.
27. Определите характер преобразования, являющегося композицией симметрий относительно последовательных вершин параллелограмма.
28. Пусть произвольная точки плоскости при симметриях относительно сторон BC, AC, AB треугольника ABC переходит соответственно в точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что преобразование, при котором точки A, B, C переходят соответственно в точки A_1, B_1, C_1, является центральной симметрией.

6. Перспективно-аффинное преобразование

Контрольные вопросы

1. Дайте определение перспективно-аффинного преобразования.
2. На какие основные два типа подразделяются перспективно-аффинные преобразования? Какие вы знаете частные случаи одного из этих типов?
3. Как с помощью собственных значений определить тип перспективно-аффинного преобразования (в том числе выяснить, не относится ли оно к одному из частных случаев)?

Задачи

29. Даны уравнение оси перспективно-аффинного преобразования и две соответственные точки M и M' ($M'= f(M)$). Составьте формулы, по которым действует преобразование, и определите его тип и коэффициент. Для определения типа и коэффициента сначала воспользуйтесь чертежом, а потом проверьте результат с помощью собственных значений преобразования.

а) $3x-y+1=0$, $M(1,2)$, $M'(3,4)$; б) $4x+y+3=0$, $M(1,1)$, $M'(-5,7)$;

в) $4x+y+3=0$, $M(1,1)$, $M'(-2,13)$; г) $x+2=0$, $M(1,0)$, $M'(4,3)$.

30. Докажите, что преобразования, которые задаются следующими формулами, являются перспективно-аффинными. Определите их тип и коэффициент.

а) $\begin{cases} x'=5x-2y+6, \\ y'=8x-3y+12. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'= x-3y+2, \\ y'=2x-5y+4. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'=x-3y+1, \\ y'=x-2y+1. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x'=4x+y+1, \\ y'=3x+2y+1. \end{cases}$

31. Даны уравнение прямой l и координаты трёх точек A, A' и B. Перспективно-аффинное преобразование с осью l переводит точку A в точку A'.

   1) Дать характеристику (название) данному преобразованию.
   2) Построить на чертеже образ B' точки B при этом преобразовании.
   3) Составить формулы, по которым действует данное преобразование. С их помощью проверить правильность построения B'.

а) l: $y=5x+1$, $A(3,4)$, $A'(-2,9)$, $B(5,-4)$.

б) l: $x+y=4$, $A(16, 6)$, $A'(0,-2)$, $B(5,8)$.

32. Докажите, что всякое инверсное перспективно-аффинное преобразование является косой симметрией. Найдите необходимые и достаточные условия, относящиеся к матрице, которые позволяют определить, что данное преобразование является:

а) симметрией (осевой или косой); б) собственно косой симметрией.

33. Докажите, что преобразования, которые задаются следующими формулами, являются косыми симметриями. Найдите уравнения осей.

а) $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 1, \\ y' = -4x - 3y - 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x - 3y + 2, \\ y' = 2x - 5y + 4. \end{cases}$

7. Применение движений и подобий к решению задач планиметрии

34. Известно, что из всех четырёхугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат. Как с помощью имеющейся гибкой проволоки оградить прямоугольный участок наибольшей площади, используя в качестве одной из сторон часть имеющегося длинного забора?

35. В остроугольном треугольнике ABC определить кратчайший путь, ведущий из некоторой точки P стороны AB к стороне AC, отсюда к стороне BC, а затем обратно в точку P.

36. На плоскости даны равные одинаково ориентированные треугольники ABC и $A'B'C'$. Доказать, что серединные перпендикуляры отрезков AA', BB', CC' пересекаются в одной точке или параллельны.

37. Доказать, что любая ограниченная фигура имеет не более одного центра симметрии.

38. Двое игроков поочерёдно выкладывают на прямоугольный стол одинаковые монеты. Монету разрешается класть только на свободное место. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Докажите, что первый игрок всегда может выиграть.

39. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причём $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

40. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1. Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

41. Докажите, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

42*. В данный остроугольный треугольник вписать треугольник наименьшего периметра.

43*. На столе лежат две одинаковые прямоугольные географические карты (считаем, что одна карта гарантированно лежит «лицом» вверх). Определите, можно ли их проткнуть булавкой так, чтобы на обеих картах была проколота одна и та же точка местности. Каким образом можно найти все такие точки прокола?

44*. Две прямоугольные карты одной местности разного масштаба наложены друг на друга так, что меньшая карта лежит целиком на большей. Докажите, что их можно проткнуть булавкой так, чтобы на обеих картах была проколота одна и та же точка местности. Каким образом можно найти такую точку?

8. Применение аффинных преобразований к решению задач планиметрии

45. Доказать, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.
46. Точки P, Q, R, S – середины сторон AB, BC, CD, AD параллелограмма $ABCD$. Площадь четырёхугольника, образованного пересечением прямых AQ, BR, CS и DP, равна 1. Найдите площадь $ABCD$.
47. Эллипс вписан в прямоугольник с площадью 36. Найти площадь эллипса.
48. Как разделить торт постоянной высоты в форме эллипса между четырьмя гостями с помощью разрезов из центра эллипса? А если гостей трое?
49. Доказать, что площадь треугольника, сторонами которого являются два сопряжённых полудиаметра эллипса и соединяющая их концы хорда, есть величина неизменная.
50. Как провести касательную к эллипсу через данную на нём точку?
51.* Какую наименьшую площадь может иметь эллипс, описанный около данного треугольника со стороной a и высотой h?
52.* Как разделить торт постоянной высоты в форме треугольника между n гостями с помощью n разрезов из не заданной наперёд точки внутри треугольника?
53.* Пусть ΔABC – произвольный, O – точка O внутри него. Доказать, что $S_{\Delta ABO}\cdot\overrightarrow{OC} + S_{\Delta BCO}\cdot\overrightarrow{OA} + S_{\Delta ACO}\cdot\overrightarrow{OB} = \vec{0}$.
54.* Доказать, что середины параллельных хорд параболы лежат на прямой, параллельной оси параболы.
55.* Доказать, что отрезок касательной к гиперболе, заключённый между её асимптотами, делится точкой касания пополам.

9. Инверсия

Контрольные вопросы

1. Дайте определение инверсии. Что называется степенью инверсии?
2. Какая кривая является образом прямой при инверсии в зависимости от расположения прямой?
3. Какая линия является образом окружности при инверсии в зависимости от расположения окружности?

Задачи

56. Составьте формулы, по которым действует инверсия со степенью 1 с центром в начале координат. Пользуясь формулами, найдите образы следующих точек под действием этого преобразования: $A(0,\ 1/4)$, $B(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $C(1,1)$, $D(-3,4)$.

57. Составьте формулы, по которым действует инверсия со степенью 25 с центром в начале координат. Пользуясь формулами, найдите образы следующих точек под действием этого преобразования: $A(1,0)$, $B(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $C(1,10)$, $D(-3,4)$.

58. Составьте формулы, по которым действует инверсия со степенью 2 с центром в начале координат. Пользуясь формулами, найдите образы следующих прямых под действием этого преобразования:

а) $x-y-2=0$; б) $x+y+1=0$; в) $2x+y-5=0$; г) $x+2y=0$.

59. Составьте формулы, по которым действует инверсия со степенью 4 с центром в начале координат. Пользуясь формулами, найдите образы следующих кривых под действием этого преобразования:

а) $(x-1)^2+y^2=1$; б) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$; в) $(x+1)^2+(y-1)^2=2$;

г) $y^2=2px$; д) $y^2=2p(x+2)$.

60. Прямоугольный равнобедренный треугольник вписан в окружность, относительно которой осуществляется инверсия. Какая фигура будет его образом под действием инверсии?

61. Найдите формулы, по которым действует инверсия со степенью r^2 в полярной системе координат, если полюс совпадает с центром инверсии. Для $r^2=4$ найдите образы следующих точек под действием инверсии: $A(1,\pi)$, $B(\sqrt{2},\pi/4)$, $C(4,2\pi/3)$, $D(8,-\pi/2)$.

62. При произвольном r^2 найдите образ конического сечения, заданного уравнением $\rho=\dfrac{\varepsilon p}{1+\varepsilon\cdot\cos\varphi}$.

1.15. *Образцы задач для контрольной работы*

1. Найти неподвижные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования, если оно задаётся формулами

$$\begin{cases} x'=8x+4y-2,\\ y'=3x+4y+3.\end{cases}$$

2. Определить характер преобразования

$$\begin{cases} x'=15x+8y-22,\\ y'=-8x+15y-6.\end{cases}$$

В композицию каких основных преобразований оно раскладывается?

3. Составьте формулы, по которым действует поворот на угол $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$ с центром в данной точке $M_0(3,-3)$.

4. Докажите, что преобразование

$$\begin{cases} x'=-2x+6y+3,\\ y'=\quad x-y-1\end{cases}$$

является перспективно-аффинным. Найдите уравнение его оси. Определите, к какому типу оно относится и какой имеет коэффициент.

ГЛАВА 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

В этой главе мы изучим основные методы геометрических построений на плоскости с помощью различных инструментов, а также рассмотрим вопросы разрешимости задач на построение.

2.1. *Задачи на построение с помощью циркуля и линейки*

В этой главе, если не оговорено противное, предполагается, что построения должны выполняться с помощью циркуля и линейки без делений.

Основными фигурами называем точки, прямые и окружности. Другие простейшие фигуры: отрезки, лучи, полуплоскости, многоугольники, дуги окружностей и т.п. – определяются заданием нескольких основных фигур.

Обозначим: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\ \ldots$ – сами отрезки, $a, b, c\ \ldots$ – их длины, $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}\ldots$– углы, $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ – их градусные меры, $(O, \overline{r})$ – окружность с центром O и радиусом, равным отрезку $\overline{r}$ (подчеркнём, что $\overline{r}$ – это не число, а данный или построенный отрезок на плоскости).

Задачи на построение формулируются так. Дано конечное множество $\{F_1, F_2,\ldots, F_n\}$ основных фигур и описаны свойства, характеризующие фигуру Φ, которую нужно построить. Требуется получить Φ за конечное число шагов построения.

Шагом построения будем называть операцию, которая позволяет к множеству уже построенных фигур присоединить новые фигуры. В дальнейшем под фразой «данная фигура» мы будем понимать, в том числе, и фигуру, построенную на предыдущих шагах. Другими словами, фраза «данная фигура» означает «уже имеющаяся фигура».

Следующие шаги построения называются *постулатами построений*, и они считаются выполнимыми (при условии существования точек в П1, П2, П3).

П1. Построить прямую, проходящую через две данные точки.

П2. Построить окружность с центром в данной точке с радиусом, равным данному отрезку.

П3. Найти точки пересечения двух данных прямых.

П4. Найти точки пересечения двух данных окружностей.

П5. Найти точки пересечения данных прямой и окружности.

Мы предполагаем, что на любой данной прямой или окружности можно выбрать хотя бы две точки и можно выбрать точку вне данных прямой и окружности. Позже мы покажем, как можно найти центр данной окружности, и поэтому в дальнейшем будем предполагать, что центр данной окружности является уже построенной точкой. Следующие теоремы легко доказать в рамках школьного курса геометрии.

***Теорема* 2.1.** *Пусть* d *– расстояние от центра* O *окружности* $\omega=(O,\overline{r})$ *до прямой* l. *Тогда если* $d<r$, *то* ω *и* l *имеют две общие точки, если* $d=r$ *– одну общую точку, если* $d>r$ *– ни одной общей точки* (рисунок 2.1).

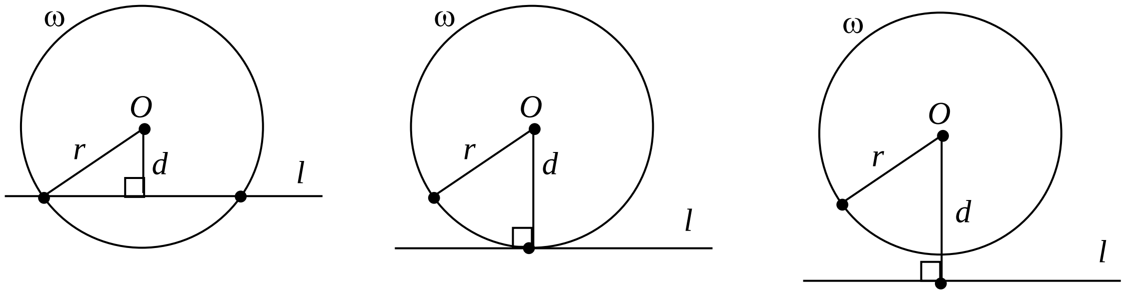


Рис. 2.1

***Теорема* 2.2.** *Пусть* $\omega_1=(O_1,\overline{r}_1)$, $\omega_2=(O_2,\overline{r}_2)$ *– две окружности,* $r_1>r_2$, $d=OO_1>0$ *– расстояние между их центрами* (см. рисунок 2.2). *Тогда:*

1) *если* $r_1-r_2<d<r_1+r_2$, *то окружности пересекаются;*
2) *если* $d=r_1+r_2$ *или* $d=r_1-r_2$, *то окружности касаются друг друга;*
3) *если* $d>r_1+r_2$ *или* $d<r_1-r_2$, *то окружности не имеют общих точек.*

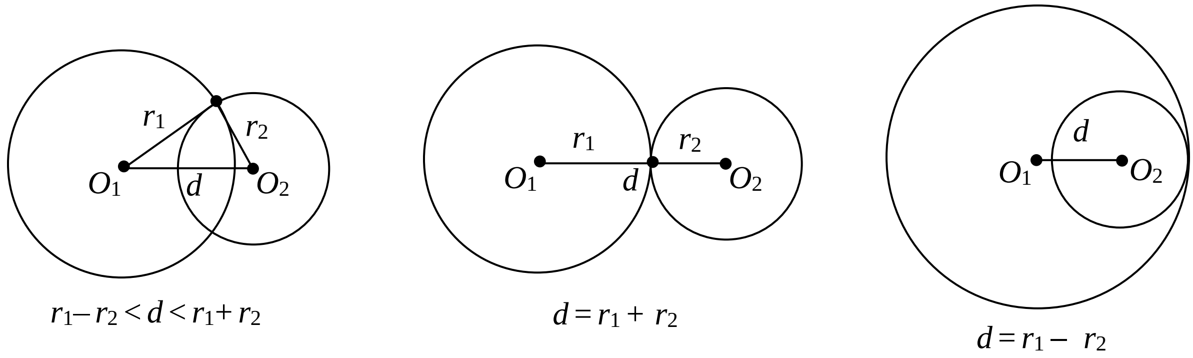


Рис. 2.2

Следствие. Пусть $\omega_1=(O_1,\overline{r}_1)$, $\omega_2=(O_2,\overline{r}_2)$ – две окружности, причём $O_1\in\omega_2$ (рисунок 2.3). Тогда если $r_1<2r_2$, то окружности пересекаются; если $r_1=2r_2$, то окружности касаются; если $r_1>2r_2$, то окружности не имеют общих точек.

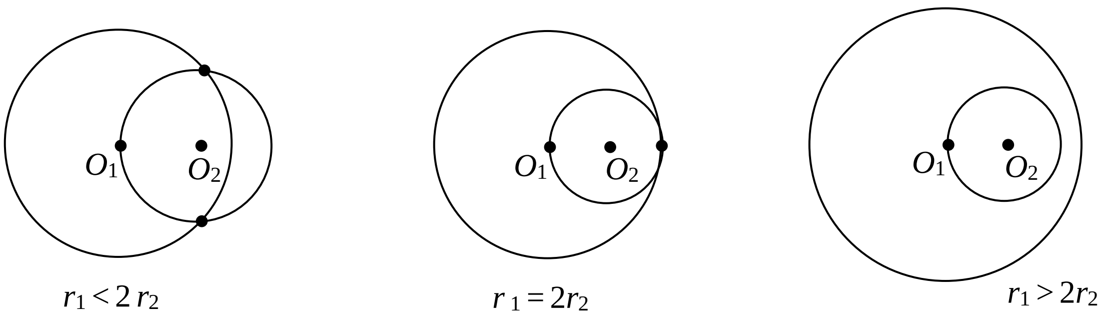


Рис. 2.3

Теорема 2.2 может быть использована для доказательства возможности следующего построения.

Задача. Даны отрезки $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ ($a \le b \le c$). Построить треугольник, стороны которого равны данным отрезкам.

Решение должно быть хорошо известно из школьной программы (рисунок 2.4). Из теоремы 2.2 следует, что задача имеет решение тогда и только тогда, когда $c < a + b$.

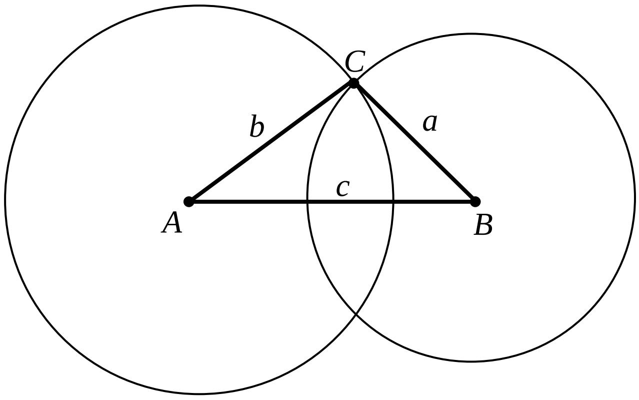


Рис. 2.4

2.2. *Основные построения*

Решить задачу на построение – значит свести её к последовательному выполнению конечного числа действий П1–П5. Но разбивать построения на элементарные шаги слишком сложно. Поэтому решение сводят к часто встречающимся комбинациям шагов П1–П5, которые мы будем называть <u>*основными построениями*</u>.

***Построение* 1.** *Отложить на данном луче от его начала отрезок, равный данному отрезку.*

На рисунке 2.5 $\overline{a}$ – это данный отрезок, а $\overline{l}$ – данный луч с началом O.

1. Построим окружность $\omega = (O, \overline{a})$.

2. На пересечении ω и $\overline{l}$ найдём точку A.

Отрезок OA – искомый.

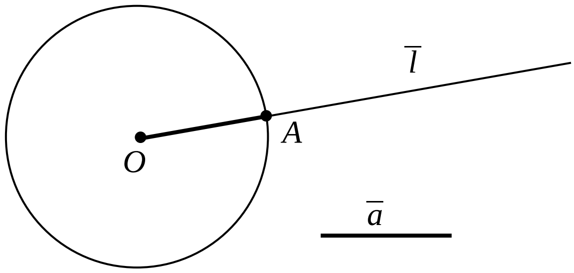


Рис. 2.5

***Построение* 2.** *Отложить от данного луча в данную полуплоскость угол, равный данному.*

На рисунке 2.6 изображён данный угол с вершиной O и данный луч l с вершиной O_1.

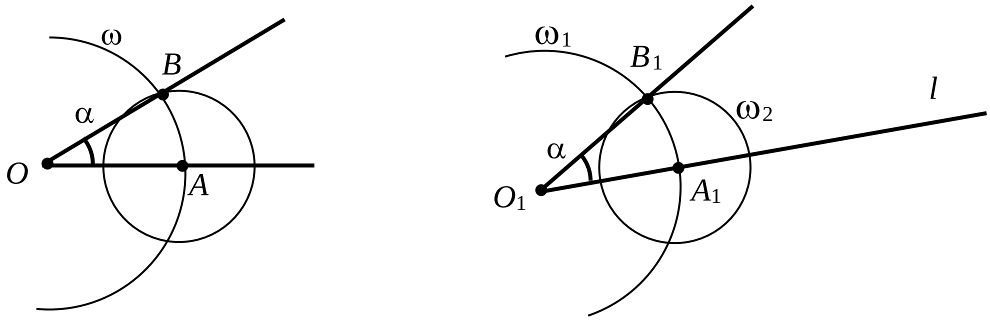


Рис. 2.6

Мы проводим две окружности $\omega = (O, r)$ и $\omega_1 = (O_1, r)$ равного радиуса. Пусть ω пересекает стороны угла в точках A и B, а ω_1 пересекает луч l в точке A_1. Пусть $r_1 = |AB|$, $\omega_2 = (A, r_1)$. Тогда вторая сторона искомого угла проходит через точку $B_1 \in \omega_1 \bigcap \omega_2$.

Упражнение. Самостоятельно разберитесь, как выполнить все следующие построения. Для некоторых построений ниже не приведены чертежи. Выполните эти чертежи самостоятельно.

***Построение* 3.** *Построить треугольник по трём сторонам* (рисунок 2.4).

***Построение* 4.** *Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.*

***Построение* 5.** *Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.*

***Построение* 6.** *Построить биссектрису данного угла* (рисунок 2.7).

***Построение* 7.** *Построить серединный перпендикуляр к данному отрезку* (рисунок 2.8).

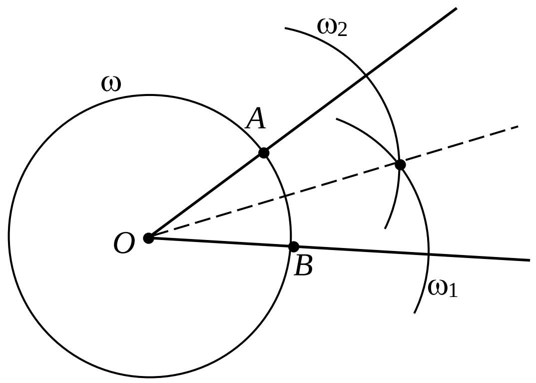


Рис. 2.7

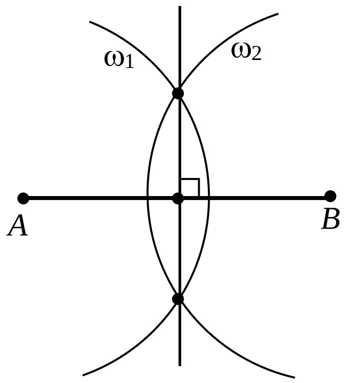
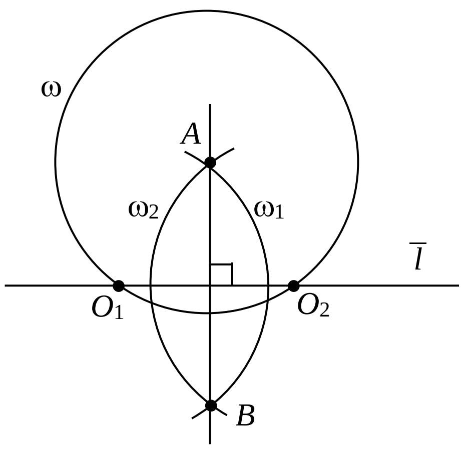


Рис. 2.8

***Построение* 8.** *Построить середину данного отрезка* (рисунок 2.8).

***Построение* 9.** *Через данную точку провести перпендикуляр к данной прямой* (*точка может принадлежать или не принадлежать прямой*).

На рисунках 2.9 данная точка есть A, а данная прямая – $\overline{l}$.



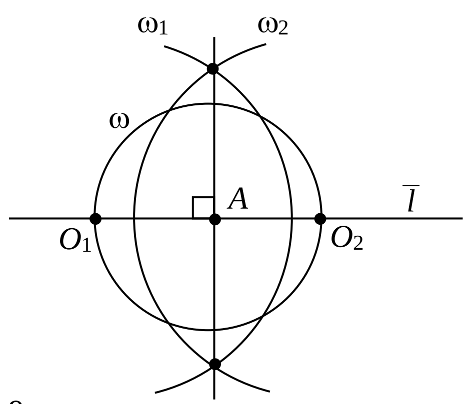


Рис. 2.9

Здесь же мы видим построение точки B, симметричной A относительно прямой.

***Построение* 10.** *Построить прямую, параллельную данной прямой и проходящую через данную точку.*

Первый способ заключается в том, что мы с помощью построения 9 сначала строим перпендикуляр n к данной прямой l, проходящий через точку A, а затем строим перпендикуляр l' к n (рисунок 2.10). Второй способ показан на рисунке 2.11. Самостоятельно запишите ход построения. Сначала нам нужно выбрать две точки $B, C \in l$.

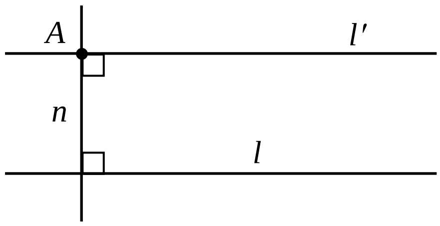


Рис. 2.10

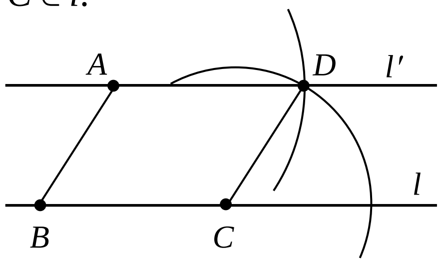


Рис. 2.11

***Построение* 11.** *Построить центр данной окружности* (рисунок 2.12).

***Построение* 12.** *Построить касательную к окружности, проходящую через данную на окружности точку* (рисунок 2.13).

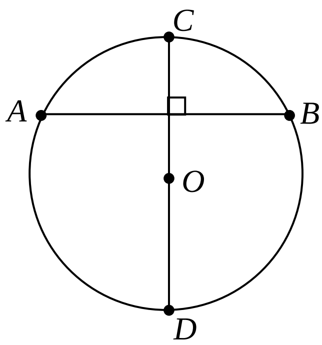


Рис. 2.12

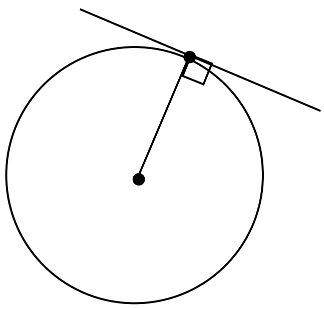


Рис. 2.13

2.3. *Схема решения задач на построение*

Решение задачи обычно разделяют на 4 части: <u>*анализ*</u>, <u>*построение*</u>, <u>*доказательство*</u> и <u>*исследование*</u>.

Анализ или поиск решения. Мы должны установить зависимость между данными фигурами и искомой фигурой, чтобы найти способ решения задачи. Мы предполагаем, что задача решена, и выполняем чертёж «от руки», на котором изображаем искомую фигуру и данные фигуры. Затем изучаем искомую фигуру и её связи с данными по условию фигурами для выяснения хода возможного построения. Часто имеет смысл выделить основной элемент построения (точку, прямую или отрезок), построение которого приводит к решению задачи.

Построение. Мы должны перечислить основные построения, которые надо выполнить для решения задачи, и выполнить эти действия на основном чертеже.

Доказательство. Необходимо доказать, что построенная фигура удовлетворяет всем поставленным условиям. Иногда это непосредственно следует из анализа и построения, и тогда этот пункт опускают.

Исследование. Здесь мы должны ответить на следующие вопросы:

1. При всяком ли выборе данных задача имеет решение и можно ли решить её с помощью циркуля и линейки?

2. Сколько решений может иметь задача в зависимости от начальных данных?

При определении количества решений различают два типа задач:

1. Задачи, в которых имеет значение положение искомой фигуры относительно данных фигур. В этом случае две равные фигуры, которые удовлетворяют условиям задачи, но отличаются положением, считаются различными решениями.

2. Задачи, в которых положение искомой фигуры не имеет значения. Тогда две равные фигуры считаются одним решением. Например, к этому типу относится задача о построении треугольника по трём сторонам.

При решении следующих задач мы будем придерживаться изложенной схемы решения.

***Построение* 13.** *Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.*

Решение. Уточним условие задачи.

Даны отрезок $\overline{c}$ и острый угол $\overline{\alpha}$ (рисунок 2.14). Построить ΔABC такой, что $\angle C=90°$, $\angle A=\overline{\alpha}$, $AB=\overline{c}$.

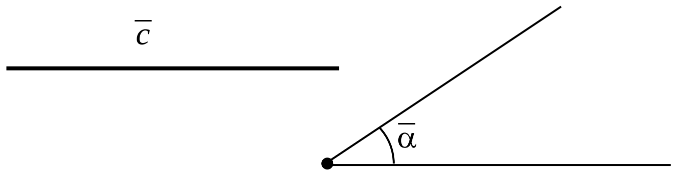


Рис. 2.14

<u>*Анализ*</u>. Предположим, что ΔABC уже построен. Тогда точка C лежит на окружности, построенной на отрезке AB, как на диаметре, и кроме этого, $\angle CAB=\overline{\alpha}$ (в учебном пособии мы обходимся без вспомогательного чертежа «от руки», т.к. будучи исполненным на компьютере, он ничем не отличается от основного чертежа).

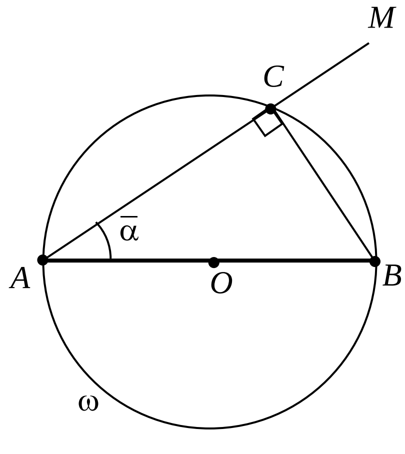


Рис. 2.15

<u>*Построение*</u>. 1) Отрезок $AB=\overline{c}$ (рисунок 2.15);

2) O – середина отрезка AB;

3) окружность $\omega=(O, OA)$;

4) от луча AB откладываем в любую из полуплоскостей $\angle BAM=\overline{\alpha}$;

5) $AM\cap\omega=C$;

6) ΔABC – искомый.

Доказательство. Согласно построению, $\angle C=90°$, $\angle A=\overline{\alpha}$, $AB=\overline{c}$, т.е. ΔABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Данная задача всегда имеет решение. Два равных треугольника, удовлетворяющих условию, считаем одним решением. Таким образом, задача имеет единственное решение при любом наборе данных $\overline{c}$ и $\overline{\alpha}$. ■

Упражнение. Используя это решение в качестве примера, выполните следующее построение.

***Построение* 14.** *Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.*

Это построение можно выполнить и другим способом (рисунок 2.16): строим прямой угол, на одной стороне от вершины откладываем отрезок, равный данному (это будет катет), а затем с центром в получившейся точке проводим дугу радиусом $\overline{c}$, которая пересечёт вторую сторону угла в ещё одной вершине.

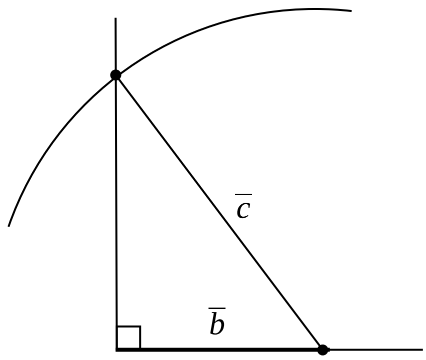


Рис. 2.16

Рассмотрим ещё один пример, иллюстрирующий схему решения.

***Построение* 15.** *Даны окружность* $\omega=(O, \overline{r})$ *и точка* $A\notin\omega$. *Построить касательную к* ω, *проходящую через* A.

Решение. _Анализ_. Предположим, что касательная уже построена: это есть прямая l, которая касается окружности ω в точке P. Если мы найдём P, то задача будет решена ($l=AP$). То есть l является основным элементом построения. Мы знаем, что касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания: $l\perp OP$. Значит, ΔOAP – прямоугольный, а следовательно, точка P принадлежит окружности, построенной на отрезке OA, как на диаметре (рисунок 2.17).

Построение. 1) O_1 – середина отрезка OA;

2) $\omega_1=(O_1, OA)$;

3) $P\in\omega_1\cap\omega$;

4) $l=AP$ – искомая касательная.

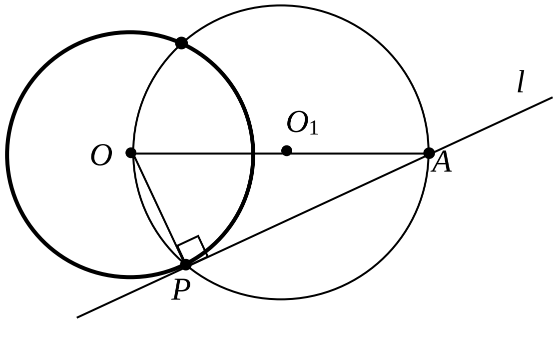


Рис. 2.17

<u>*Доказательство*</u>. Согласно построению, ΔOAP – прямоугольный $\Rightarrow$ $l=AP$ является касательной к ω.

<u>*Исследование*</u>. Данная задача имеет решение, если точка A находится вне окружности ω. При этом пересечение $\omega_1 \cap \omega$ состоит из двух точек, следовательно, задача имеет два решения. Если точка A находится внутри окружности ω, то задача решений не имеет.

2.4. *Решение задач на построение методом пересечений*

Суть метода: задачу сводят к построению одной точки X (основного элемента построения), которая удовлетворяет двум условиям a) и b), вытекающим из постановки задачи. Пусть Φ_1 – множество точек, удовлетворяющих условию a), Φ_2 – множество точек, удовлетворяющих условию b). Тогда $X \in \Phi_1 \cap \Phi_2$ (нельзя писать $X = \Phi_1 \cap \Phi_2$, поскольку такая точка может быть не единственной). При этом Φ_1 и Φ_2 должны допускать построение с помощью циркуля и линейки.

Примеры множеств, наиболее часто применяемых при построении.

1. Множество точек плоскости, равноудалённых от точек A и B, есть серединный перпендикуляр к отрезку AB (рисунок 2.18).

2. Множество точек плоскости, находящихся на данном расстоянии d от данной прямой l, есть объединение двух прямых $l_1 \cup l_2$, параллельных к l (рисунок 2.19).

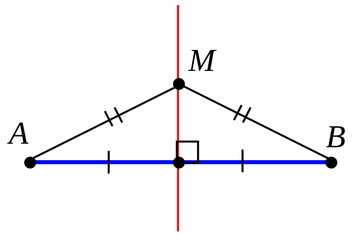


Рис. 2.18

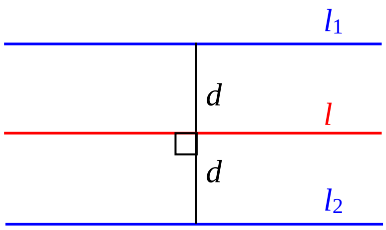


Рис. 2.19

3. Множество точек плоскости, равноудалённых от двух данных параллельных прямых l_1 и l_2, есть прямая l, являющаяся их осью симметрии (рисунок 2.19).

4. Множество точек плоскости, равноудалённых от двух данных пересекающихся прямых l_1 и l_2, есть две взаимно перпендикулярные прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных l_1 и l_2 (рисунок 2.20).

5. Множество точек плоскости, из которых отрезок AB виден под прямым углом, есть окружность (без самих точек A и B), построенная на AB, как на диаметре (рисунок 2.21).

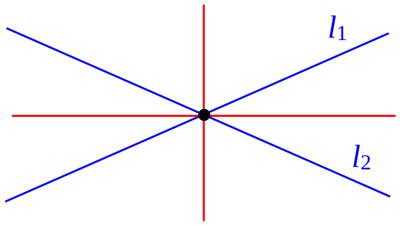


Рис. 2.20

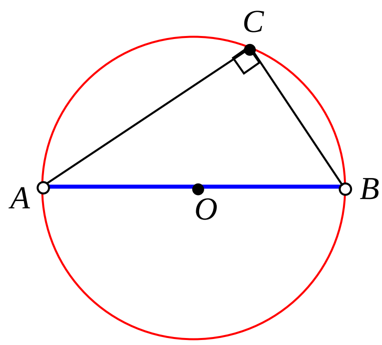


Рис. 2.21

6. Множество точек плоскости, из которых отрезок AB виден под углом $\varphi \in (0,90°) \cup (90°,180°)$, есть две дуги окружностей с общими концами A и B (без самих точек A и B), симметричные относительно прямой AB (рисунки 2.22 и 2.23).

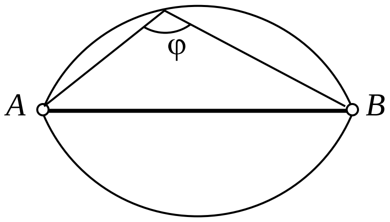


Рис. 2.22

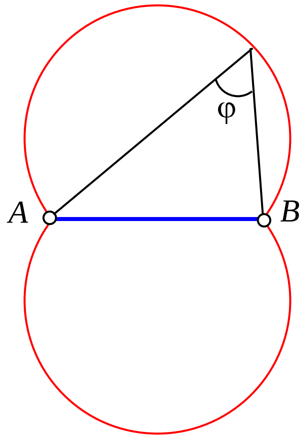


Рис. 2.23

7. Множество точек плоскости, из которых данная окружность ω видна под углом $\varphi \neq 180°$, есть окружность ω_1, концентрическая с ω и имеющая больший радиус (рисунок 2.24).

8. Множество точек, делящих всевозможные хорды окружности $\omega=(O, OA)$, исходящие из точки A, в положительном отношении λ, есть окружность $\omega_1=(O_1, O_1A)$ с центром на прямой OA и проходящая через A *без самой точки* A (на рисунке 2.25 изображён случай $\lambda=1$).

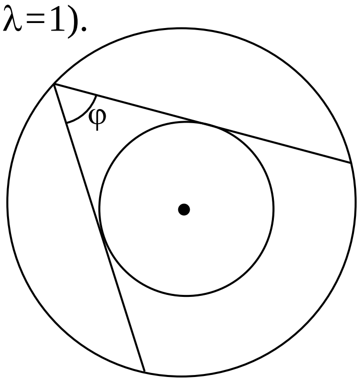


Рис. 2.24

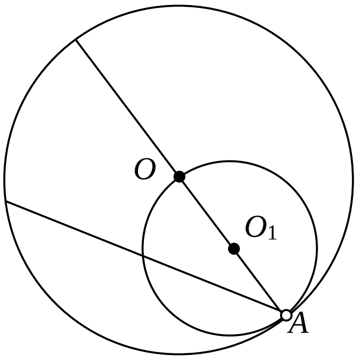


Рис. 2.25

9. $\{M \mid MA^2 - MB^2 = c = \text{const}\}$ есть прямая, перпендикулярная AB (рисунок 2.26).

***Построение* 16.** *Построить множество, изображённое на рисунке* 2.23.

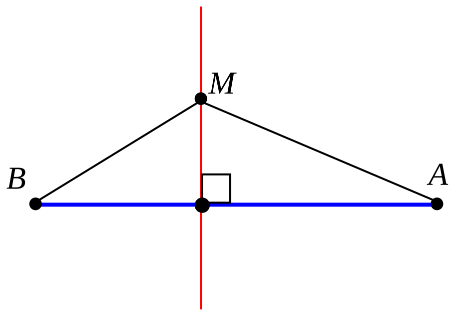


Рис. 2.26

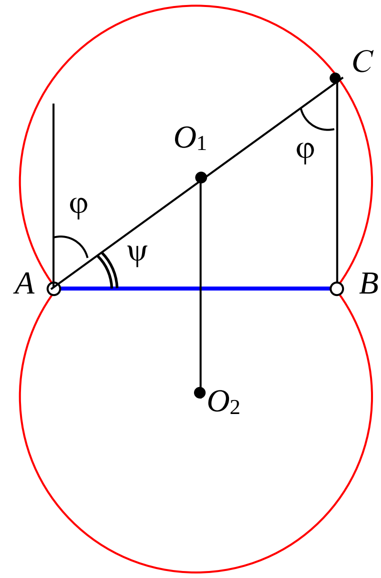


Рис. 2.27

Очевидно, что основными элементами построения в данном случае будут центры окружностей. Мы проведём серединный перпендикуляр к отрезку AB, а из точки A отложим угол ψ, равный $\frac{\pi}{2} - \varphi$ (рисунок 2.27). Сторона угла пересечёт перпендикуляр в точке O_1 – центре первой окружности, а центр второй окружности ему симметричен относительно прямой AB.

Упражнение. Самостоятельно выясните, как построить фигуру, изображённую на рисунке 2.22 (когда угол φ тупой).

***Построение* 17.** *Построить окружность, касательную к двум данным параллельным прямым* a *и* b и *проходящую через данную точку* M.

Решение. Анализ. Пусть ω – искомая окружность с центром O (рисунок 2.28). Если мы построим O, то $\omega = (O, OM)$. Поэтому точка O – основной элемент построения. Она должна удовлетворять двум условиям:

а) она равноудалена от двух параллельных прямых a и b;

b) $OM = r = d/2$, где d – расстояние между прямыми a и b.

Пусть Φ_1 – множество точек, удовлетворяющих условию а), Φ_2 – множество точек, удовлетворяющих условию b). Тогда Φ_1 есть ось симметрии для $a \cup b$, Φ_2 есть окружность $(M, d/2)$. Значит, $O \in \Phi_1 \cap \Phi_2$.

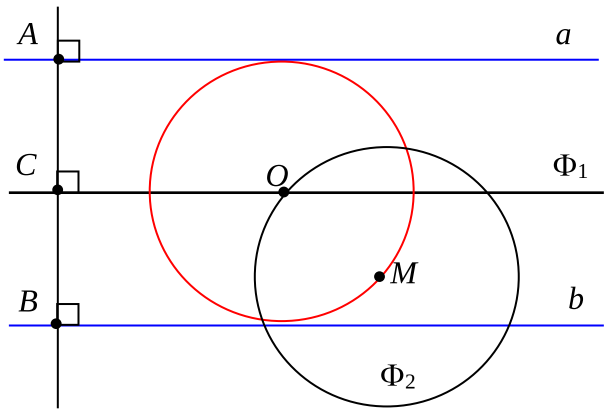


Рис. 2.28

Построение. 1) Любой перпендикуляр AB к a и b;

2) Φ_1 – серединный перпендикуляр к AB, C – середина AB;

3) $\Phi_2=(M, d/2)$;

4) $O=\Phi_1\cap\Phi_2$;

5) $\omega=(O, OM)$ – искомая окружность.

Доказательство. Согласно построению ω проходит через точку M и касается прямых a и b, т.к. её радиус равен $OM=r=d/2$.

Исследование. Данная задача имеет решение тогда и только тогда, когда Φ_1 и Φ_2 имеют общие точки, а число решений равно числу этих точек. Возможны три случая.

1. M лежит в полосе между a и b. Тогда $\rho(M, \Phi_1)<d/2$ (расстояние между M и Φ_1) и имеем две общие точки.

2. M принадлежит одной из прямых a или b (рисунок 2.29). Тогда $\rho(M, \Phi_1)=d/2$ и общая точка O одна.

3. M лежит вне полосы, ограниченной a и b. Тогда решений у задачи нет.

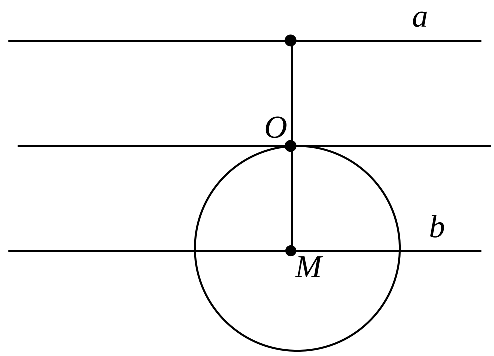


Рис. 2.29

***Построение* 18.** *Построить треугольник по основанию, высоте и углу при вершине.*

Решение. Уточним формулировку задачи. Даны два отрезка $\bar{c}$, $\bar{h}$ и один угол $\bar{\varphi}$ (рисунок 2.30). Построить ΔABC такой, что $AB=\bar{c}$, $h_c=\bar{h}$ (высота, опущенная из точки C на AB), $\angle C=\bar{\varphi}$.

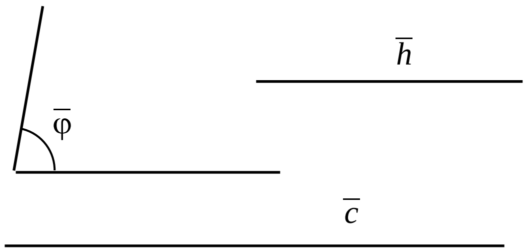


Рис. 2.30

Анализ. В качестве AB мы можем выбрать любой отрезок, равный $\bar{c}$. Если мы теперь построим вершину C, то задача будет решена, т.е. C – основной элемент построения. Точка C должна удовлетворять двум условиям:

a) C лежит на расстоянии h от прямой AB;

b) $\angle C=\bar{\varphi}$.

Пусть Φ_1 – множество точек, удовлетворяющих условию a), Φ_2 – множество точек, удовлетворяющих условию b). Тогда Φ_1 есть пара прямых, для которых прямая AB является осью симметрии; Φ_2 представляет собой две дуги окружностей с общими концами A и B (без самих точек A и B), симметричные относительно прямой AB. Значит, $C=\Phi_1\cap\Phi_2$.

<u>Построение</u>. 1) Любой отрезок $AB=\overline{c}$ (рисунок 2.31);

2) прямая d, отстоящая от прямой AB на расстоянии h;

3) дуга окружности, из которой отрезок AB виден под углом φ (см. построение 16);

4) $C \in d \cap \omega_1$;

5) ΔABC – искомый.

<u>Доказательство</u> вытекает непосредственно из построения.

<u>Исследование</u>. Нетрудно проверить, что высота в ΔABC_1 равна $\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-\varphi}{2}$. Если

$$h \leq \frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-\varphi}{2},$$

то ω_1 и d имеют пересечение и задача имеет решение. Если

$$h < \frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-\varphi}{2},$$

то задача решений не имеет. Два равных треугольника, удовлетворяющих решению задачи, мы будем считать одним решением.

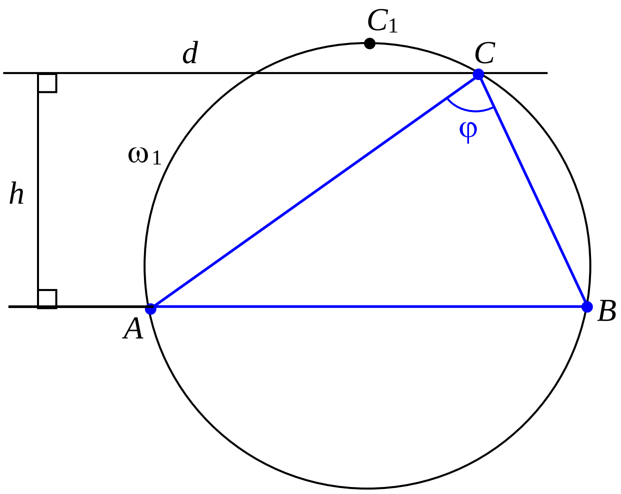


Рис. 2.31

2.5. *Метод движений*

При анализе задачи кроме данных фигур часто удобно рассмотреть вспомогательную фигуру, которая получается из данной фигуры с помощью движения, и эта вспомогательная фигура даёт возможность легко найти основной элемент построения. Иногда удобно построить сначала не искомую фигуру Φ, а равную ей фигуру Φ_1, которая, в отличие от искомой, легко строится; затем мы применяем движение с тем, чтобы из Φ_1 получить Φ. Следующий пример иллюстрирует применение симметрии.

***Построение* 19.** *Даны две окружности* ω_1, ω_2 *и прямая* l. *Построить квадрат так, чтобы две противоположные вершины принадлежали* l, *а ещё две вершины принадлежали* ω_1 *и* ω_2.

Решение. <u>Анализ</u>. Предположим, что данный квадрат $ABCD$ построен (рисунок 2.32): $B, D \in l$, $A \in \omega_1$, $C \in \omega_2$. Тогда прямая l является для квадрата осью симметрии. При этой симметрии вершина C переходит в вершину A, а окружность ω_2 – в окружность ω_2'. Выходит, что $A \in \omega_1 \cap \omega_2'$. Эта точка и будет у нас основным элементом построения.

<u>Построение</u>. 1) Окружность ω_2', симметричная к ω_2 относительно l;

2) $A \in \omega_1 \cap \omega_2'$;

3) точка C, симметричная к A относительно l;

4) $AC \cap l = O$;

5) точки $B, D \in l$ так, что $OB = OD = AO$;

6) $ABCD$ – искомый квадрат.

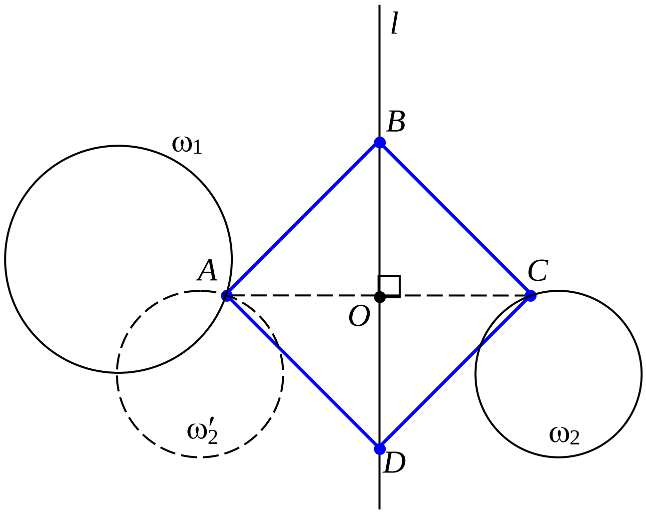


Рис. 2.32

<u>Доказательство</u> вытекает непосредственно из построения.

<u>Исследование</u>. Пересечение $\omega_1 \cap \omega_2'$ может состоять из одной или двух точек, а может быть и пустым множеством. Соответственно задача может иметь 1 или 2 решения, а может не иметь ни одного. Кроме того, может получиться, что совпадёт ω_2' с ω_1. Тогда задача имеет бесконечное количество решений.

Упражнение. Выясните, как построить окружность ω', симметричную данной окружности ω относительно данной прямой.

Упражнение. Выясните, как построить прямую a', получающуюся из данной прямой a поворотом на данный угол α вокруг данной точки A.

***Построение* 20.** *Даны две прямые a, b и точка C, не лежащая на них. Построить равносторонний ΔABC так, чтобы $A \in a$, $B \in b$.*

Решение. <u>Анализ</u>. Предположим, что данный треугольник построен. Тогда при повороте на $60°$ (ориентация не учитывается) вокруг точки C вершина A переходит в вершину B.

При этом прямая a переходит в прямую a', проходящую через B (рисунок 2.33). Значит, $B = b \cap a'$. Имея точку B, легко построить и оставшуюся вершину A. Поэтому B будем считать основным элементом построения.

На чертеже и в описании построения мы ограничимся поворотом на $60°$. При повороте на $-60°$ действия аналогичны.

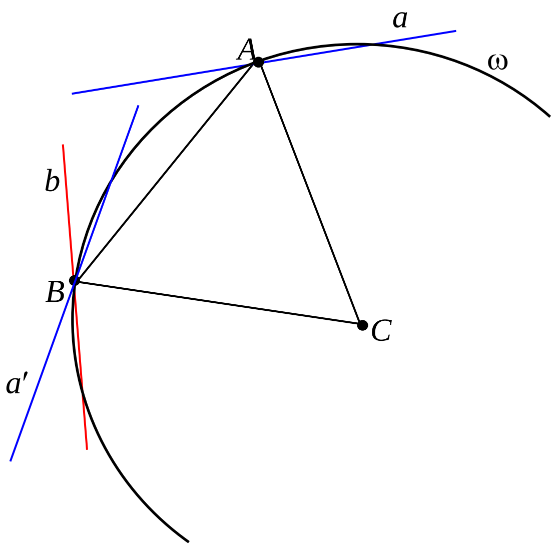


Рис. 2.33

<u>Построение</u>. 1) Прямая a', которая получается поворотом прямой a вокруг точки C на $60°$;

2) $B \in b \cap a'$;

3) $\omega = (C, BC)$;

4) $A \in \omega \cap a'$. Точек пересечения может оказаться две, поэтому из них надо будет выбрать одну подходящую. Или можно построить A как результат поворота точки B вокруг C на $-60°$;

5) ΔABC – искомый.

<u>Доказательство</u> вытекает непосредственно из построения.

<u>Исследование</u>. Пусть прямая a' получается из a поворотом на $60°$, a'' – поворотом на $-60°$. Каждая из них может дать нам отдельное решение или даже бесконечное множество решений в зависимости от расположения по отношению к b. Задача всегда будет иметь минимум одно решение (a' и a'' не могут быть параллельны b одновременно). Решений может быть два (a' и a'' пересекают b) или бесконечное количество (a' или a'' совпадает с b).

2.6. *Метод подобия*

Этот метод заключается в следующем. Мы строим вспомогательную фигуру Φ', подобную искомой, так, чтобы она удовлетворяла всем условиям задачи, кроме одного. Затем строим искомую фигуру Φ, как подобную Φ', чтобы она удовлетворяла пропущенному условию.

***Построение* 21.** *Построить треугольник по двум углам и периметру.*

Решение. Уточним формулировку задачи. Даны углы $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ и отрезок $\overline{p}$ (рисунок 2.34). Требуется построить ΔABC так, чтобы a) $\angle A = \varphi$, $\angle B = \psi$, b) периметр равен p.

<u>Анализ</u>. Произвольный треугольник, удовлетворяющий условию a), легко построить. Он будет подобен искомому. Коэффициент подобия равен отношению периметров.

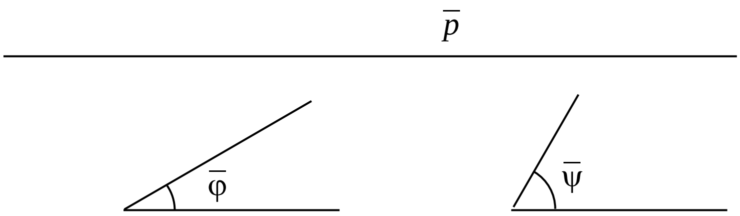


Рис. 2.34

<u>Построение</u>. 1) ΔAB_1C_1, удовлетворяющий условию a);

2) отрезок $\overline{p}_1$, равный периметру ΔAB_1C_1 (строим его отдельно);

3) на луче AB_1 от точки A отложим отрезки $AD = \overline{p}$ и $AD_1 = \overline{p}_1$;

4) прямая $l || B_1C_1$, $D \in l$;

5) $l \cap AC_1 = C$;

6) ΔABC – искомый (рисунок 2.35).

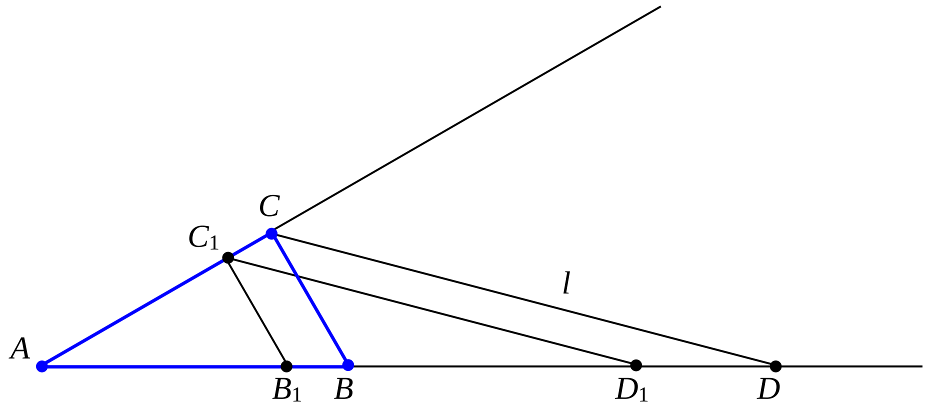


Рис. 2.35

<u>*Доказательство*</u> проведите самостоятельно.

<u>*Исследование*</u>. $\Delta A_1B_1C_1$ мы можем построить, если и только если $\varphi+\psi<180°$. ΔABC, подобный $\Delta A_1B_1C_1$, мы можем построить всегда. Два равных треугольника, удовлетворяющих условию задачи, мы считаем одним решением. Итак, задача имеет решение $\Leftrightarrow$ $\varphi+\psi<180°$, и это решение всегда единственное.

***Построение* 22.** *На стороне m данного угла найти точку, расстояния от которой до другой стороны n и данной точки M внутри угла равны* (рисунок 2.36).

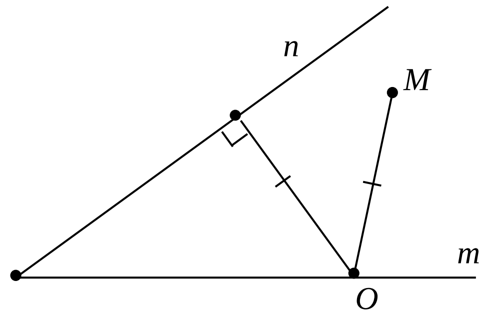


Рис. 2.36

Решение. <u>*Анализ*</u>. Предположим, что искомая точка O известна. Заметим, что O – центр окружности ω, которая касается прямой n и проходит через данную точку M. Отбросим условие того, что окружность ω должна проходить через точку M, и построим произвольную окружность ω_1 с центром на прямой m, касающуюся прямой n. На пересечении ω_1 с прямой AM получим точку M_1. Точку O легко построить, воспользовавшись M (рисунок 2.37).

<u>*Построение*</u>. 1) Выбираем любую точку O_1 на прямой m;

2) прямую $l\perp n$ через точку O_1;

3) $l\cap n=H_1$;

4) $\omega_1(O_1, O_1H_1)$;

5) $M_1\in AM\cap\omega_1$;

6) прямую $k\,||\,O_1M_1$ через точку M;

7) $k\cap m=O$ – искомую точку.

<u>*Доказательство*</u>. Очевидно, что точка O удовлетворяет всем условиям задачи.

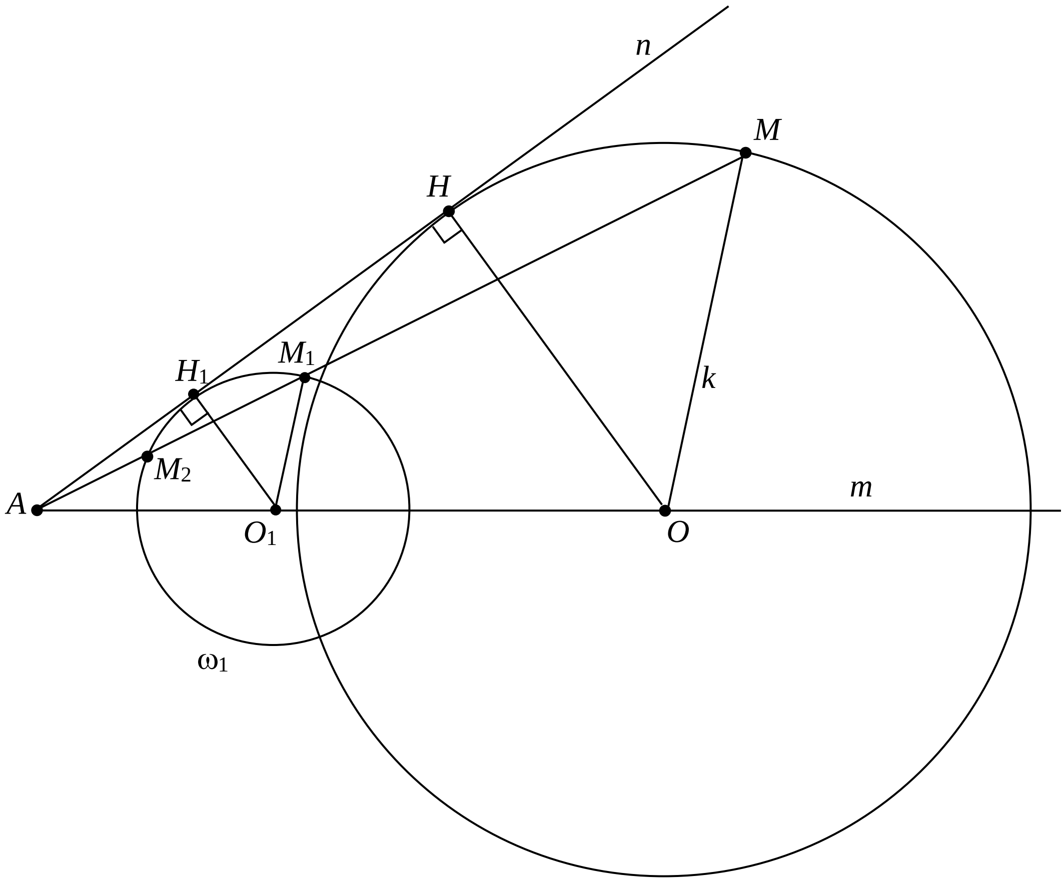


Рис. 2.37

<u>*Исследование*</u>. Очевидно, что данное построение можно осуществить всегда. Пересечение $\omega_1 \cap AM$ состоит из двух точек $\{M_1, M_2\}$. Если мы используем при построении точку M_2, то получим ещё одно решение. Таким образом, задача всегда имеет два решения.

Упражнение. Самостоятельно выполните построение 22 с применением точки M_2.

2.7. *Метод инверсии*

Суть метода. Мы подвергаем одну или несколько из данных фигур преобразованию инверсии, чтобы свести задачу к более простой, либо с этой же целью первоначально строим не саму искомую фигуру, а инверсную к ней, а затем используем инверсию для получения требуемой фигуры.

***Построение* 23.** *Даны окружность* ω *и две точки* A *и* B, *которые не лежат на ней. Построить окружность, касающуюся* ω *и проходящую через точки* A *и* B.

Анализ. Предположим, что исходная задача решена и γ – это искомая окружность. Введём обозначение: F – фигура, которая состоит из окружностей γ, ω и точек A, B. Проведём окружность σ с центром в точке A.

Рассмотрим инверсию f, для которой σ – окружность инверсии (рисунок 2.38). Фигура F', состоящая из окружности $\omega' = f(\omega)$, прямой $\gamma' = f(\gamma)$ и точки $B' = f(B)$, является образом фигуры F при этой инверсии. Заметим, что точка A как центр инверсии не имеет образа. Поскольку у γ и ω есть одна общая точка, то γ' и ω' – тоже, т.е. прямая γ' будет касаться окружности ω'. Фигура F' легко строится, потому что ω' и B' – это образы исходных фигур, а γ' является прямой, которая проходит через B' и касается к окружности ω'. Если использовать ту же инверсию, то можно легко построить окружность γ как образ прямой γ'.

Построение. Нужно выбрать окружность σ инверсии f таким образом, что она будет пересекать окружность ω в двух точках. Тогда легко построить образ окружности ω.

1. Построим точку $B' = f(B)$.
2. Построим окружность $\omega' = f(\omega)$. Для этого достаточно образа $3'$ точки 3 и провести окружность ω' через три точки 1, 2, $3'$ (рисунок 2.38).
3. Далее проведём через точку B' касательную γ' к окружности ω'. Если касательная будет проходить через точку A, то нужно взять другую касательную.

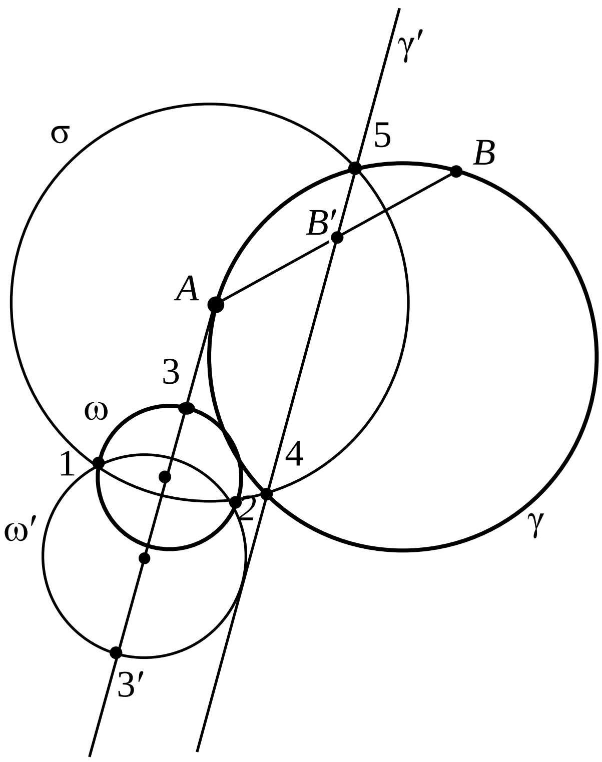


Рис. 2.38

4. Построим образ γ прямой γ' в инверсии f. На рисунке 2.38 окружность γ будет проходить через точки 4, 5, A.

Доказательство. Если прямая γ' не проходит через точку A, то её образом является окружность, которая проходит через точку A. Прямая γ' касается окружности ω' и проходит через точку A, значит, $B \in \gamma$, а ω и γ будут касаться друг друга.

Исследование. Данная задача может не иметь решений, иметь одно и два решения. Не иметь тогда, когда одна из точек A или B будет являться внутренней точкой, а другая – внешней относительно окружности ω. Одно решение тогда, когда точки A и B лежат на касательной к окружности ω. На рисунке 2.38 задача имеет два решения. Для того, чтобы построить второе решение, которое не присутствует на рисунке, нужно провести через точку B' вторую касательную γ'' к окружности ω' и построить её образ.

2.8. *Алгебраический метод*

Каждая задача на построение может быть сведена к нахождению одного или нескольких отрезков $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots$, с помощью которых легко получить искомую фигуру. Вместе с этим данные задачи также могут задаваться некоторыми отрезками $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$,… . Таким образом, задача на построение может быть заменена эквивалентной, но сформулированной в терминах отрезков: по данным отрезкам $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$,… построить отрезки $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots$.

Например, задачу на проведение касательной из данной точки к данной окружности можно переформулировать так. Даны отрезки $\overline{a}$ (радиус окружности) и $\overline{b}$ (расстояние от точки до центра окружности). Построить отрезок $\overline{x}$, равный расстоянию от данной точки до точки касания. После построения такого отрезка нужно провести окружность с радиусом, равным найденному отрезку, и центром в данной точке. На пересечении построенной и данной окружностей найдём искомые точки касания (рисунок 2.39).

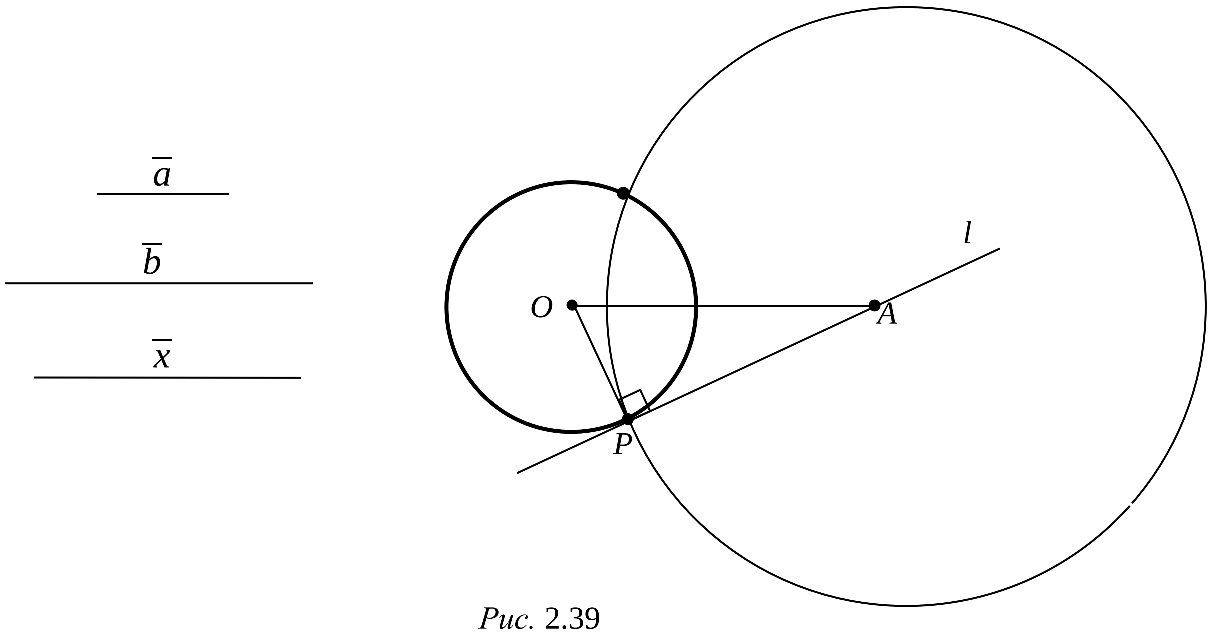


Рис. 2.39

Алгебраический метод решения задачи на построение заключается в следующем.

1. Формулируем задачу в терминах отрезков.
2. Выражаем искомые отрезки через данные, т.е. для каждого из искомых отрезков находим формулу вида

$$x=f(a, b, c,\ldots). \tag{2.1}$$

3. Строим отрезки, длины которых вычисляются по найденным формулам.
4. С помощью найденных отрезков выполняем окончательные построения, приводящие к решению исходной задачи.

Далее выясним, как строить выражения вида (2.1).

Элементарными будем называть построения, которые осуществляются по следующим формулам.

1. $x=a+b$.
2. $x=a-b$.

Выполнение этих построений очевидно, достаточно в нужном порядке построить на одной прямой отрезки $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

3. $x=\frac{m}{n}a,\ m,n\in N$. На рисунке 2.40 показано, как строится отрезок $x=\frac{3}{5}a$.

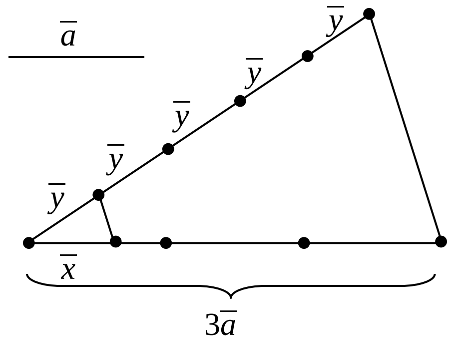


Рис. 2.40

При построении используется теорема Фалеса. Мы на одной стороне угла откладываем последовательно три отрезка, равных $\overline{a}$, а на другой стороне – пять произвольных отрезков $\overline{y}$. Соединяем конечные точки построенных отрезков и проводим параллельную через конец первого отрезка $\overline{y}$.

4. $x=\frac{ab}{c}$.

Построение также основано на теореме Фалеса. Нужно исходное равенство заменить равносильным равенством $\frac{x}{a}=\frac{b}{c}$ и выполнить построения, как на рисунке 2.41.

5. $x=\sqrt{ab}$.

Построение основано на известном соотношении между высотой прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, и отрезками, на которые основание этой высоты разбивает гипотенузу (рисунок 2.42).

Построения 6–8 основаны на теореме Пифагора.

6. $x=\sqrt{a^2+b^2}$.

Нам требуется построить прямоугольный треугольник с катетами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, гипотенуза и будет отрезком $\overline{x}$

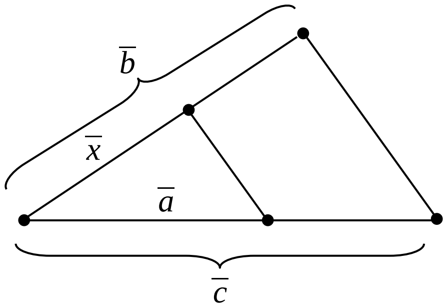


Рис. 2.41

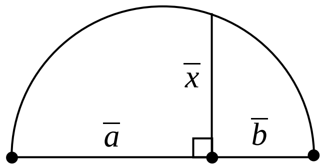


Рис. 2.42

7. $x=\sqrt{a^2-b^2}$.

В данном случае нужно построить прямоугольный треугольник с гипотенузой $\overline{a}$ и катетом $\overline{b}$, второй катет будет равен $\overline{x}$.

8. $x=\sqrt{n}\cdot a,\ n\in N$. Предлагаемый способ основан на последовательном построении прямоугольных треугольников. Например, на рисунках 2.43 и 2.44 показано, как можно построить отрезки длины $\sqrt{2}a$, $\sqrt{3}a$, $\sqrt{5}a$, $\sqrt{6}a$.

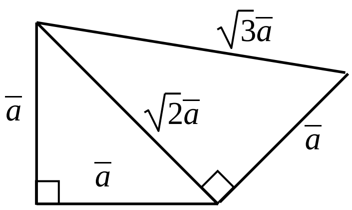


Рис. 2.43

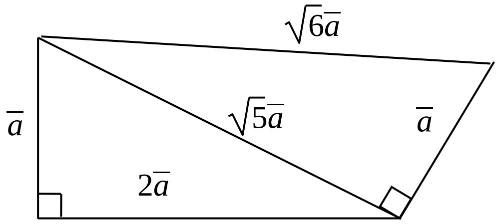


Рис. 2.44

Построения по более сложным формулам можно совершить поэтапно, используя элементарные построения.

***Пример* 2.1.** Построить отрезок, заданный формулой $x=\dfrac{a^2+b^2}{c}$.

Построение можно осуществить за два шага: $y=\sqrt{a^2+b^2}$; $x=\dfrac{yy}{c}$.

Однако не всегда удаётся легко заметить, как выражение (например, $x=\sqrt{ab-cd}$) сводится к элементарным. В таких случаях можно воспользоваться следующим приёмом.

Выберем некоторый отрезок $\overline{e}$ и будем считать его длину равной 1. Тогда оказывается возможным выполнить новые построения, в результате которых полученные отрезки зависят от единичного отрезка.

Примеры таких построений:

1. $x = ab$.

   Сводится к элементарному построению 4: $x = \dfrac{ab}{e}$.

2. $x = \dfrac{a}{b}$.

   Также сводится к элементарному построению 4: $x = \dfrac{ae}{b}$.

3. $x = \sqrt{a}$.
   Следует выполнить элементарное построение 5: $x = \sqrt{ae}$ (рисунок 2.45).

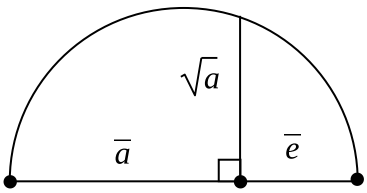


Рис. 2.45

4. $x = k$, где k – длина некоторого трезка, полученного элементарными построениями из отрезка $\overline{e}$. Например, $x = \sqrt{3} = \sqrt{3}e$.

Теперь сложные выражения можно строить, выполняя действия в том же порядке, в котором выполняются операции при вычислении значения этого выражения. Приведённые выше построения позволяют производить над отрезками следующие операции: сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение квадратного корня. Например, для получения отрезка длиной $x = \sqrt{ab - cd}$ нужно последовательно построить отрезки *ab*, *cd*, $ab - cd$, $\sqrt{ab - cd}$.

Однако попутно возникает важный вопрос: если промежуточные построения зависят от выбора единичного отрезка, не может ли оказаться так, что искомый отрезок также зависит от $\overline{e}$?

***Определение* 2.1.** Выражение $f(a, b, \ldots, l)$ называется *положительно-однородным выражением первой степени*, если $\forall\ t > 0$ выполнено

$$f(ta, tb, \ldots, tl) = t \cdot f(a, b, \ldots, l). \tag{2.2}$$

Например, $\sqrt{a^2 + b^2}$ является положительно-однородным выражением первой степени, а abc не является.

***Теорема* 2.3.** *Для того, чтобы формула* (2.1) *выражала длину одного и того же отрезка при любом выборе единичного отрезка, необходимо и достаточно, чтобы* $f(a, b, \ldots)$ *было положительно-однородным выражением первой степени.*

Доказательство. Пусть при выборе единичного отрезка $\overline{e}$ длины отрезков $\overline{a}, \overline{b}, \ldots$ выражаются числами $a, b, \ldots$, а при выборе отрезка $\overline{e}'$ – числами $a', b', \ldots$. Тогда для некоторого $t > 0$ выполнено одновременно $a' = ta,\ b' = tb, \ldots$. Пусть

$$x = f(a, b, \ldots),\ \ x' = f(a', b', \ldots).$$

Числа x и x' выражают длину одного и того же отрезка $\overline{x}$, если и только если $x'=tx$, т.е. выполнено (2.2). ■

Иными словами, если в результате изменения единицы измерения числа, выражающие длины отрезков $\overline{a}, \overline{b},\ldots, \overline{l}$ увеличились в 2 раза, то длина отрезка $\overline{x}$, который надо построить, должна тоже увеличиться в 2 раза. Если она изменится в другое число раз, то результат построения зависит от выбора $\overline{e}$.

В корректно поставленной задаче на построение искомая фигура не зависит от выбора единичного отрезка (если он не дан в условии изначально), поэтому алгебраическое решение всегда будет приводить к положительно-однородному выражению первой степени для искомого отрезка. Таким образом, *вводить единичный отрезок произвольно и использовать его при промежуточных построениях можно, это не повлияет на искомую фигуру*.

***Построение* 24.** *Дан ΔABC. Построить три окружности с центрами в точках A, B, C так, чтобы они касались друг друга внешним образом.*

Решение. Анализ. Пусть a, b, c – длины сторон в ΔABC, x, y, z – радиусы окружностей. Задача будет решена, если мы найдём эти радиусы.

Имеем равенства (рисунок 2.46)

$$y+z=a,\ x+z=b,\ x+y=c.$$

Из них находим, что

$$x=\frac{c+b-a}{2},\ y=\frac{a+c-b}{2},\ z=\frac{a+b-c}{2}. \qquad (*)$$

Доказательство и построение выполните самостоятельно.

Исследование. Данное построение можно осуществить, если

$$c+b-a>0,\ a+c-b>0,\ a+b-c>0.$$

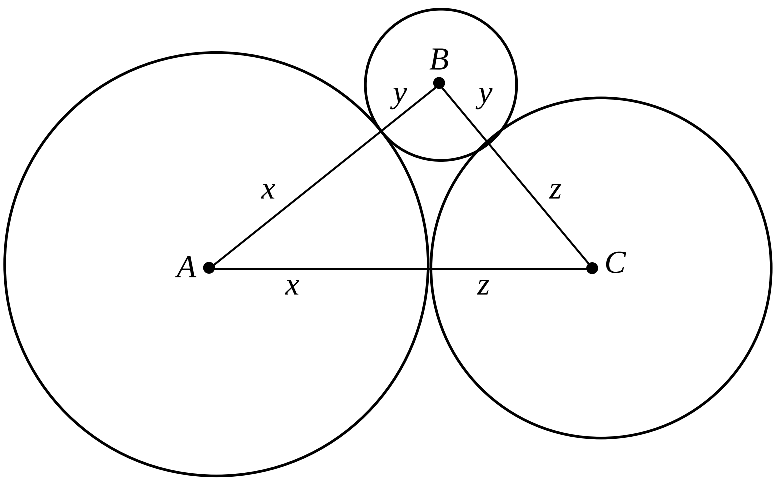


Рис. 2.46

В силу неравенства треугольника эти условия выполнены всегда. Формулы (*) однозначно выражают радиусы окружностей через стороны треугольника. Поэтому задача всегда имеет единственное решение. ■

***Построение* 25.** *Вписать в данную окружность* $\omega=(O, \overline{r})$ *правильный десятиугольник.*

Решение. <u>Анализ</u>. Пусть AB – сторона искомого десятиугольника, x – её длина. Рассмотрим ΔOAB. Пусть BD – его биссектриса (рисунок 2.47).

Легко вычислить, что $\angle O=36°$, $\angle A=\angle B=72° \Rightarrow \angle DBO=\angle DBA=$ $=36°$. Поэтому ΔABD подобен ΔOAB. Из этого подобия получаем

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AO}{AB} \Leftrightarrow \frac{x}{r-x}=\frac{r}{x} \Leftrightarrow$$

$$x^2+xr-r^2=0.$$

Корни этого уравнения:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdot r>0,\ x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\cdot r<0.$$

Нам подходит только первый корень. Задача сводится к построению отрезка, длина которого равна $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdot r$.

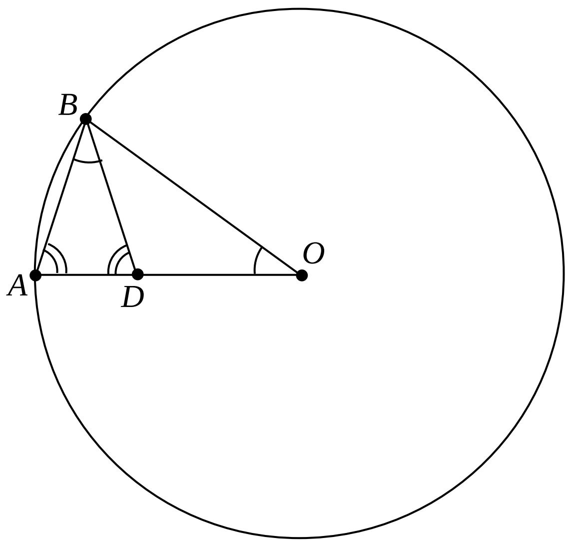


Рис. 2.47

Доказательство и построение осуществите самостоятельно.

<u>Исследование</u>. Данное построение можно выполнить всегда. Два равных решения этой задачи считаются одним решением. ■

2.9. *Признаки разрешимости задач на построение циркулем и линейкой*

Существуют задачи на построение, которые вообще не имеют решения при любом наборе данных. Например, невозможно построить окружность, описанную вокруг ромба, если этот ромб заведомо не является квадратом.

В дальнейшем речь о таких задачах не идёт. Предполагается, что искомая фигура существует. Как проверить, можно ли её построить с помощью циркуля и линейки?

Пусть алгебраическое решение приводит нас к выражению

$$x=f(a, b, c,\ldots). \tag{2.1}$$

В предыдущем параграфе мы выяснили, что если эта формула состоит из конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и извлечения квадратных корней, то $\overline{x}$ можно построить.

Оказывается, что это требование к формуле (2.1) является не только достаточным, но и необходимым условием возможности построения.

***Теорема* 2.4.** *Отрезок* $\overline{x}$ *можно построить с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда его длина выражается через длины данных отрезков с помощью конечного числа арифметических операций и извлечения квадратных корней.*

Далее мы приведём примеры классических неразрешимых задач на построение с помощью циркуля и линейки, которые тысячелетиями пытались разрешить математики.

1. *<u>Задача о трисекции угла</u>. Дан угол* $\overline{\alpha}$. *Циркулем и линейкой построить угол* $\overline{\varphi}$ *так, чтобы* $\varphi=\alpha/3$.

Существует бесконечное количество углов, для которых эта задача разрешима, например, для углов $\alpha=\pi/2^n$. В частности, для $\alpha=90°$ будет $\varphi=30°$. Существует также бесконечное количество углов, для которых задача неразрешима.

Рассмотрим два прямоугольных треугольника ΔOAB и $\Delta O_1A_1B_1$ с гипотенузами $OA=O_1A_1=2$ и острыми углами $\angle O=\alpha$, $\angle O_1=\varphi$ (рисунок 2.48). Пусть $\overline{a}=OB$, $\overline{x}=O_1B_1$. Построение отрезка $\overline{x}$ с помощью $\overline{a}$, очевидно, равносильно построению угла $\overline{\varphi}$.

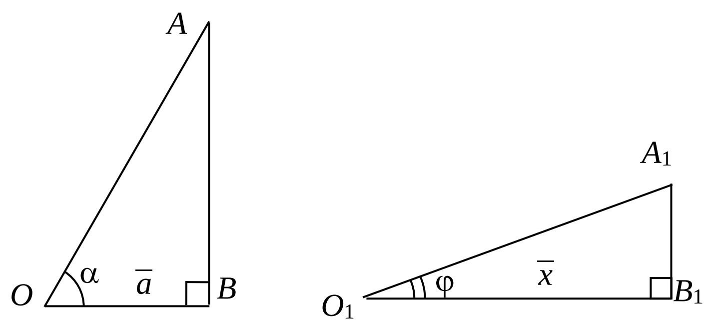


Рис. 2.48

Из треугольников находим, что $\cos\alpha=a/2$, $\cos\varphi=x/2$. Из тригонометрии известно, что

$$\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi.$$

Отсюда

$$\frac{a}{2}=4\frac{x^3}{8}-3\frac{x}{2},$$

или

$$x^3-3x-a=0.$$

Докажем неразрешимость задачи при $\alpha=60°$. В этом случае $a=1$, поэтому приходим к уравнению

$$x^3-3x-1=0.$$

В алгебре доказывается, что это уравнение неразрешимо в квадратных радикалах, т.е. его корни нельзя получить с помощью конечного числа арифметических операций и извлечения квадратных корней. Значит, для угла $\alpha=60°$ задача о трисекции угла неразрешима, отсюда и следует её неразрешимость в общем случае.

2. *Задача об удвоении куба. Построить ребро куба, объём которого вдвое больше объёма данного куба.*

Пусть $\overline{a}$ – ребро данного куба, $\overline{x}$ – искомого. Тогда их длины связаны равенством $x^3 = 2a^3$. В частности, для $a=1$ длина искомого отрезка находится из уравнения $x^3-2=0$. Единственным действительным корнем является число $\sqrt[3]{2}$, и его невозможно получить с помощью конечного числа арифметических операций и извлечения квадратных корней. Следовательно, задача об удвоении куба неразрешима.

3. *Задача о спрямлении окружности. Построить отрезок, длина которого равна длине данной окружности.*

Требуется построить отрезок длины $2\pi r$, где $\overline{r}$ – радиус данной окружности. Задача сводится к построению отрезка длины 2π.

Все действительные числа делятся на алгебраические и трансцендентные. Число называется алгебраическим, если оно служит корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Любой отрезок, который можно построить циркулем и линейкой из единичного отрезка, имеет длину, выражающуюся алгебраическим числом. В 1882 году Фердинанд фон Линдеманн доказал, что π – трансцендентное число, поэтому задача о спрямлении окружности также неразрешима циркулем и линейкой.

4. *Задача о квадратуре круга. Построить квадрат, площадь которого равна площади данного круга.*

Пусть $\overline{r}$ – радиус данной окружности, $\overline{x}$ – сторона искомого квадрата. Тогда их длины связаны равенством $x^2=\pi r^2$. Задача опять сводится к построению отрезка длины π.

5. *Задача о построении правильных многоугольников.* Эта задача равносильна задаче о разбиении окружности на n частей с помощью циркуля и линейки.

Из курса школьной геометрии известно, как построить правильный треугольник, квадрат и шестиугольник, а значит, мы можем построить правильный n-угольник для $n=3\cdot 2^m$ и $n=2^m$. В предыдущем разделе мы выяснили, что мы можем построить правильный десятиугольник, а значит, и пятиугольник. Следовательно, поставленная задача имеет решение и для $n=5\cdot 2^m$.

Теорема Гаусса. *Построение правильного n-угольника циркулем и линейкой возможно тогда и только тогда, когда число n представимо* *в виде* $n = 2^m p_1 p_2 \ldots p_s$, *где* $m \geq 0$ – *целое число, а* $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – *различные простые числа Ферма* (*т.е. числа вида* $2^{2^k}+1$, где $k \geq 0$ – *целое*).

Примеры. **2.2.** $m = 0$, $s = 1$. Тогда $n = p_1$ – простое число Ферма. При $k = 0, 1, 2, 3, 4$ получим $n = 3, 5, 17, 257, 656537$.

2.3. $m = 0$, $s = 2$. Тогда $n = p_1 p_2$. Наименьшее из таких чисел – это 15. Таким образом, мы можем циркулем и линейкой построить правильный 15-угольник.

2.4. Число $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ не удовлетворяет теореме Гаусса, так как множитель 3 входит в разложение дважды. Таким образом, нельзя разбить окружность на 360 частей $\Leftrightarrow$ нельзя построить угол в $1°$ циркулем и линейкой.

Замечание. Ферма полагал, что все числа вида $2^{2^k}+1$ – простые. Однако пока не обнаружено ни одного простого числа такого вида при $k > 4$.

2.10. *Задачи на построение одной линейкой*

Мы изучили теорию построений циркулем и линейкой. Далее мы рассмотрим задачи на построения иным набором инструментов. Наиболее распространёнными являются построения, выполняемые:

а) одной линейкой;

б) линейкой в предположении, что на плоскости уже дана некоторая фигура (например, окружность);

в) одним циркулем;

г) линейкой с параллельными краями;

д) линейкой и угольником.

Иногда рассматривают задачи на построение на ограниченной части плоскости (построения с недоступными точками). Это важно в чертёжной практике, так как лист бумаги ограничен.

***Задача* 1.** На листе бумаги изображены две прямые a, b и точка M, не принадлежащая им. Известно, что a и b пересекаются в точке N, которая находится за пределами листа. Требуется на данном листе провести прямую MN, пользуясь одной только линейкой (рисунок 2.49).

Решение этой задачи основано на теореме Дезарга; мы его рассмотрим в приложении.

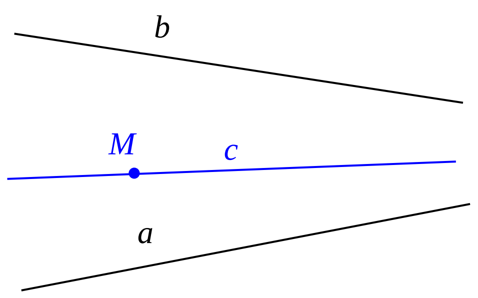


Рис. 2.49

Ниже мы выясним, что любая задача на построение, разрешимая циркулем и линейкой, может быть разрешена одной линейкой, если на плоскости дана одна окружность с центром. При этом надо оговориться, что новая окружность считается построенной, если построены её центр и радиус (провести саму окружность без циркуля всё-таки невозможно).

Приведём примеры задач, решаемых одной линейкой.

Следующее утверждение мы уже доказали в главе 1 «Преобразования плоскости».

Лемма о трапеции. *В произвольной трапеции точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны, середины оснований и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой (рисунок 2.50).*

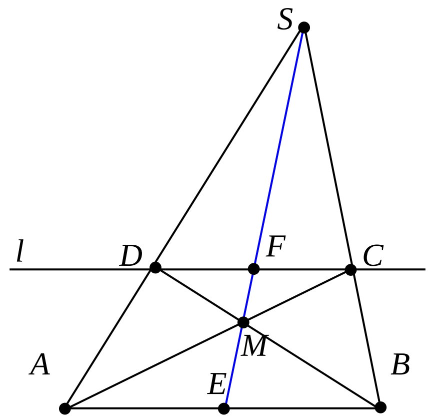


Рис. 2.50

***Задача* 2.** *Даны отрезок AB, его середина E и точка D, не лежащая на прямой AB. Построить прямую, проходящую через D параллельно AB.*

Решение. Анализ. Допустим, что задача решена, l – искомая прямая. Выберем на прямой AD точку S так, чтобы D лежала между A и S (рисунок 2.50). Пусть $C = SB \cap l$. Получим трапецию $ABCD$. Если мы построим C по данным точкам A, B, E, D, то задача будет решена.

Построение. 1) $S \in AD$ – любая точка такая, что D лежит между A и S;

2) $SE \cap DB = M$;

3) $AM \cap SB = C$;

4) CD – искомая прямая.

Доказательство. Для того, чтобы доказать, что CD – искомая прямая, достаточно доказать, что $ABCD$ – трапеция. Пусть $ABC'D$ – трапеция, M' – точка пересечения диагоналей. Тогда $SE \cap DB = M'$, точно так же, как и M. Значит $M = M' \Rightarrow C = C'$.

Исследование. Данное построение осуществимо всегда. Значит, задача всегда имеет единственное решение. ■

***Задача* 3.** *Даны отрезок AB и прямая $l || AB$. Построить середину отрезка AB.*

Решение. Приведём только построение, а остальные пункты решения восстановите самостоятельно.

Построение. 1) S – любая точка такая, что $S \notin l$, $S \notin AB$ (рисунок 2.50);

2) $D = SA \cap l$, $C = SB \cap l$;

3) $M = AC \cap BD$;

4) $E = SM \cap AB$ – искомая. ■

***Задача* 4.** *Даны две параллельные прямые a, b и точка M, не принадлежащая им. Построить прямую, параллельную a, b и проходящую через M.*

Решение. Берём на прямой a две точки A и B и строим середину E отрезка AB (задача 3). Имея A, B, E, D, строим искомую прямую (задача 1). ■

***Задача* 5.** *Даны параллелограмм $ABCD$, прямая l и точка $M \notin l$. Построить прямую a, проходящую через M параллельно к l.*

Решение. Хотя бы одна пара сторон параллелограмма не параллельна l. Пусть это AB и CD (рисунок 2.51).

<u>*Построение*</u>. 1) $AB \cap l = K$, $CD \cap l = L$;

2) $AC \cap BD = O$;

3) прямая $b || AB$, $O \in b$ (задача 3);

4) $b \cap l = N$ – середина KL;

5) имея K, N, L, M, строим искомую прямую (задача 1). ■

Обратите внимание, что все построения в задачах 1–4 осуществляются одной только линейкой. Если мы будем иметь линейку с параллельными краями, мы сможем провести две параллельные прямые, а значит найти середину данного отрезка и тем самым построить прямую, проходящую через данную точку параллельно данной прямой.

***Задача* 6.** *Даны окружность ω с центром O, прямая l и точка $M \notin l$. Построить прямую a, проходящую через M и параллельную l.*

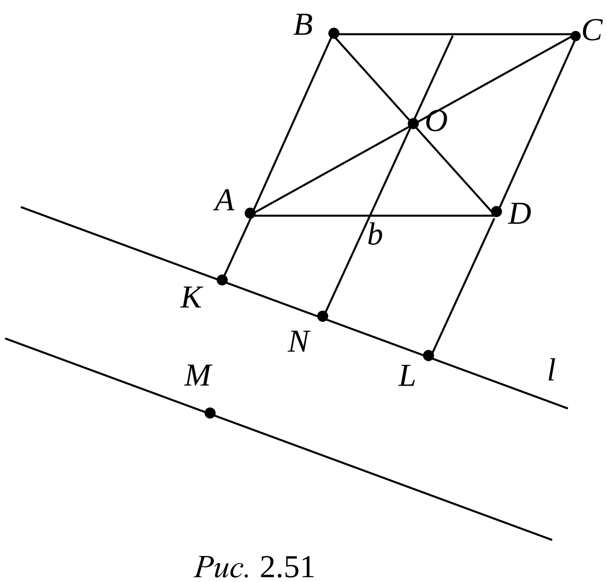


Рис. 2.51

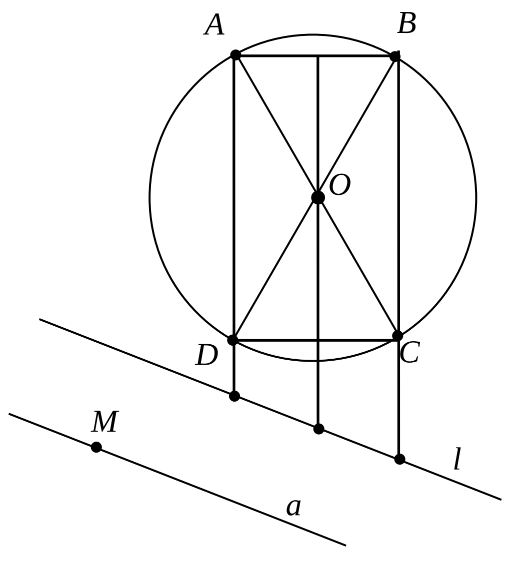


Рис. 2.52

Решение. Пусть A, B – любые точки ω. Проведём диаметры AC и BD (рисунок 2.52). Тогда $ABCD$ – прямоугольник, поэтому, пользуясь задачей 5, можем построить a. ■

***Задача* 7.** *Даны окружность ω с центром O, прямая l и точка $M \notin l$. Построить прямую x, проходящую через M и перпендикулярную l.*

Решение. Выберем произвольную точку $A \in \omega$ и проведём через неё прямую $a || l$ (точка A должна удовлетворять одному требованию: a не должна получиться касательной к ω (рисунок 2.52)).

Пусть $B \in \omega \cap a$ – другая точка пересечения. Проведём диаметры AC и BD. Тогда $ABCD$ – прямоугольник. Искомая прямая x будет параллельна AD. ■

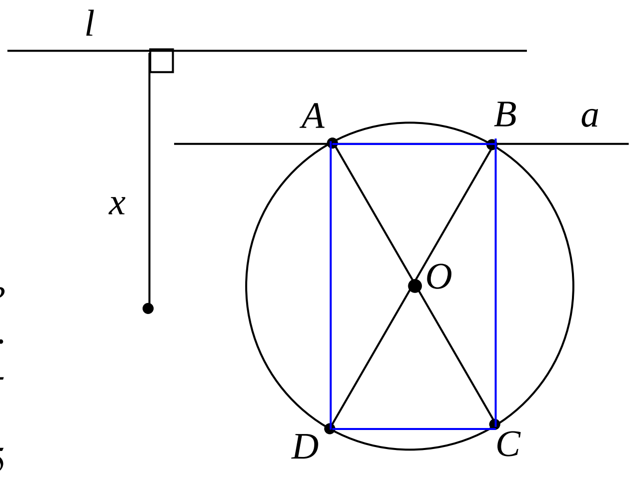


Рис. 2.52

***Задача* 8.** *Даны окружность ω с центром O и отрезок AB. Построить середину этого отрезка.*

Решение. Согласно задаче 5 мы можем построить прямую, параллельную AB. Согласно задаче 2 можем найти середину AB.

***Задача* 9.** *Даны окружность ω с центром O, луч AM и отрезок PQ. Отложить на луче AM отрезок AB=PQ.*

Решение. <u>Случай I</u>. $PQ||AM$. Тогда строим (рисунок 2.53):

1) прямую AP;
2) $l||AP$, $Q \in l$;
3) $B = l \cap AM$.

Отрезок AB – искомый, т.к. $ABQP$ – параллелограмм.

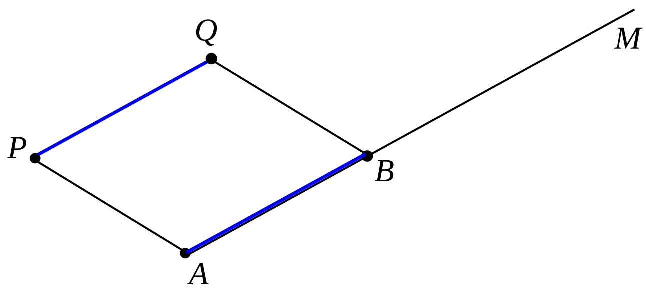


Рис. 2.53

<u>Случай II</u>. PQ лежит на AM. Тогда строим (рисунок 2.54):

1) прямую $b||AM$ (см. задачу 5);
2) на прямой b откладываем любой отрезок $P'Q'=PQ$ (см. случай I);
3) на луче AM строим $AB= P'Q'$.

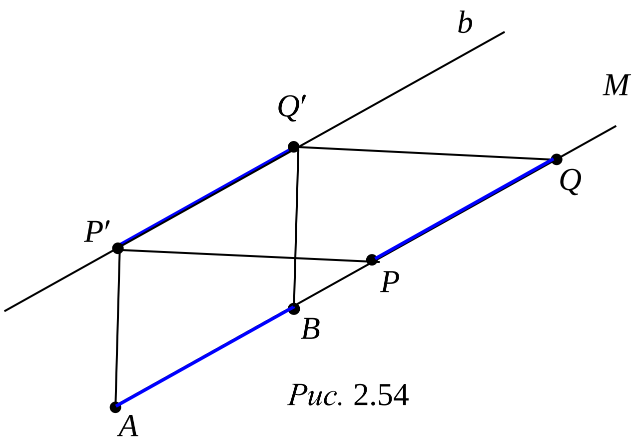


Рис. 2.54

<u>Случай III</u>. $PQ \nparallel AM$.

Строим (рисунок 2.55):

1) луч $AN||PQ$;
2) на AN отложим $AC=PQ$;

3) радиусы $\overrightarrow{OC'}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{OB'}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AM}$;

4) $l\,||\,C'B'$, $C\in l$;

5) $B=l\cap AM$. ■

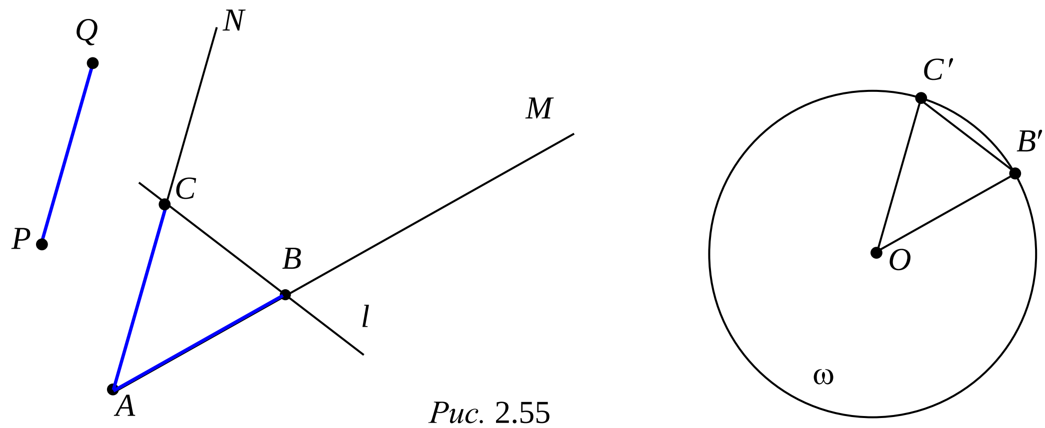


Рис. 2.55

***Задача* 10.** *Даны окружность* ω *с центром* O, *отрезок* AB *и прямая* l *такая, что* $\rho(A,l)<AB$. *Построить точки пересечения прямой* l *с окружностью* $\gamma=(A,AB)$ (*сама окружность* γ *не построена*).

Решение. <u>*Случай* I</u>. Прямая l проходит через A. Тогда задача сводится к задаче 8: нам нужно от точки A на прямой l отложить два отрезка, равных AB (рисунок 2.56).

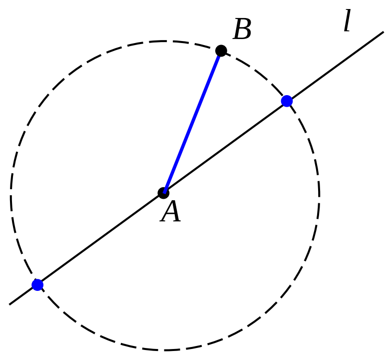


Рис. 2.56

<u>*Случай* II</u>. Прямая l не проходит через A. Тогда строим (рисунок 2.57):

1) отрезок $AH\perp l$ (см. задачу 7);

2) отрезок $AC\,||\,l$, $AC=AB$;

3) ΔAHC – прямоугольный;

4) радиус $\overrightarrow{OC'}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AC}$ (см. задачу 6);

5) $\Delta AHC'$, стороны которого параллельны сторонам ΔAHC (см. задачу 5);

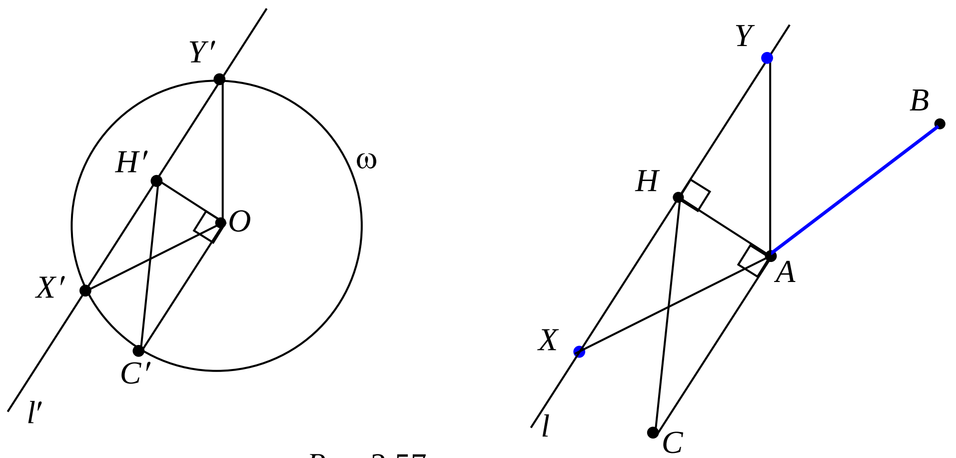


Рис. 2.57

6) $\{X', Y'\} = l' \cap \omega$;

7) $l' \| l,\ H' \in l'$;

8) прямые $a \| OX',\ b \| OY'$;

9) $X = a \cap l,\ Y = b \cap l$ – искомые точки. ■

***Задача* 11.** *Даны две окружности* $\omega_1 = (O_1, \overline{r}_1)$, $\omega_2 = (O_2, \overline{r}_2)$, *которые пересекаются* ($r_2 > r_1$). *Построить точки их пересечения.*

Решение. *Анализ*. Легко проверить, что если M – общая точка двух окружностей, то $MO_1^2 - MO_2^2 = r_2^2 - r_1^2$. Мы уже выяснили в разделе 2.8, что множество точек

$$\{M \mid MO_1^2 - MO_2^2 = c = \text{const}\}$$

есть прямая, перпендикулярная O_1O_2. Прямая

$$l = \{M \mid MO_1^2 - MO_2^2 = r_2^2 - r_1^2\}$$

называется *радикальной прямой двух окружностей*. Если мы сумеем её построить, то задача будет решена (см. задачу 9).

Для того, чтобы построить l, следует найти точку $C = O_1O_2 \cap l$. Таким образом, C является основным элементом построения.

Построение: 1) отрезки $O_1A = r_2$, $O_2B = r_1$ перпендикулярно O_1O_2 (рисунок 2.58);

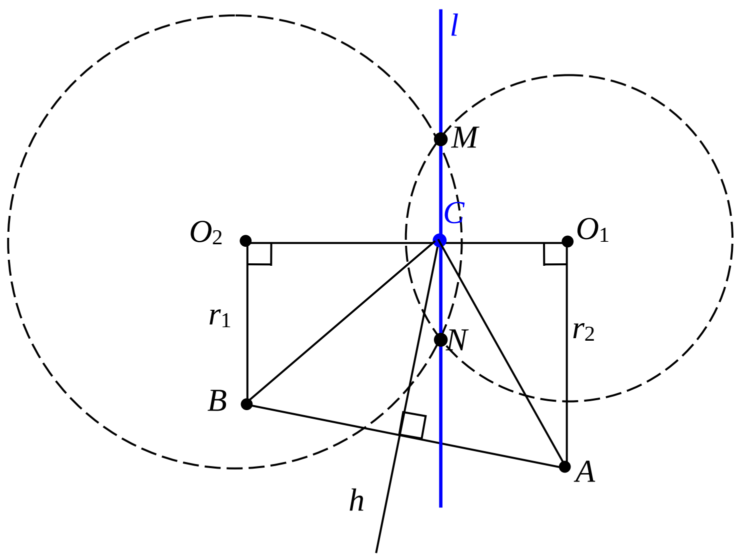


Рис. 2.58

2) отрезок AB и серединный перпендикуляр к нему h;

3) $C = h \cap O_1O_2$;

4) $l \perp O_1O_2,\ C \in l$;

5) $\{M, N\} = l \cap \omega_1$ (см. задачу 9).

Доказательство. Из ΔO_1AC и ΔO_2BC получаем

$$AC^2 = O_1C^2 + r_2^2, \quad BC^2 = O_2B^2 + r_1^2.$$

Поскольку C лежит на серединном перпендикуляре, то $AC = BC \Rightarrow$

$$O_1C^2 + r_2^2 = O_2B^2 + r_1^2 \quad \Rightarrow \quad CO_1^2 - CO_2^2 = r_2^2 - r_1^2,$$

т.е. C лежит на радикальной прямой. ■

Из всех предыдущих задач вытекает

Теорема Штейнера. *Любая задача на построение, выполнимая циркулем и линейкой, может быть выполнена одной линейкой, если на плоскости дана окружность с её центром.*

Действительно, мы показали, как строится пересечение любой прямой и любой окружности или двух окружностей, тем самым выполнены все постулаты построений.

2.11. *Построения, выполняемые одним циркулем*

При геометрических построениях линейка нужна лишь для того, чтобы проводить прямые через две точки. Понятно, что при отказе от её использования провести прямую невозможно, поэтому если известны две точки прямой, будем считать её заданной. Сразу же возникают два вопроса: можно ли с помощью одного циркуля найти точку пересечения двух заданных таким образом прямых и можно ли найти точку пересечения прямой, заданной двумя точками, и окружности? Оказывается, что ответы на оба вопроса утвердительны, и отсюда следует «ненужность» линейки при наличии циркуля. Таким образом, верна

Теорема Мора – Маскерони. *Любая задача на построение точек, выполнимая циркулем и линейкой, может быть выполнена одним циркулем.*

Однако наличие двух инструментов значительно облегчает задачу и сокращает число шагов построения.

Приведём примеры задач на построение одним циркулем.

***Задача* 1.** *Даны две точки A и B. Построить ещё одну точку, лежащую на прямой AB.*

Решение (рисунок 2.59):

1) $\omega_1 = (A, AB)$, $\omega_2 = (B, AB)$;

2) $\{P, Q\} = \omega_1 \cap \omega_2$;

3) $\gamma_1 = (P, \overline{r})$, $\gamma_2 = (Q, \overline{r})$, где $r > PQ/2$;

4) $\{C, D\} = \gamma_1 \cap \gamma_2$ – искомые точки. ■

Под словами «провести через точку прямую…» будем понимать «построить ещё одну точку на прямой …».

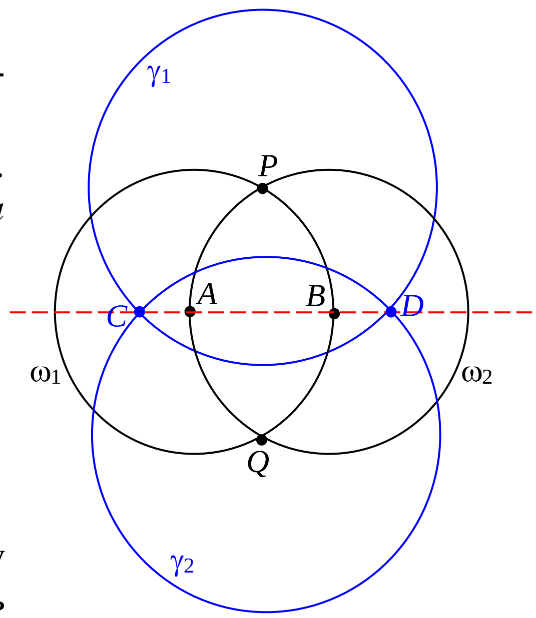


Рис. 2.59

***Задача* 2.** *Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Через точку C провести прямую, параллельную AB.*

Решение. 1) $\omega_1 = (B, AC)$, $\omega_2 = (C, AB)$ (рисунок 2.60);

2) $D = \omega_1 \cap \omega_2$ – искомая точка на прямой.

Действительно, в четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны равны, поэтому $ABCD$ – параллелограмм $\Rightarrow$ $AB || CD$.

***Задача* 3.** *Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Через точку C провести прямую, перпендикулярную AB.*

Решение. 1) $\omega_1 = (A, AC)$, $\omega_2 = (B, BC)$ (рисунок 2.61);

2) $D \in \omega_1 \cap \omega_2$.

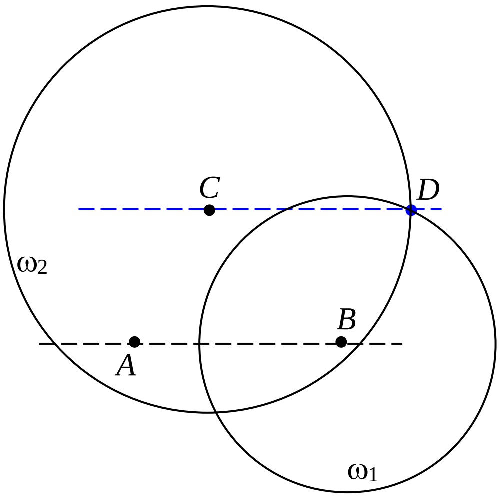


Рис. 2.60

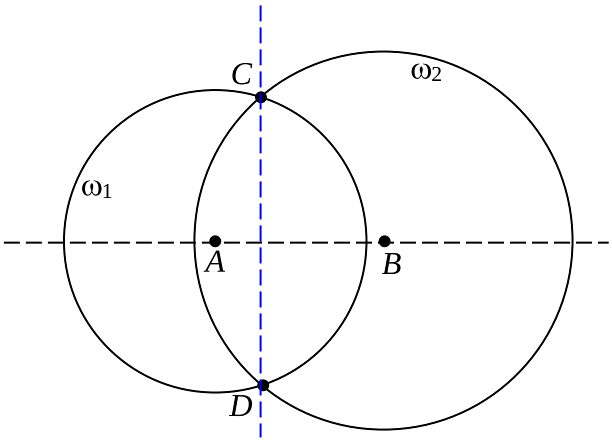


Рис. 2.61

2.12. *Задания для решения на практических занятиях*

1. Простейшие построения

1. Даны два отрезка $\overline{p}$, $\overline{q}$ и угол $\overline{\varphi}$. Построить такой ΔABC, чтобы высота h_A и биссектриса b_A, проведённые из вершины A, были соответственно равны p и q, а $\angle A = \varphi$ (рисунок 2.62).

2. Построить ΔABC, если даны высота BH и радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников ABH и CBH (рисунок 2.63).

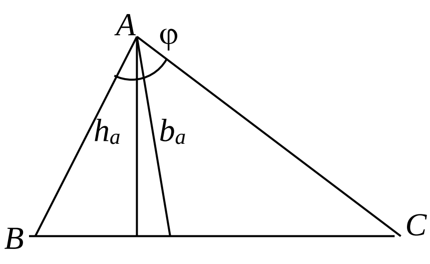


Рис. 2.62

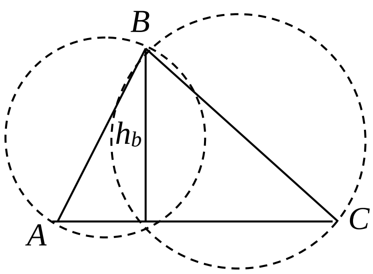


Рис. 2.63

3. Построить прямую, проходящую через точку A и пересекающую данную окружность в точках P и Q так, чтобы $AP=PQ$ (рисунок 2.64).

4. Даны три неколлинеарные точки A, B и C. Построить окружности с равными радиусами и центрами в точках A и B так, чтобы их общая касательная проходила через C (рисунки 2.65, 2.66).

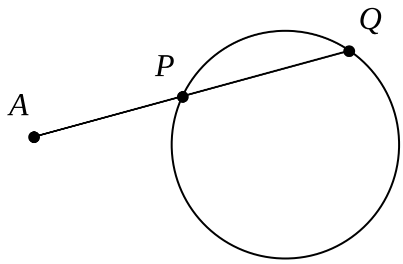


Рис. 2.64

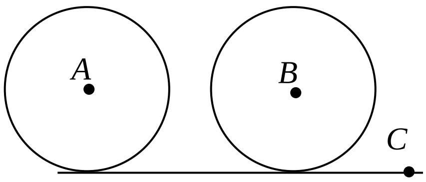


Рис. 2.65

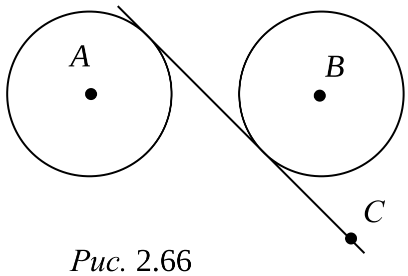


Рис. 2.66

5. Даны две точки и окружность. Провести через данные точки две параллельные прямые так, чтобы данная окружность отсекала на них две равные хорды (рисунок 2.67).

6. Даны две точки и окружность. Построить прямоугольник, вписанный в окружность, так, чтобы противоположные его стороны проходили через данные точки.

7. Дан прямоугольный треугольник. Построить окружность с центром, принадлежащим одному из катетов, так чтобы она проходила через вершину прямого угла и касалась гипотенузы (рисунок 2.68).

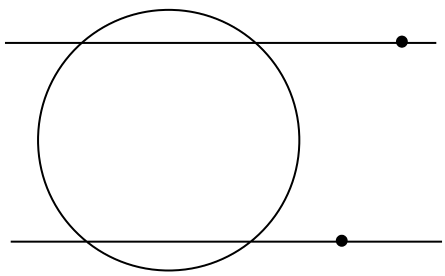


Рис. 2.67

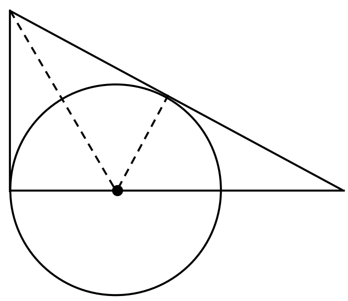


Рис. 2.68

8. Построить ромб, зная его диагональ и радиус вписанной окружности (рисунок 2.69).

9. На одной стороне угла с вершиной A дана точка M. Построить на другой стороне точку X так, чтобы $\angle AMX = 3\angle AXM$ (рисунок 2.70).

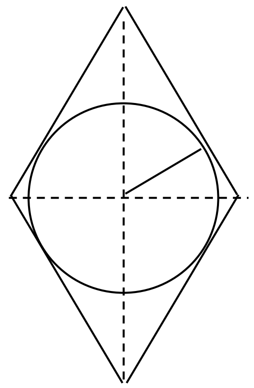


Рис. 2.69

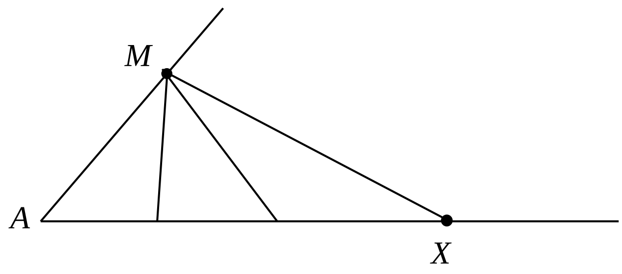


Рис. 2.70

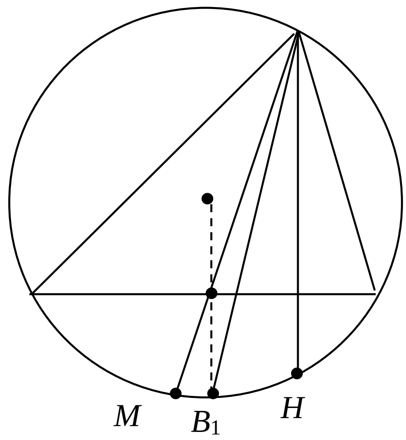


Рис. 2.71

10. Построить ΔABC, если углы A и B равны данным углам, а разность сторон AC и BC равна данному отрезку.

11. Вписать в данную окружность треугольник ABC так, чтобы прямые, содержащие биссектрису, медиану и высоту, проведённые из одной вершины, проходили соответственно через данные точки B_1, M и H окружности (рисунок 2.71).

2. Применение свойств некоторых множеств точек к решению задач на построение

12. Даны окружность (O, r), её внутренняя точка P и хорда AB. Построить хорду XY так, чтобы она проходила через точку P, а её середина принадлежала хорде AB (рисунок 2.72).

13. Построить параллелограмм, две смежные вершины которого есть данные точки, а две другие принадлежат данной окружности (рисунок 2.73).

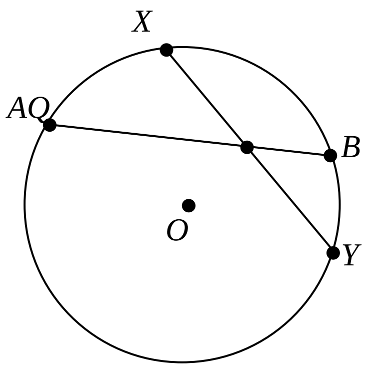


Рис. 2.72

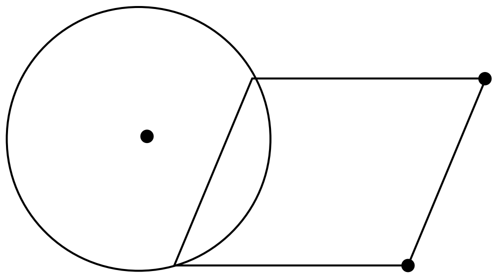


Рис. 2.73

14. Даны окружность и две точки, не лежащие на ней. Построить прямоугольник, две смежные стороны которого (или их продолжения) проходят через данные точки (рисунок 2.74).

15. Построить окружность, пересекающую три данные окружности равного радиуса по хордам, равным данному отрезку (рисунок 2.75).

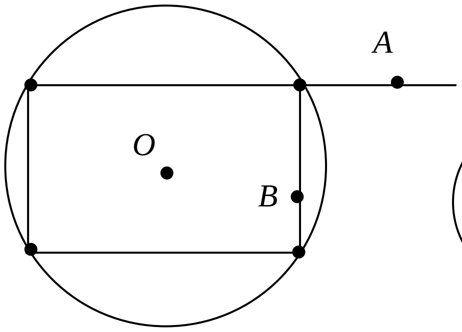


Рис. 2.74

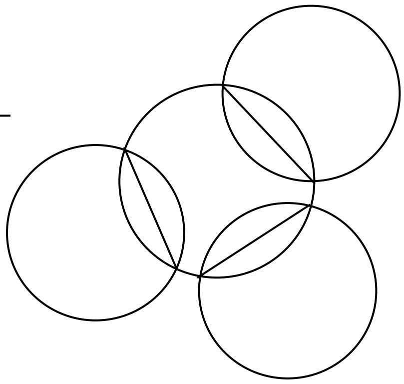


Рис. 2.75

16. Построить треугольник ΔABC, если даны вершины основания A и B, угол, равный углу $\angle C$, и точка D пересечения основания с биссектрисой угла при вершине C (рисунок 2.76).

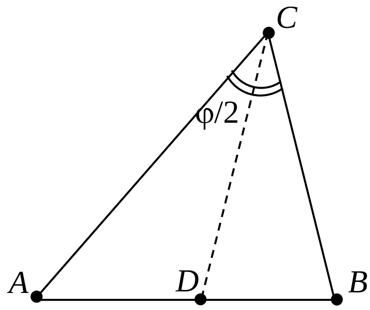


Рис. 2.76

3. Задачи на построение треугольника по различным элементам

В задачах на построение треугольника через a, b, c обозначаем стороны, лежащие напротив вершин A, B, C соответственно, через $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – углы, m_a, m_b, m_c – медианы, l_a, l_b, l_c – биссектрисы, h_a, h_b, h_c – высоты, проведённые к соответствующим сторонам, R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей, p – полупериметр. В следующих задачах указаны элементы, по которым следует построить треугольник.

17. a, $\angle A$, m_a.

18. a, m_a, h_a.

19. $\angle A$, h_a, h_b.

20. a, $\angle A$, h_b.

21. $\angle A$, h_c, $2p$.

22. $\angle A$, h_b, m_a.

23. a, $\angle A$, m_b.

24. a, $\angle A$, r.

25. $\angle A$, r, R.

4. Геометрические построения с использованием свойств параллельного переноса, поворота и симметрии

26. Построить трапецию по четырём сторонам.

27. Построить трапецию по разности оснований, двум боковым сторонам и одной диагонали.

28. Построить трапецию по двум основаниям и диагоналям.

29. Построить треугольник, если даны три его медианы.

30. Построить трапецию, зная основание, угол между диагоналями, высоту и среднюю линию.

31. Построить четырёхугольник, зная три стороны и углы, прилежащие к четвёртой стороне (подсказка показана на рисунке 2.77).

32. Построить четырёхугольник по сторонам и углу между одной парой противоположных сторон.

33. Построить правильный треугольник, одна вершина которого находится в данной точке, а две другие – на данных прямой и окружности (рисунок 2.78).

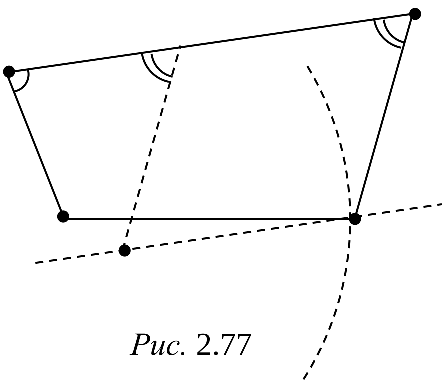


Рис. 2.77

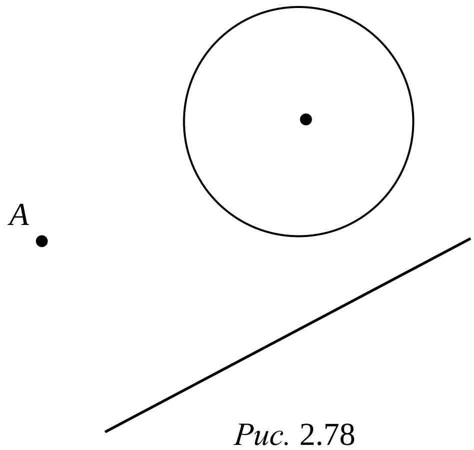


Рис. 2.78

34. На данной прямой l, пересекающей отрезок AB, найти точку M, чтобы l была биссектрисой угла $\angle AMB$ (рисунок 2.79).

35. Построить параллелограмм, две противоположные вершины которого находятся в данных точках, а две другие вершины – на данных прямой и окружности.

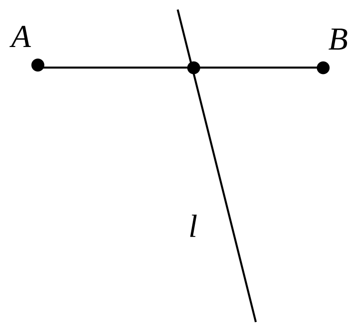


Рис. 2.79

5. Геометрические построения с применением свойств преобразований подобия

36. Построить квадрат $ABCD$ так, чтобы точки A и B принадлежали данной окружности, а C и D – данной прямой (рисунок 2.80).

37. Дан треугольник ABC и отрезок p. Построить такую прямую x, параллельную стороне BC, чтобы $BX+YC=p$, где $X=x\bigcap AB$, $Y=x\bigcap AC$ (рисунок 2.81).

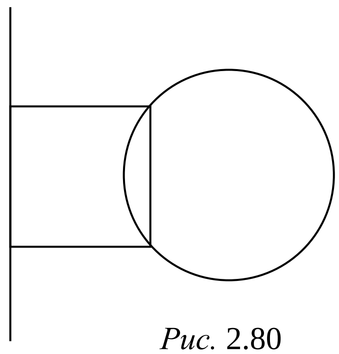


Рис. 2.80

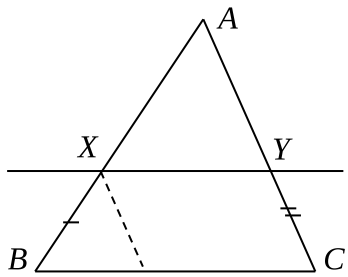


Рис. 2.81

38. В данный сектор AOB вписать квадрат так, чтобы две его смежные вершины принадлежали дуге сектора, а две другие вершины – соответственно радиусам OA и OB (рисунок 2.82).

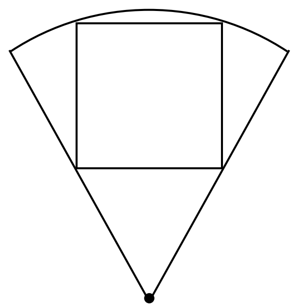


Рис. 2.82

39. Даны три отрезка a, p и q. Построить ромб, стороны которого равны отрезку a, а отношение диагоналей равно $p:q$.

40. В данный треугольник вписать прямоугольник, подобный данному.

41. Даны $\angle BAC$ и точка M во внутренней области этого угла. Построить окружность, проходящую через M и касающуюся сторон данного угла.

6. Алгебраический метод решения задач на построение

42. Дан треугольник ABC. Построить такую прямую x, параллельную стороне BC, чтобы $AX=YC$, где $X=x\bigcap AB$, $Y=x\bigcap AC$ (рисунок 2.83).

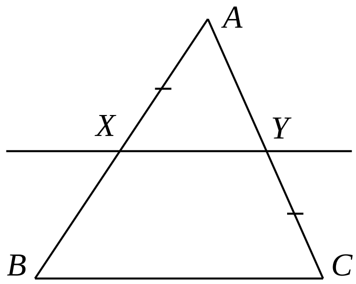


Рис. 2.83

43. Построить параллелограмм так, чтобы его сторона и две высоты были равны данным отрезкам a, b и c.

44. Построить круг, площадь которого равна площади кольца между двумя данными концентрическими окружностями.

45. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой (рисунок 2.84).

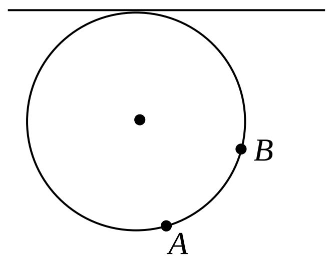


Рис. 2.84

46. Построить прямую x, параллельную основаниям данной трапеции и пересекающую боковые стороны во внутренних точках, чтобы образованные при этом две трапеции с общим основанием x были бы равновелики.

47. Построить квадрат, равновеликий данному прямоугольнику.

48. Построить квадрат, равновеликий данному треугольнику.

49. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник, равновеликий данному прямоугольнику.

50. Построить квадрат, площадь которого была бы равна сумме площадей двух данных прямоугольников.

51. В данную окружность вписать прямоугольник, равновеликий данному квадрату.

52. В данную окружность вписать прямоугольник данного периметра.

7. Построения с применением свойств инверсии

53. Даны окружность ω, относительно которой осуществляется инверсия, и окружность γ. Построить образ γ' окружности при инверсии. Рассмотреть различные варианты взаимного расположения окружностей.

54. Даны: окружность ω, относительно которой осуществляется инверсия, и:

а) квадрат, две вершины которого лежат на окружности ω, а ещё одна – в центре инверсии;

б) квадрат, одна вершина которого лежит на окружности ω, а ещё одна – в центре инверсии.

Построить образы этих квадратов при инверсии.

55. Даны: окружность ω, относительно которой осуществляется инверсия, и вписанный в неё ΔABC. Построить его образ при инверсии.

56. Даны: окружность ω, относительно которой осуществляется инверсия, и две окружности γ_1 и γ_2, которые

а) касаются друг друга в центре инверсии;

б) пересекаются в центре инверсии.

Построить образы окружностей γ_1 и γ_2.

57. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.

58. Через данную точку провести окружность, касающуюся двух данных окружностей.

59. ***Задача Аполлония.*** Даны три окружности, пересекающиеся в одной точке. Построить окружность, которая касается данных окружностей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

3.1. *Аффинная система координат. Простое отношение точек*

В этом параграфе мы напомним некоторые понятия из курса аналитической геометрии, которые необходимы для понимания учебного материала.

Определение **3.1.** Пусть ненулевые векторы $\vec{a}, \vec{b}$ на плоскости отложены из одной точки. Пара векторов $(\vec{a}, \vec{b})$ называется *правой*, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ осуществляется против часовой стрелки, и *левой* – если по часовой.

Определение **3.2.** *Репером* (*аффинным репером*) на плоскости называется упорядоченная тройка точек $\mathcal{R}=(O, A_1, A_2)$, не лежащих на одной прямой.

Репер определяет на плоскости упорядоченную пару векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}_1\,,\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{OA}_2\,.$$

Будем говорить, что $\mathcal{B}=(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – это есть соответствующий реперу векторный базис.

Определение **3.3.** Говорим, что репер $\mathcal{R}=(O, A_1, A_2)$ имеет *правую* (*левую*) *ориентацию*, если соответствующий ему векторный базис имеет правую (левую) ориентацию.

Репер определяет на плоскости аффинную систему координат следующим образом. Пусть $\mathcal{B}=(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – соответствующий реперу векторный базис, а $\vec{x}$ – произвольный вектор (рисунок 3.1). Тогда мы можем разложить $\vec{x}$ по базису $\mathcal{B}=(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

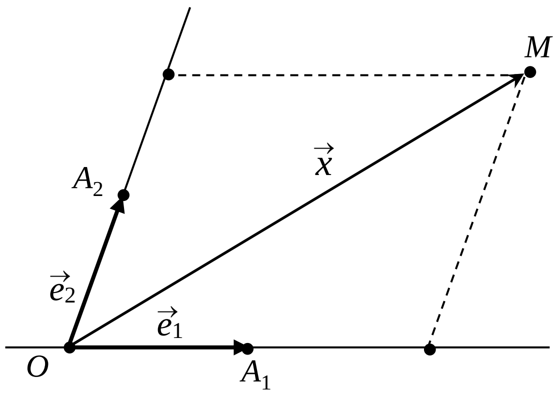


Рис. 3.1

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2. \qquad (3.1)$$

Определение **3.4.** Коэффициенты разложения (3.1) называются *аффинными координатами вектора* $\vec{x}$ в данном базисе.

Пишем $\vec{x}(x_1, x_2)_{\mathcal{B}}$.

Определение **3.5.** Пусть M – произвольная точка плоскости. Тогда вектор $\vec{x}=\overrightarrow{OM}$ называется её *радиус-вектором*. *Аффинными координатами* *точки* M относительно репера $\mathcal{R}$ называются координаты её радиус-вектора, т.е. $\vec{x}(x_1, x_2)_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow M(x_1, x_2)_{\mathcal{R}}$.

Если заранее известно, о каком базисе или репере идёт речь, то обозначение базиса после координат мы не добавляем.

***Определение* 3.6.** Репер $\mathcal{R}$ и базис $\mathcal{B}$ называются *ортонормированными*, если $\angle A_1OA_2 = \pi/2$, $|\overrightarrow{OA_1}| = |\overrightarrow{OA_2}| = 1$. В этом случае мы обозначаем репер так: $\mathcal{R} = (O, E_1, E_2)$, а базисные векторы – $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Систему координат, которую определяет ортонормированный репер, тоже называют *ортонормированной*. Если к тому же пара базисных векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ является правой, то система координат называется *декартовой*.

Координаты точки в декартовой системе координат обычно обозначаем (x, y), но это не исключает использования такого обозначения в тех случаях, когда не имеет значения, является ли система координат декартовой или просто аффинной.

В дальнейшем ортонормированный репер, в отличие от произвольного аффинного, записываем так: $\mathcal{R} = (O, E_1, E_2)$.

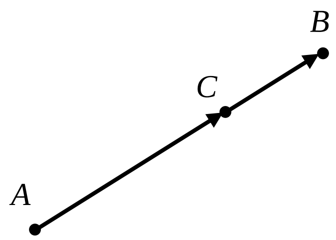


Рис. 3.2

***Определение* 3.7.** Пусть точки A, B, C лежат на одной прямой (рисунок 3.2). Число λ называется *простым отношением трёх точек* A, B, C, если выполнено $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$.

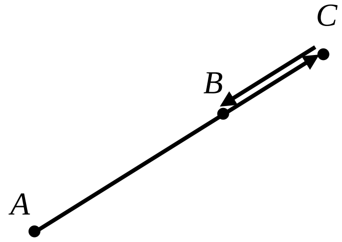


Рис. 3.3

Если C лежит между A и B, то $\lambda > 0$, и можем сказать, что точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda : 1$. Если же C лежит за пределами отрезка AB (рисунок 3.3), то $\lambda < 0$. Пишем $\lambda = (AB, C)$ или $\lambda = (ABC)$.

2. *Собственные значения и собственные векторы аффинного преобразования*

Мы выяснили в разделе 1.2, что если аффинное преобразование задаётся формулами

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + x_0, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

то оно определяет линейное преобразование, действующее на векторы плоскости по формулам

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X}' = \mathbf{AX},$$

где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$ – координатные столбцы векторов $\vec{a}(x,y)$ и $\vec{a}'(x',y')$. Формулы этих преобразований имеют такой вид в произвольной аффинной системе координат.

***Определение* 3.8.** Ненулевой вектор $\vec{a}$ называется *собственным вектором* линейного преобразования F векторов плоскости, если под действием этого преобразования данный вектор $\vec{a}$ переходит в коллинеарный ему вектор, т.е. $F(\vec{a})=\lambda\vec{a}$, где λ – некоторое число. Тогда λ называется *собственным значением* (*собственным числом*) данного преобразования, и мы говорим, что вектор $\vec{a}$ *соответствует собственному значению* λ.

Собственными значениями и собственными векторами аффинного преобразования мы будем называть собственные значения и собственные векторы линейного преобразования векторов, которое определяется этим аффинным преобразованием.

Сразу отметим, что если $\vec{a}$ есть собственный вектор данного преобразования, то и любой коллинеарный ему ненулевой вектор $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ $(\alpha\neq 0)$ тоже будет собственным.

Для нахождения координат собственного вектора $\vec{a}$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=\lambda x, \\ a_{21}x+a_{22}y=\lambda y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x+a_{12}y=0, \\ a_{21}x+(a_{22}-\lambda)y=0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Эта система всегда имеет решение $(0,0)$, но нам надо найти именно ненулевое решение. Согласно правилу Крамера решение системы является единственным, если определитель её матрицы не равен нулю. Поэтому для того, чтобы существовало ненулевое решение, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{3.3}$$

Если раскрыть определитель, получим квадратное уравнение относительно неизвестной λ. Возможны следующие случаи:

а) У уравнения два различных действительных корня. Для каждого из них находим свой соответствующий ему собственный вектор, эти векторы будут неколлинеарны друг другу.

б) Один действительный кратный корень. Тогда либо этому собственному числу соответствует только один, с точностью до коллинеарности, собственный вектор, либо любой вектор является собственным (последнее возможно только для гомотетии или параллельного переноса).

в) Действительных корней, а значит, и собственных векторов, нет.

Для нахождения собственных векторов мы подставляем поочерёдно найденные собственные значения в систему (3.2) и решаем её. При этом обязательно должны получиться пропорциональные уравнения, поэтому одно из них можно отбросить.

Пример. Линейное преобразование действует на векторы по формулам:

$$\begin{cases} x' = -5x + 2y, \\ y' = 3x. \end{cases}$$

Найти собственные числа и собственные векторы данного преобразования.

Решение. Составляем матрицу **A** данного преобразования и матрицу $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$ (**E** – единичная матрица), которая получается из матрицы вычитанием неизвестного числа λ из элементов главной диагонали:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}-\lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель последней матрицы и приравниваем его к нулю:

$$\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -6$ – собственные значения преобразования.

Подставляем в матрицу $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$ число $\lambda_1 = 1$:

$$\mathbf{A} - 1\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы пропорциональны, поэтому первую строку отбрасываем, а по второй строке составляем систему из одного уравнения:

$$3x - y = 0.$$

Отсюда

$$y = 3x.$$

Оно имеет бесконечное число решений, и нас устраивает любое ненулевое решение. Например, пусть $x = 1$, тогда $y = 3$. Значит, имеем собственный вектор $\vec{a}(1,3)$. Аналогично для $\lambda_2 = -6$ найдём:

$$\mathbf{A} + 6\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad x - 2y = 0, \; x = 2y, \; \vec{b}(2,1).$$

В ответе мы должны записать для каждого собственного числа соответствующий ему собственный вектор.

Ответ. $\lambda_1 = 1$, $\vec{a}(1,3)$; $\lambda_2 = -6$, $\vec{b}(2,1)$.

3.3. *Теоремы Дезарга и Паскаля*

В этом параграфе мы рассмотрим несколько построений, которые можно осуществить одной линейкой.

Хорошо известно, что треугольник состоит из трёх точек (вершин), которые не лежат на одной прямой, и трёх соединяющих их отрезков.

Определение **3.9.** *Трёхвершинником* называется фигура, которая состоит из трёх не лежащих на одной прямой точек и трёх прямых, соединяющих попарно эти точки. Точки называются *вершинами*, а прямые – *сторонами* трёхвершинника.

Пусть ABC и $A'B'C'$ – два трёхвершинника. Будем называть <u>соответственными</u> вершины A и A', B и B', C и C', а также стороны $a = BC$ и $a' = B'C'$, $b = AC$ и $b' = A'C'$, $c = AB$ и $c' = A'B'$.

Теорема Дезарга. *Если прямые, соединяющие соответственные вершины трёхвершинников* ABC и $A'B'C'$, *пересекаются в одной точке, то соответственные стороны пересекаются в точках, лежащих на одной прямой* (рисунок 3.4).

Обратная теорема Дезарга. *Если соответственные стороны трёхвершинников* ABC и $A'B'C'$ *пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, то прямые, соединяющие соответственные вершины, сходятся в одной точке.*

При этом считается, что параллельные прямые тоже сходятся в бесконечно удалённой точке.

***Упражнение* 1.** Нарисуйте чертёж к этим теоремам в случае, когда $AA' \,||\, BB' \,||\, CC'$.

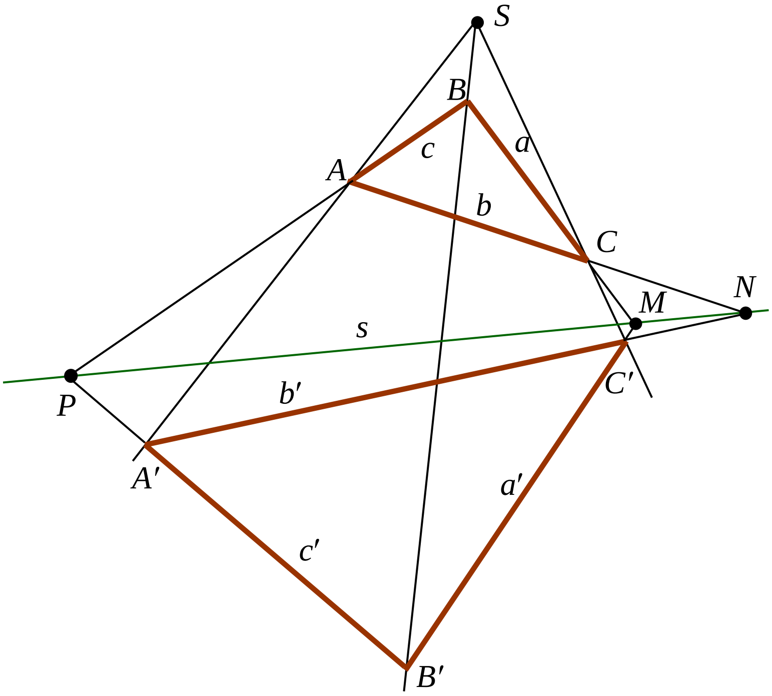


Рис. 3.4

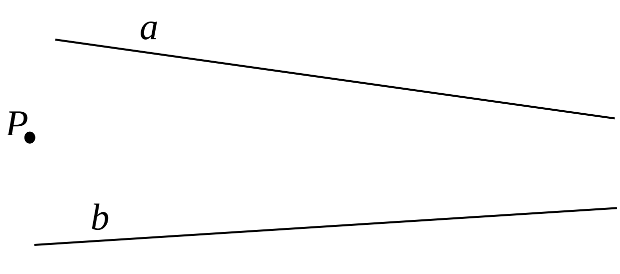


Рис. 3.5

Эта теорема позволяет решить следующую задачу.

Задача. Пусть даны две прямые a и b, которые пересекаются в недоступной точке N (за пределами листа бумаги или за пределами доски), и точка P (рисунок 3.5). Требуется провести прямую PN.

Решение. 1) Выбираем произвольную точку S, не лежащую на прямых a и b. Проводим через неё три прямые l_1, l_2, l_3 (рисунок 3.6);

2) в пересечении l_1, l_3 с прямыми a и b получаем точки A и A', C и C';

3) $PA \cap l_2 = B, PA' \cap l_2 = B'$;

4) $BC \cap B'C' = M$;

5) PM – искомая прямая (рисунок 3.7).

Важно отметить, что это построение осуществляется одной линейкой.

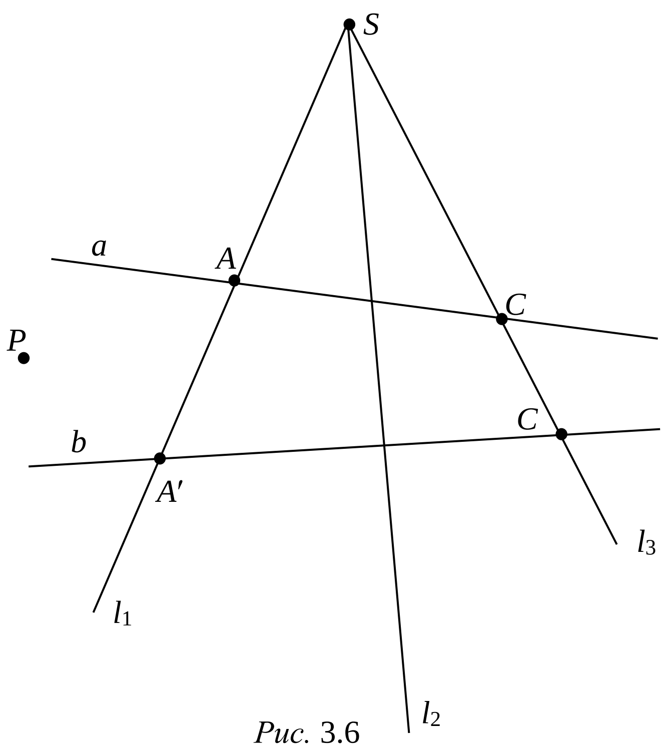


Рис. 3.6

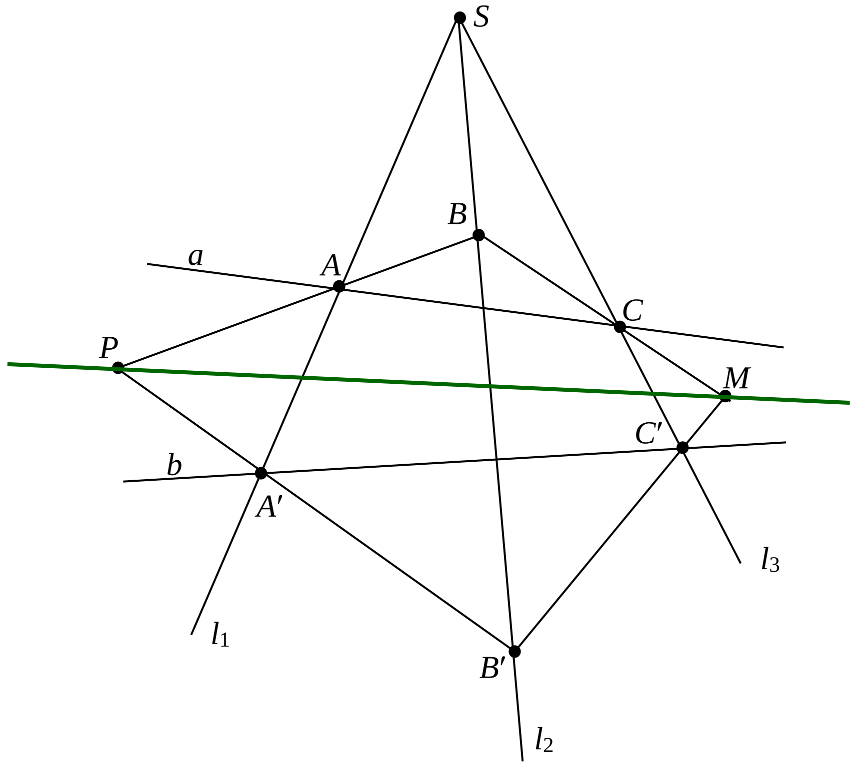


Рис. 3.7

***Упражнение* 2.** Решите ту же задачу при следующем расположении точки и прямых (рисунок 3.8). Запишите построение.

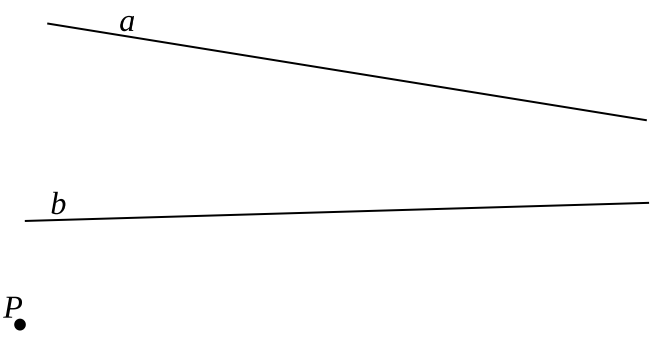


Рис. 3.8

***Определение* 3.10.** *Шестивершинником* называется фигура, которую образуют упорядоченная шестёрка точек $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ и шесть прямых $M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5, M_5M_6, M_6M_1$. Точки называются *вершинами*, а прямые – *сторонами шестивершинника*. Стороны M_1M_2 и M_4M_5, M_2M_3 и M_5M_6, M_3M_4 и M_6M_1 называются противоположными.

***Определение* 3.11.** *Овальными кривыми второго порядка* (*овальными квадриками*) называются эллипс, гипербола и парабола. Шестивершинник называется *вписанным в овальную квадрику*, если все его вершины лежат на этой кривой.

В дальнейшем будем строить чертёж для эллипса, но надо помнить, что построения верны также для гиперболы и параболы.

Теорема Паскаля. *Три точки пересечения противоположных сторон любого шестивершинника, вписанного в овальную квадрику, лежат на одной прямой (рисунок 3.9).*

Обратная теорема Паскаля. *Если три точки пересечения противоположных сторон шестивершинника (у которого никакие три вершины не лежат на одной прямой) лежат на одной прямой, то данный шестивершинник вписан в овальную квадрику.*

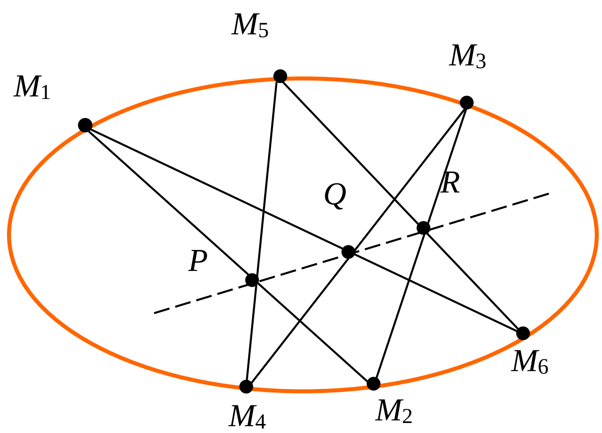


Рис. 3.9

Следствие. *Овальная квадрика определяется пятью своими точками.*

Действительно, если задать произвольно 5 точек (рисунок 3.10), никакие три из которых не лежат на одной прямой, то можно построить бесконечное число точек квадрики.

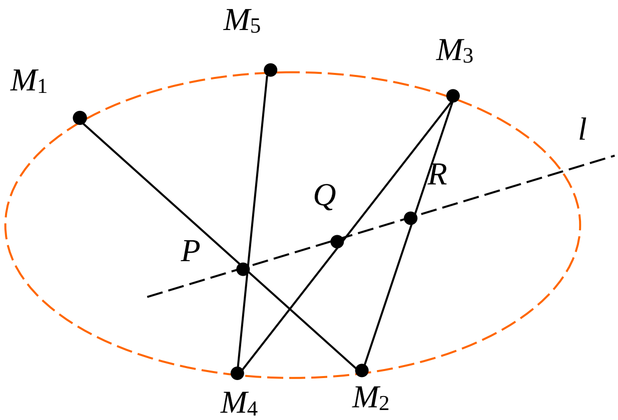


Рис. 3.10

Для этого мы проведём все стороны шестивершинника, кроме M_5M_6 и M_6M_1, поскольку точки M_6 у нас ещё нет. Заметим, что и самого эллипса у нас в этом построении нет. Обозначим $P = M_1M_2 \cap M_4M_5$. Через эту точку проведём произвольную прямую l, которая пересечёт стороны M_3M_4 и M_2M_3 в точках Q и R. Тогда $M_6 = M_1Q \cap M_5R$.

Если провести через P другую прямую, то мы найдём ещё одну точку M_7. Таким образом, можем найти любое число точек овальной кривой.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, И.И. Сборник геометрических задач на построение / И.И. Александров. – М.: Учпедгиз, 1950. – 175 с.

2. Атанасян, Л.С. Геометрия: в 2 ч. / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – М.: Просвещение, 1986. – Ч. I. – 336 с.: ил.

3. Атанасян, Л.С. Сборник задач по геометрии: в 2 ч. / Л.С. Атанасян, В.А. Атанасян. – М.: Просвещение, 1973. – Ч. 1. – 256 с.

4. Милованов, М.В. Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч. / М.В. Милованов, Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. – М.: Амалфея, 2001. – Ч. 2. – 352 с.

5. Подоксёнов, М.Н. Аналитическая геометрия и преобразования плоскости / М.Н. Подоксёнов. – Витебск: Витеб. гос. ун-т, 2016. – 286 с.

Учебное издание

ГРИБ Николай Васильевич

ПОДОКСЁНОВ Михаил Николаевич

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ ФИГУР И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

Учебное пособие

Технический редактор	*Г.В. Разбоева*
Корректор	*А.Н. Фенченко*
Компьютерный дизайн	*Л.В. Рудницкая*

Подписано в печать 01.10.2024. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 6.45. Уч.-изд. л. 6.03. Тираж 55 экз. Заказ 128.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.