УДК 518.5

Экстремальные полиномы на системе отрезков

Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко

Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Получены явные формулы полиномов четной степени, определенных на системе отрезков, со специальным свойством P(0) = 1, и обладающих минимальной чебышевской нормой. В некоторых частных случаях найдены формулы для вычисления норм таких полиномов. Эти полиномы применяются для построения итерационных процессов решения линейных уравнений в банаховых пространствах с линейным ограниченным оператором, спектр которого сосредоточен на некоторых системах отрезков. Соответствующий итерационный процесс является оптимальным по отношению к классу линейных ограниченных операторов, спектры которых расположены в системе рассмотренных в данной статье отрезков. Оптимальность понимается в том смысле, что если правая часть рекуррентных формул итерационного процесса содержит операторный полином четной степени, то по отношению к классу операторов уменьшить спектральный радиус этого полинома невозможно.

Ключевые слова: *чебышевская норма, экстремальный полином, спектральный радиус.*

Extreme polynomes on the system of segments

Y.V. Trubnikov, O.V. Pyshnenko

Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

Explicit formulas of polynomes of even degree have been obtained which are defined on the system of segments with a special feature P(0) = 1 and have minimal Tchebyshev norm. In some individual cases formulas for calculating norms of such polynomes have been found. These polynomes are used for constructing iterational processes for solving linear equations in Banakhov spaces with linear restricted operator, the spectrum of which is concentrated on some systems of segments. The corresponding iterational process is optimal for the class of linear restricted operators, the spectra of which are located in the system of the segments considered in this article. Optimal here is understood in the following way: if the right part of recurrent formula of the iterational process contains an operational polynome of even degree, it is impossible to reduce the spectral radius of this polynome relating to the class of operators.

Key words: *Tchebyshev norm, extreme polynome, spectral radius.*

Задача построения полиномов наилучшего приближения для функции, определенной на системе отрезков, является весьма актуальной, т.к. коэффициенты таких полиномов используются в качестве итерационных параметров для приближенного решения операторных уравнений $Az=b$ в банаховом пространстве с линейным ограниченным оператором, спектр которого расположен на системе отрезков.

Цель и постановка задачи. Целью данного исследования является нахождение явных формул полиномов наилучшего приближения (экстремальных полиномов) в чебышевской метрике для единичной функции, заданной на системе отрезков действительной прямой или комплексной плоскости. Для этого необходимо решить следующие задачи:

- провести анализ расположения корней экстремальных полиномов с условием $P(0)=1$, определенных на одном отрезке действительной прямой;
- выяснить роль альтернанса в том случае, когда функция задана на системе отрезков.

Напомним, что полиномы Чебышева

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t) \qquad n = 0,\ 1,\ 2,...$$

обладают следующими основными свойствами: полином Чебышева $T_n\ \ t$ имеет степень n, все его корни вещественны, расположены на отрезке $-1,\ 1$, причем

$$\max_{-1\le t\le 1}\left|T_n\ \ t\ \right| = 1, \quad \min_{-1\le t\le 1}\left|T_n\ \ t\ \right| = -1.$$

Отметим, что точки, в которых достигаются их максимальные значения, имеют вид

$$t_k=\cos\frac{2\pi k}{n}\ \left(k=0,1,...,\ \frac{n}{2}\right),$$ если n – четное,

$$t_k=\cos\frac{2\pi k}{n}\ \left(k=0,1,...,\ \frac{n-1}{2}\right),$$ если n – нечетное; точки, в которых достигаются их минимальные значения, выражаются равенствами

$$t_k=\cos\frac{\pi\ \ 2k-1}{n}\ \left(k=1,2,...,\ \frac{n}{2}\right),$$ если n – четное,

$$t_k=\cos\frac{\pi\ \ 2k-1}{n}\ \left(k=1,2,...,\ \frac{n+1}{2}\right),$$ если n – нечетное.

Нули полинома $T_n\ \ t$ равны

$$t_k = \cos\frac{\pi(2k-1)}{2n} \quad (k=1,2,...,n). \qquad (1)$$

Нас будут интересовать полиномы $P_n(x)$ степени n, обладающие свойством $P_n(0)=1$ и имеющие на отрезке $[m, M]$ $(0<m<M)$ минимальную чебышевскую норму.

Лемма 1 ([1], с. 98). *Из всех таких полиномов* $R_n(\lambda)$ *степени* n*, что* $R_n(0)=1$*, полином*

$$R_n(\lambda) = \frac{T_n\left(\frac{2\lambda-m-M}{M-m}\right)}{T_n\left(-\frac{M+m}{M-m}\right)} \qquad (2)$$

имеет на отрезке $[m, M]$ $(0<m<M)$ *минимальную чебышевскую норму.*

Рассмотрим некоторые свойства полиномов (1). Подстановка

$$\lambda = \frac{M+m}{2} + \frac{M-m}{2}\cdot t \qquad (3)$$

преобразует отрезок $[-1, 1]$ в отрезок $[m, M]$, при этом

$$t = \frac{2\lambda-M-m}{M-m}.$$

Из равенства (2) следует, что

$$\max_{m\le\lambda\le M}|R_n(\lambda)| = \frac{1}{\left|T_n\left(-\frac{M+m}{M-m}\right)\right|}.$$

Если n – четное, то

$$T_n\left(-\frac{M+m}{M-m}\right) > 1.$$

Если n – нечетное, то

$$T_n\left(-\frac{M+m}{M-m}\right) < -1.$$

Напомним ([2], с. 13), что всякая точка x_0, для которой выполняется равенство

$$|r_n(x_0)| = \|r_n\|,$$

называется *e*-точкой функции

$$r_n(x) = f(x) - P_n^*(x).$$

Из (1) и (3) следует, что корнями полинома $R_n(\lambda)$ являются числа

$$\lambda_k = \frac{M+m}{2} + \frac{M-m}{2}\cdot\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \qquad (4)$$

$$k = 1, 2, \ldots, n$$

Таким образом, полином $R_n(\lambda)$ можно представить в виде

$$R_n(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}\left[1-\frac{\lambda}{\frac{M+m}{2}+\frac{M-m}{2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right], \qquad (5)$$

Причем *e*-точками полинома $R_n(\lambda)$ являются следующие значения:

1) если n – четное, то

$$\lambda_k = \frac{M+m}{2} + \frac{M-m}{2}\cos\frac{2\pi k}{n} \quad \left(k=0,1,...,\frac{n}{2}\right) -$$

точки максимумов;

$$\lambda_k = \frac{M+m}{2} + \frac{M-m}{2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} \quad \left(k=1,2,...,\frac{n}{2}\right) -$$

точки минимумов;

2) если n – нечетное, то

$$\lambda_k = \frac{M+m}{2} + \frac{M-m}{2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}$$

$\left(k=1,2,...,\frac{n+1}{2}\right)$ – точки максимумов;

$$\lambda_k = \frac{M+m}{2} + \frac{M-m}{2}\cos\frac{2\pi k}{n}$$

$\left(k=0,1,...,\frac{n-1}{2}\right)$ – точки минимумов.

Из равенства (5) видно, что при любом n $R_n(m) > 0$.

Если представить $R_n(\lambda)$ в виде

$$R_n(\lambda) = 1 - P_n^*(\lambda),$$

то из приведенных рассуждений ясно, что для функции $f(\lambda)\equiv 1$ на отрезке $[m, M]$ $(0<m<M)$ выполнены все условия теоремы об альтернансе ([2], с. 26). Действительно, система функций $\varphi_j(x) = x^j$ $(j=1,2,...,n)$ является на $[m, M]$ чебышевской, т.к. любой полином вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x^j$$

имеет на $[m, M]$ не более $n-1$ корней (один корень у такого полинома $x=0$). Кроме того, существует система из n+1-ой точки (альтернанс), в каждой из которых разность $R_n(\lambda) = 1 - P_n^*(\lambda)$ поочередно принимает значения разных знаков и достигает наибольшего по модулю значения на $[m, M]$. Отсюда, в частности, следует для функции $f(\lambda)\equiv 1$ экстремальность полинома $P_n^*(\lambda)$ на отрезке $[m, M]$.

Далее рассмотрим отрезок $\left[m^2,\ M^2\right]$. В этом случае

$$R_n(\lambda)=\prod_{k=1}^{n}\left[1-\frac{\lambda}{\frac{M^2+m^2}{2}+\frac{M^2-m^2}{2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right]. \qquad (6)$$

Теорема 1. *Полиномом с минимальной чебышевской нормой на множестве* $H=[-M,-m]\bigcup[m,\ M]$ *среди всех полиномов степени* $2n$, *таких, что* $R_{2n}(0)=1$, *является полином*

$$R_{2n}^*(x)=\prod_{k=1}^{n}\left[1-\frac{x^2}{\frac{M^2+m^2}{2}+\frac{M^2-m^2}{2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right]=$$

$$=1-P_{2n}^*(x). \qquad (7)$$

Доказательство. Заметим, что такой полином на множестве H имеет $2n+1$ интервал сохранения знака, т.е. $2n$ корней

$$\lambda_k=\pm\sqrt{\frac{M^2+m^2}{2}+\frac{M^2-m^2}{2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\quad (k=1,2,...,n).$$

Предположим от противного, что некоторый полином $Q_{2n}(x)$ приближает функцию $f(x)\equiv 1$ лучше, чем $P_{2n}^*(x)$, т.е. что

$$\left\|1-Q_{2n}\right\|<\left\|1-P_{2n}^*\right\|.$$

Из последнего неравенства следует, что разность

$$Q_{2n}(x_j)-P_{2n}^*(x_j)=\left[1-P_{2n}^*(x_j)\right]-\left[1-Q_{2n}(x_j)\right] \qquad (8)$$

имеет такой же знак, как и $1-P_{2n}^*(x_j)$ во всех *e*-точках полинома $R_{2n}^*(x)$. Таких точек $2n+2$, но так как

$$R_{2n}^*(-m)=R_{2n}^*(m)>0,$$

то точки $-m$ и m для наших рассуждений можно отождествить, т.е. *e*-точек x_j, в которых выполняются равенства (8), имеется на множестве H $(2n+1)$.

Таким образом, разность $Q_{2n}(x_j)-P_{2n}^*(x_j)$ на множестве H меняет знак $2n$ раз. Отсюда следует, что полином $Q_{2n}(x)-P_{2n}^*(x)$ имеет на H $(2n)$ корней, но полином $Q_{2n}(x)-P_{2n}^*(x)$ имеет вид

$$Q_{2n}(x)-P_{2n}^*(x)=\sum_{k=1}^{2n}c_kx^k=x\sum_{k=1}^{2n}c_kx^{k-1},$$

т.е. на множестве H не может иметь $2n$ корней.

Получим удобные формулы для $R_{2n}^*(x)$ в некоторых частных случаях. При $n=2$ получаем

$$R_4^*(x)=\prod_{k=1}^{2}\left[1-\frac{x^2}{\frac{M^2+m^2}{2}+\frac{M^2-m^2}{2}\cdot\cos\frac{(2k-1)\pi}{4}}\right]=$$

$$=\left[1-\frac{x^2}{\frac{M^2+m^2}{2}+\frac{(M^2-m^2)\sqrt{2}}{4}}\right]\times$$

$$\times\left[1-\frac{x^2}{\frac{M^2+m^2}{2}-\frac{(M^2-m^2)\sqrt{2}}{4}}\right],$$

при этом

$$\left\|R_4^*\right\|=\frac{(1-t^2)^2}{\left[1+(3-2\sqrt{2})t^2\right]\cdot\left[1+(3+2\sqrt{2})t^2\right]}=\frac{(1-t^2)^2}{1+6t^2+t^4},$$

где $t=\dfrac{m}{M}$.

При $n=3$

$$R_6^*(x)=\prod_{k=1}^{3}\left[1-\frac{x^2}{\frac{M^2+m^2}{2}+\frac{M^2-m^2}{2}\cdot\cos\frac{(2k-1)\pi}{6}}\right]=$$

$$=\left[1-\frac{x^2}{\frac{M^2+m^2}{2}+\frac{(M^2-m^2)\sqrt{3}}{4}}\right]\times$$

$$\times\left(1-\frac{2x^2}{M^2+m^2}\right)\cdot\left[1-\frac{x^2}{\frac{M^2+m^2}{2}-\frac{(M^2-m^2)\sqrt{3}}{4}}\right],$$

при этом

$$\left\|R_6^*\right\|=\frac{(1-t^2)^3}{(1+t^2)\left[1+(7+4\sqrt{3})t^2\right]\left[1+(7-4\sqrt{3})t^2\right]}=$$

$$=\frac{(1-t^2)^3}{(1+t^2)(1+14t^2+t^4)},\text{где } t=\frac{m}{M}.$$

Приведем таблицу значений норм $\left\|R_4^*\right\|$ и $\left\|R_6^*\right\|$ в зависимости от значений $t=\dfrac{m}{M}$:

t	$\|R_4^*\|$	$\|R_6^*\|$
0,1	0,924535	0,842637
0,2	0,742269	0,544767
0,3	0,534915	0,304815
0,4	0,355359	0,156465
0,5	0,219512	0,073973
0,6	0,124513	0,031242
0,7	0,062224	0,010991
0,8	0,024688	0,002744
0,9	0,005540	0,000292
1,0	0	0

Далее рассмотрим систему отрезков

$$H=[m,M]\bigcup[im,iM]\bigcup[-M,-m]\bigcup[-im,iM],$$

где $i^2=-1$.

Теорема 2. *Полиномом с минимальной чебышевской нормой на множестве H среди всех полиномов степени $4n$, таких, что $R_{4n}(0)=1$, является полином*

$$R_{4n}^*(x)=\prod_{k=1}^{n}\left[1-\frac{x^4}{\frac{M^4+m^4}{2}+\frac{M^4-m^4}{2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right]=$$

$$=1-P_{4n}^*(x).$$

Доказательство вытекает из того факта, что $R_{4n}^*(x)$ на каждом из отрезков множества H принимает действительные значения и число его корней на каждом из отрезков равно n.

Получим удобные формулы для $R_{4n}^*(x)$ в некоторых частных случаях. При $n=2$ получаем

$$R_8^*(x)=\prod_{k=1}^{2}\left[1-\frac{x^4}{\frac{M^4+m^4}{2}+\frac{M^4-m^4}{2}\cdot\cos\frac{(2k-1)\pi}{4}}\right]=$$

$$=\left[1-\frac{x^4}{\frac{M^4+m^4}{2}+\frac{(M^4-m^4)\sqrt{2}}{4}}\right]\times$$

$$\times\left[1-\frac{x^4}{\frac{M^4+m^4}{2}-\frac{(M^4-m^4)\sqrt{2}}{4}}\right],$$

при этом

$$\|R_8^*\|=\frac{(1-t^4)^2}{\left[1+(3-2\sqrt{2})t^4\right]\cdot\left[1+(3+2\sqrt{2})t^4\right]},$$

где $t=\dfrac{m}{M}$.

При $n=3$

$$R_{12}^*(x)=\prod_{k=1}^{3}\left[1-\frac{x^4}{\frac{M^4+m^4}{2}+\frac{M^4-m^4}{2}\cdot\cos\frac{(2k-1)\pi}{6}}\right]=$$

$$=\left[1-\frac{x^4}{\frac{M^4+m^4}{2}+\frac{(M^4-m^4)\sqrt{3}}{4}}\right]\times$$

$$\times\left(1-\frac{2x^4}{M^4+m^4}\right)\cdot\left[1-\frac{x^4}{\frac{M^4+m^4}{2}-\frac{(M^4-m^4)\sqrt{3}}{4}}\right],$$

при этом

$$\|R_{12}^*\|=\frac{(1-t^4)^3}{(1+t^4)\left[1-(\sqrt{3}-1)t+(2-\sqrt{3})t^2\right]\left[1+(\sqrt{3}+1)t+(2+\sqrt{3})t^2\right]}\times$$

$$\times\frac{1}{\left[1+(\sqrt{3}-1)t+(2-\sqrt{3})t^2\right]\left[1-(\sqrt{3}+1)t+(2+\sqrt{3})t^2\right]}=$$

$$=\frac{(1-t^4)^3}{(1+14t^4+t^8)(1+t^4)}.$$

Приведем таблицу значений норм $\|R_8^*\|$ и $\|R_{12}^*\|$ в зависимости от значений $t=\dfrac{m}{M}$:

t	$\left\|R_8^*\right\|$	$\left\|R_{12}^*\right\|$
0,1	0, 999200	0,998206
0,2	0, 987322	0, 971841
0,3	0,938208	0,869408
0,4	0,822570	0, 663736
0,5	0, 637394	0,412744
0,6	0, 422201	0, 206188
0,7	0,231140	0,080072
0,8	0,096148	0, 021152
0,9	0, 022036	0,002313
1,0	0	0

Рассмотрим в банаховом пространстве E уравнение

$$Az = b \qquad (9)$$

с линейным ограниченным оператором A, спектр которого $\sigma(A) \subseteq [-M,-m] \cup [m, M]$. Применение полинома R_4^* порождает итерационный процесс

$$z_{n+1} = z_n - \frac{8(M^2+m^2)}{g_4}\cdot A^2 z_n + \frac{8}{g_4}\cdot A^4 z_n + \frac{8(M^2+m^2)}{g_4}\cdot Ab - \frac{8}{g_4}\cdot A^3 b, \qquad (10)$$

где $g_4 = M^4 + 6M^2m^2 + m^4$.

В случае применения полинома R_6^* итерационный процесс будет иметь вид

$$z_{n+1} = z_n - \frac{6(m^2+3M^2)(3m^2+M^2)}{(m^2+M^2)\cdot g_6}\cdot A^2 z_n + \frac{48}{g_6}\cdot A^4 z_n - \frac{32}{m^2+M^2}\cdot A^6 z_n +$$

$$+ \frac{6(m^2+3M^2)(3m^2+M^2)}{(m^2+M^2) g_6}\cdot Ab - \frac{48}{g_6}\cdot A^3 b + $$

$$+ \frac{32}{(m^2+M^2) g_6}\cdot A^5 b, \qquad (11)$$

где $g_6 = M^4 + 14M^2m^2 + m^4$.

Процесс (9) сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \left\|R_4^*\right\| = \frac{(1-t^2)^2}{1+6t^2+t^4},$$

где $t = \frac{m}{M}$.

Процесс (10) также сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \left\|R_6^*\right\| = \frac{(1-t^2)^3}{(1+t^2)(1+14t^2+t^4)}.$$

Сходимость со скоростью геометрической прогрессии понимается в том смысле, что спектральный радиус оператора

$$F_4 = I - \frac{8(M^2+m^2)}{g_4}\cdot A^2 + \frac{8}{g_4}\cdot A^4$$

удовлетворяет неравенству

$$\rho(F_4) \le \left\|R_4^*\right\|,$$

а спектральный радиус оператора

$$F_6 = I - \frac{6(m^2+3M^2)(3m^2+M^2)}{(m^2+M^2)\cdot g_6}\cdot A^2 + \frac{48}{g_6}\cdot A^4 - \frac{32}{m^2+M^2}\cdot A^6$$

неравенству

$$\rho(F_6) \le \left\|R_6^*\right\|.$$

Так как в пространстве E при любом положительном ε можно построить векторную норму

([3], с. 90) $\|z\|_0$, эквивалентную исходной, в которой операторы F_4 и F_6 имеют норму

$$\|F_4\|_0 \le \|R_4^*\| + \varepsilon, \quad \|F_6\|_0 \le \|R_6^*\| + \varepsilon,$$

то оценка скорости сходимости будет иметь стандартный ([1], с. 25) вид

$$\|z_n - z_*\| \le \frac{\left(\|R_4^*\| + \varepsilon\right)^n}{1 - \left(\|R_4^*\| + \varepsilon\right)} \left\| \frac{8\left(M^2 + m^2\right)}{g_4} A^2 z_0 - \right.$$

$$\left. \frac{8}{g_4} A^4 z_0 - \frac{8\left(M^2 + m^2\right)}{g_4} Ab + \frac{8}{g_4} A^3 b \right\|_0$$

в случае процесса (10), а в случае процесса (11)

$$\|z_n - z_*\| \le \frac{\left(\|R_6^*\| + \varepsilon\right)^n}{1 - \left(\|R_6^*\| + \varepsilon\right)} \left\| F_6 z_0 - \right.$$

$$- \frac{6\left(m^2 + 3M^2\right)\left(3m^2 + M^2\right)}{\left(m^2 + M^2\right) g_6} Ab +$$

$$\left. + \frac{48}{g_6} A^3 b - \frac{32}{m^2 + M^2} A^5 b \right\|_0 .$$

Заключение. Таким образом, в статье построены оптимальные итерационные процессы для приближенного решения операторного уравнения $Az = b$ с линейным ограниченным оператором A, спектр которого расположен на системе отрезков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский, М.А. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.].– М.: Наука, 1969. – 456 с.
2. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
3. Красносельский, М.А. Положительные решения операторных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.

Поступила в редакцию 24.02.2011. Принята в печать 26.02.2011
Адрес для корреспонденции: 210026, г. Витебск, ул. Коммунистическая, 12/23, кв. 16,
e-mail: Yurii_Trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.