

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ"

УДК 512.542

ЕФРЕМОВА Марина Ивановна

ПОДГРУППОВЫЕ ФУНКТОРЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ КЛАССОВ n -АРНЫХ ГРУПП

01.01.06 - математическая логика, алгебра
и теория чисел

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Гомель – 2002

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

(Минск : Навука і тэхніка, 1992), "Некоторые приложения теории n -арных групп" (Минск: Беларуская навука, 1998) и А.М. Гальмак "Конгруэнции полиадических групп" (Минск : Беларуская навука, 1999), в которых отражено современное состояние теории n -арных групп и представлен большой идейный и технический материал, делающий возможным проведение такого анализа. Таким образом, вполне актуальной в настоящее время является проблема построения теории классов n -арных групп. И такая задача частично реализуется в данной диссертации, где предложен ряд общих методов построения и исследования решеток τ -классов Шунка n -арных групп в \mathfrak{X} , где \mathfrak{X} — произвольный класс n -арных групп.

Связь работы с крупными научными программами, темами.

Диссертация выполнена в рамках следующих госбюджетных тем:

"Структурная теория формаций и других классов алгебр" Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. Тема входила в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утверждённый решением Президиума НАН Беларуси № 88 от 23 ноября 1995 г. (номер госрегистрации в БелИСА — 19963987), тема выполнялась в 1996–2000 гг.

"Структурная теория классов групп и других алгебр" Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. Тема входит в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утвержденный решением Президиума НАН Беларуси № 94 от 5 июля 2001 г. — Государственная программа фундаментальных исследований "Математические структуры" (номер госрегистрации в БелИСА — 20011225), выполнение темы запланировано на 2001–2005 гг.

Цель и задачи исследования. Целью данной диссертации является разработка общих методов построения и исследования решеток τ -классов Шунка n -арных групп. Для достижения этой цели в диссертации:

- разработана теория подгрупповых функторов Скибы в классе n -арных групп;
- предложены новые методы построения τ -классов Шунка n -арных групп в \mathfrak{X} , где \mathfrak{X} — произвольный класс n -арных групп;
- доказана дистрибутивность решетки τ -классов Шунка n -арных групп в \mathfrak{X} ;
- в классе конечных n -арных групп дано описание метода построения алгебраических решеток;
- дано описание нижней грани для множества всех коатомов решетки τ -подклассов Шунка произвольного τ -класса Шунка n -арных групп в \mathfrak{X} .

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются τ -классы Шунка n -арных групп, а предметом исследования — свойства решетки таких классов.

Методология и методы проведенного исследования. В основу положен аксиоматический метод построения теории классов n -арных групп. Использовались методы исследования, основанные на общей теории n -арных групп, а также методы теории решеток.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Все полученные результаты являются новыми и могут использоваться в теоретических исследованиях. Впервые построена теория подгрупповых \mathcal{X} -функторов в классе n -арных групп и предложены общие методы построения и исследования решеток τ -классов Шунка n -арных групп в \mathcal{X} .

Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при изучении классов n -арных групп. Отдельные результаты могут быть использованы в учебном процессе при чтении спецкурсов на математических специальностях высших учебных заведений.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

3.3.6. Теорема. Пусть τ_1 и τ — такие подгрупповые \mathcal{X} -функторы, что $\tau_1 \leq \tau$. Тогда класс $\mathfrak{F} = \{G \mid G \in \mathcal{X} \text{ и } \tau(G) = \tau_1(G)\}$ является τ -классом Шунки в \mathcal{X} . Кроме того, в случае, когда τ — подгрупповой n -функтор в \mathcal{X} , то для любой группы $G \in \mathcal{X}$ максимальные n -арные подгруппы из $\tau(G) \setminus \tau_1(G)$ являются \mathfrak{F} -абнормальными в G .

3.4.7. Теорема. Для каждого гомоморфа конечных n -арных групп \mathcal{X} и для каждого подгруппового \mathcal{X} -функтора решетка $L_\tau^n(\mathcal{X})$ является алгебраической.

3.4.9. Теорема. Пусть \mathcal{X} — гомоморф n -арных групп и τ — подгрупповой \mathcal{X} -функтор. Если каждая n -арная группа в \mathcal{X} имеет главный ряд конгруэнций, то решетка $L_\tau^n(\mathcal{X})$ является дистрибутивной.

3.5.3. Теорема. Пусть $\mathfrak{F} \neq (1)$ — непустой τ -класс Шунки в \mathcal{X} . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\Phi_\tau(\mathfrak{F})$ состоит из всех τ -необразующих в \mathfrak{F} n -арных групп;
- 2) если \mathfrak{M} — τ -класс Шунки в \mathcal{X} и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \subseteq \Phi_\tau(\mathfrak{F})$.

Личный вклад соискателя. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В опубликованных совместно с научным руководителем работах идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализация соискателю.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины; на Международ-

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

ной научной конференции, посвящённой 80-летию профессора Вольфганга Гашиюца "Гашиюцова теория классов групп и других алгебраических систем" (Гомель, 16-21 октября 2000г.); на третьей Международной алгебраической конференции в Украине (Сумы, 2-8 июля 2001 г.); на V республиканской научной конференции студентов и аспирантов: "Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях" (Гомель, 18-20 марта 2002 г.); на Международной математической конференции, посвящённой столетию начала работы Д.А.Граве в Киевском университете (Киев, 17-22 июня 2002 г.).

Опубликованность результатов. Основные результаты опубликованы в 4 статьях, в 3 препринтах и в 5 тезисах. Общее количество страниц опубликованных материалов — 78 с.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, трех глав основной части, заключения и списка использованных источников в алфавитном порядке в количестве 103 наименований. Объем диссертации — 87 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Ниже охарактеризовано содержание диссертации по главам.

Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, трех глав основной части, заключения и списка цитированной литературы. В главе 1 приводится обзор полученных результатов.

Глава 2 посвящена известным результатам, используемым в основном тексте диссертации.

Глава 3 "τ-Классы Шюпка n -арных групп" охватывает основное содержание диссертации и включает в себя шесть разделов. Перейдем к изложению основного материала работы.

Все обозначения и используемые определения стандартны и соответствуют принятым в [2, 3, 6, 7].

В теории n -арных групп рассматривают [3] различные аналоги инвариантных подгрупп. Однако, поскольку возникающие при этом факторгруппы исчерпывают все гомоморфные образы n -арной группы, то при изучении n -арных групп целесообразно привлекать методы универсальной алгебры. В разделе 3.1 рассмотрены некоторые свойства подалгебр универсальных алгебр и их связь с конгруэнциями. Результаты этого раздела носят вспомогательный характер и они существенно используются при доказательствах основных утверждений в разделах 3.2 — 3.6. Часть полученных в этом раз-

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

деле результатов носит и самостоятельный интерес. В частности следующая лемма является аналогом теоремы о соответствии в группах.

3.1.1. ЛЕММА [12]. Пусть π — конгруэнция на универсальной алгебре A . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если \bar{H} — подалгебра в A/π , то $H = \bigcup_{[a]_{\pi} \in \bar{H}} [a]_{\pi}$ — такая подалгебра в A , что $\pi H = H$ и $\bar{H} = H/\pi$;

2) если H — такая подалгебра в A , что $\pi H = H$, то H/π — подалгебра в A/π .

Символом H_A мы обозначаем, следуя [7], конгруэнцию алгебры A , порожденную всеми конгруэнциями π на A такими, что $\pi H = H$.

Для универсальных алгебр справедлива

3.1.12. ТЕОРЕМА [12]. Пусть π — конгруэнция на универсальной алгебре A , H — такая подалгебра в A , что $\pi H = H$. Тогда

$$(H/\pi)_{(A/\pi)} = H_A/\pi.$$

Пусть \mathfrak{X} — некоторый непустой класс универсальных алгебр. И пусть со всякой алгеброй $M \in \mathfrak{X}$ сопоставлена некоторая система ее подалгебр $\tau(M)$. Мы говорим, следуя [6], что τ — подсистемный \mathfrak{X} -функтор, если:

1) $M \in \tau(M)$ для всех $M \in \mathfrak{X}$;

2) для любых подалгебр $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ ($A, B \in \mathfrak{X}$) и для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Следуя А.Н.Скибе [6] подсистемный \mathfrak{X} -функтор τ назовем:

1) замкнутым, если для любых двух алгебр $A \in \mathfrak{X}$ и $H \in \tau(A) \cap \mathfrak{X}$ имеет место $\tau(H) \subseteq \tau(A)$;

2) тривиальным, если $\tau(A) = \{A\}$ для всех $A \in \mathfrak{X}$;

3) единичным, если $\tau(A)$ — множество всех подалгебр из A для всех $A \in \mathfrak{X}$.

Тривиальный подсистемный \mathfrak{X} -функтор обозначим через $0_{\mathfrak{X}}$, а единичный через $1_{\mathfrak{X}}$.

Для любой совокупности подсистемных \mathfrak{X} -функторов $\{\tau_i | i \in I\}$ определим их пересечение $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$:

$$\tau(A) = \bigcap_{i \in I} \tau_i(A),$$

для любой алгебры $A \in \mathfrak{X}$.

На множестве всех подсистемных \mathfrak{X} -функторов введем бинарное отношение \leq , полагая, что $\tau_1 \leq \tau_2$ имеет место тогда и только тогда, когда для любой алгебры $A \in \mathfrak{X}$ справедливо $\tau_1(A) \subseteq \tau_2(A)$.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Символом $\Phi_\tau(\mathfrak{H})$ мы обозначаем нижнюю грань для множества всех коатомов решетки всех τ -подклассов Шунка произвольного τ -класса Шунка n -арных групп \mathfrak{H} в \mathfrak{X} ($\Phi_\tau(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$, если в \mathfrak{H} нет ни одного коатома).

Если $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — совокупность некоторых τ -классов Шунка в \mathfrak{X} , то пересечение любого семейства τ -классов Шунка в $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{H}_i$ также является τ -классом Шунка в \mathfrak{X} . В частности, если \mathfrak{F} — множество n -арных групп из \mathfrak{X} и $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — множество всех τ -классов Шунка \mathfrak{H}_i в \mathfrak{X} таких, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}_i$, то пересечение всех τ -классов Шунка в \mathfrak{X} \mathfrak{H}_i , содержащих совокупность n -арных групп \mathfrak{F} , является τ -классом Шунка в \mathfrak{X} . Такой класс мы обозначаем через $\text{Schunck}_\tau(\mathfrak{F})$ и называем τ -классом Шунка, порожденным \mathfrak{F} . В частности, мы пишем $\text{Schunck}_\tau(G)$ для обозначения τ -класса Шунка в \mathfrak{X} , порожденного n -арной группой $G \in \mathfrak{X}$. Классы вида $\text{Schunck}_\tau(G)$ мы называем однопорожденными τ -классами Шунка в \mathfrak{X} .

Пусть \mathfrak{H} — τ -класс Шунка в \mathfrak{X} и $G \in \mathfrak{H}$. Следуя [5], мы называем G τ -необразующей n -арной группой в \mathfrak{H} , если всегда из того, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ следует, что $\text{Schunck}_\tau(\mathfrak{M} \cup \{G\}) \neq \mathfrak{H}$.

Используя теорему 3.4.9, можно доказать следующий интересный результат.

3.5.3. ТЕОРЕМА [9]. Пусть $\mathfrak{F} \neq (1)$ — непустой τ -класс Шунка в \mathfrak{X} . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\Phi_\tau(\mathfrak{F})$ состоит из всех τ -необразующих в \mathfrak{F} n -арных групп;
- 2) если \mathfrak{M} — τ -класс Шунка в \mathfrak{X} и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \subseteq \Phi_\tau(\mathfrak{F})$.

При переходе от бинарных групп к n -арным понятие инвариантной подгруппы допускает различные обобщения (см. монографию С.А.Русакова [3]). Но все они отталкиваются от понятия инвариантной подгруппы как подгруппы, выдерживающей сопряжение своих элементов. Новый подход к определению инвариантной подгруппы разрабатывается в разделе 3.6.

Подгруппу H n -арной группы G назовем идеальной в G , если $H = [h]_{H_G}$ для любого $h \in H$.

Для идеальных подгрупп справедлива следующая теорема.

3.6.5. ТЕОРЕМА [14]. Пусть \mathfrak{X} — некоторый гомоморф конечных n -арных групп и \mathfrak{F} — класс всех таких n -арных групп, принадлежащих \mathfrak{X} , у которых все τ -подгруппы идеальны, тогда \mathfrak{F} — τ -класс Шунка в \mathfrak{X} .

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Аль-Дабабсех А. Ф. Модулярные решетки классов конечных n -арных групп: Автореф. дис. к-та физ.-мат. наук: 01.01.06 / Бел. госуниверситет транспорта. — Гомель, 2000. — 18 с.
2. Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.
3. Русаков С.А. Алгебраические n -арные системы: Силовская теория n -арных групп. — Минск: Навука і тэхніка, 1992. — 264 с.
4. Селькин М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. — Минск.: Беларуская навука, 1997. — 144 с.
5. Селькин М.В., Скиба А.Н. О решетках τ -классов Шунка // Доклады НАН Беларуси. — 2001. — том 45, №3. — С.51-53.
6. Скиба А.Н. Алгебра формаций. — Минск.: Беларуская навука, 1997. — 240 с.
7. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. — М.: Наука, 1989. — 254 с.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

8. Ефремова М.И. О дистрибутивности решетки τ -классов Шунка конечных n -арных групп // Известия Гомельского госуниверситета. — 3(6). Вопросы алгебры. Выпуск 17, 2001. — С. 185–188.
9. Ефремова М.И. О максимальных τ -подклассах Шунка n -арных групп // Известия Гомельского госуниверситета. — 5(14). Вопросы алгебры. Выпуск 18, 2002. — С. 97–99.
10. Ефремова М.И., Скиба А.Н. Об одном методе построения τ -классов Шунка n -арных групп // Известия Гомельского госуниверситета. — 5(14). Вопросы алгебры. Выпуск 18, 2002. — С. 91–96.
11. Ефремова М.И. О пересечении максимальных τ -подклассов Шунка n -арных групп // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. — Витебск: ВГУ, 2002. — № 2(24). — С. 62–64.
12. Ефремова М.И., Скиба А.Н. О подалгебрах универсальных алгебр // Гомель, 2002. — № 20 — 12 с. — (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины).

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

13. Ефремова М.И. Подсистемные и подгрупповые \mathfrak{X} -функторы // Гомель, 2002. — № 21 — 17 с. — (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины).
14. Ефремова М.И., Скиба А.Н. Решетки τ -классов Шунка n -арных групп // Гомель, 2002. — № 24 — 23 с. — (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины).
15. Ефремова М.И., Скиба А.Н. О τ -классах Шунка n -арных групп // Гапшюца теория классов групп и других алгебраических систем: Тезисы докладов Международной научной конференции, посвящённой 80-летию профессора Вольфганга Гапшюца, Гомель, 16–21 октября 2000г. / Гомель: ГГУ, 2000.— С. 22–24.
16. Ефремова М.И., Скиба А.Н. О τ -классах Шунка n -арных групп // Тезисы докладов Международной алгебраической конференции в Украине, Сумы, 2–8 июля 2001 г./ Сумы: 2001. — С. 174.
17. Ефремова М.И. Некоторые свойства подалгебр универсальных алгебр // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: тезисы докладов IV республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 18–20 марта 2002г. / Гомель: ГГУ, 2002. — С. 192–193.
18. Ефремова М.И. О пересечении максимальных τ -подклассов Шунка n -арных групп // Тезисы докладов Международной математической конференции, посвященной столетию начала работы Д.А.Граве в Киевском университете, Киев, 17–22 июня 2002 г./ Киев: 2002. — С. 86–87.
19. Ефремова М.И., Скиба А.Н. О τ -классах Шунка n -арных групп // Тезисы докладов Международной математической конференции, посвященной столетию начала работы Д.А.Граве в Киевском университете, Киев, 17–22 июня 2002 г./ Киев: 2002. — С. 87–88.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации получены следующие результаты:

- разработана теория подгрупповых функторов Скибы в классе n -арных групп [13];
- предложены новые методы построения τ -классов Шунка n -арных групп в \mathfrak{X} , где \mathfrak{X} — произвольный класс n -арных групп [10, 14];
- доказана дистрибутивность решетки τ -классов Шунка n -арных групп в \mathfrak{X} [8, 14];
- в классе конечных n -арных групп дано описание метода построения алгебраических решеток [14];
- дано описание нижней грани для множества всех коатомов решетки τ -подклассов Шунка произвольного τ -класса Шунка n -арных групп в \mathfrak{X} [9, 14].

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Р Э З Ю М Э

Яфрэмава Марыяна Іванаўна

Падгрупавыя функтары і алгебраічныя краты класаў n -арных груп

Ключавыя словы: n -арная група, класы канечных n -арных груп, краты τ -класаў Шунка ў \mathcal{X} , падгрупавы \mathcal{X} -функтар τ , дыстрыбутыўныя краты, алгебраічныя краты, ніжняя грань, коатам.

У дысертацыі з даламогай метадаў тэорыі класаў і метадаў агульнай тэорыі кратаў пабудавана тэорыя падгрупавых \mathcal{X} -функтараў Скібы для класа n -арных груп; даказана дыстрыбутыўнасць кратаў τ -класаў Шунка n -арных груп ў \mathcal{X} , дзе \mathcal{X} — адвольны клас n -арных груп; ў класе канечных n -арных груп дадзена апісанне метада пабудовы алгебраічных кратаў. Акрамя таго, дадзена апісанне ніжняй грані для мноства ўсіх коатамаў кратаў τ -надкласаў Шунка адвольнага τ -класа Шунка n -арных груп ў \mathcal{X} і прананаваны новыя метады пабудовы τ -класаў Шунка n -арных груп ў \mathcal{X} .

Усе асноўныя вынікі працы з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны пры вывучэнні n -арных груп, а таксама пры выкладанні спецкурсаў у ўніверсітэтах і педінстытутах.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Р Е З Ю М Е

Ефремова Марина Ивановна

Подгрупповые функторы и алгебраические решетки классов n -арных групп

Ключевые слова: n -арная группа, классы конечных n -арных групп, решетка τ -классов Шунка в \mathfrak{X} , подгрупповой \mathfrak{X} -функтор τ , дистрибутивная решетка, алгебраическая решетка, нижняя грань, коатом.

В диссертации с помощью методов теории классов и методов общей теории решеток построена теория подгрупповых \mathfrak{X} -функторов Скибы для класса n -арных групп; доказана дистрибутивность решетки τ -классов Шунка n -арных групп в \mathfrak{X} , где \mathfrak{X} — произвольный класс n -арных групп; в классе конечных n -арных групп дано описание метода построения алгебраических решеток. Кроме того, описана нижняя грань для множества всех коатомов решетки τ -подклассов Шунка произвольного τ -класса Шунка n -арных групп в \mathfrak{X} и предложены новые методы построения τ -классов Шунка n -арных групп в \mathfrak{X} .

Все полученные результаты работы являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы при изучении классов n -арных групп, а также при чтении спецкурсов, преподаваемых в университетах и пединститутах.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Summary

Yafremava Maryna Ivanavna

Subgroup functors and algebraic lattices of the classes of n -ary groups

Key words: n -ary group, classes of finite n -ary groups, lattice of τ -Schunck classes in \mathfrak{X} , subgroup \mathfrak{X} -functor τ , distributive lattice, algebraic lattice, infimum, coatom

In the dissertation the theory of Skiba subgroup \mathfrak{X} -functor for classes of n -ary groups were built with the help of classes theory and General Lattice Theory; it is proved that the lattice of all τ -Schunck classes of n -ary groups in \mathfrak{X} is distributive, where \mathfrak{X} — an arbitrary class of n -ary groups; in the class of the finite groups the method of construction of the algebraic lattices is described. Besides, the infimum for the set of all coatoms of the lattice of all τ -Schunck subclasses of an arbitrary τ -Schunck class of the n -ary groups in \mathfrak{X} is described, a new method of the construction of the τ -Schunck classes of n -ary groups is given.

All the main results of this thesis are new. They are of a theoretic character and may be used while studying n -ary groups and while teaching special courses in universities and pedagogical institutes.

