

О произведениях субнормальных и обобщенно субнормальных подгрупп

Е.А. Рябченко

Учреждение образования «Белорусский государственный университет транспорта»

Пусть F – непустая формация. Подгруппа H группы G называется F -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H$ такая, что $(H_{i-1})^F \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Подгруппа H группы G называется F -достижимой в G , если существует цепь подгрупп $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = H$ такая, что либо H_i нормальна в H_{i-1} , либо $(H_{i-1})^F \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$.

В работе получена характеристика разрешимых нормально наследственных насыщенных формаций F , замкнутых относительно взятия произведений $G = AB$, в случае, когда A – субнормальная F -подгруппа, а B – F -субнормальная (F -достижимая) в G подгруппа, либо силовские подгруппы из B F -субнормальны (F -достижимы) в G .

Ключевые слова: насыщенная формация, нормально наследственная формация, F -субнормальная подгруппа, F -достижимая подгруппа.

On products of subnormal and generally subnormal subgroups

E.A. Rjabchenko

Educational establishment «Belarusian State University of transport»

Let's consider F to be a non-empty formation. The subgroup H of group G is called F subnormal in G , if either $H = G$ or there is a maximal chain of subgroups $G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H$ where $(H_{i-1})^F \subseteq H_i$ for all $i = 1, 2, \dots, n$. The subgroup H of group G is called F -accessible in G , if there is a chain of subgroups $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = H$ in which H_i is normal in H_{i-1} , or $(H_{i-1})^F \subseteq H_i$ for all $i = 1, 2, \dots, m$.

In this paper we characterize solvable normal hereditary saturated formations F , that are closed respectably to the products $G = AB$, in the case when A is a subnormal F -subgroup and B is F -subnormal (F -accessible) subgroup in G or Sylow subgroups from B are F -subnormal (F -accessible) subgroups in G .

Key words: saturated formation, completely normal formation, F -subnormal subgroup, F -accessible subgroup.

Рассматриваются только конечные группы. Обобщением понятия субнормальной подгруппы является предложенное для разрешимой группы Хоуксом [1], для произвольной группы Л.А. Шеметковым [2] понятие F -субнормальной подгруппы, а также введенное Кегелем [3] понятие F -достижимой подгруппы.

Пусть F – непустая формация. Подгруппа H группы G называется F -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H$ такая, что $(H_{i-1})^F \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Подгруппа H группы G называется F -достижимой в G , если существует цепь подгрупп $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = H$ такая, что либо H_i нормальна в H_{i-1} , либо $(H_{i-1})^F \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$.

В 1992 году в работах [4–5] в классе разрешимых групп было положено начало изучению условий принадлежности формации F групп, представимых в виде произведения F -субнормальных (F -достижимых) F -подгрупп. Это направление исследований получило дальнейшее развитие в

работах [6–7], [8, гл. 6]. В работах [9–10] изучались формации F , содержащие группу $G = AB$ с F -субнормальными (F -достижимыми) в G силовскими подгруппами из A и B .

Настоящая работа примыкает к отмеченному выше направлению исследований. Цель работы – изучить разрешимые нормально наследственные насыщенные формации F , замкнутые относительно взятия произведений $G = AB$, в случае, когда A – субнормальная F -подгруппа, а B – F -субнормальная (F -достижимая) в G подгруппа, либо силовские подгруппы из B F -субнормальны (F -достижимы) в G .

1. Необходимые определения и известные результаты.

Используются обозначения и определения из [2], [11]. Напомним некоторые из них.

Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка $|G|$ группы G . Пусть F – некоторая формация. Через $\pi(F)$ обозначается множество всех простых делителей порядков групп из F , $\pi'(F)$ – множество всех простых чисел, отличных от чисел из $\pi(F)$. Через G^F обозна-

чается F -корадикал группы G , т.е. наименьшая нормальная в G подгруппа такая, что $G/G^F \in F$. Минимальная не F -группа – это группа, не принадлежащая F , все собственные подгруппы которой принадлежат F . Через $M(F)$ обозначается множество всех минимальных не F -групп.

Формацией Шеметкова в классе S называется формация F , для которой каждая разрешимая минимальная не F -группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка.

Формация F называется наследственной (нормально наследственной), если F вместе с группой G содержит все подгруппы (соответственно, нормальные подгруппы) из G .

Используются обозначения: S – класс всех разрешимых групп, N – класс всех нильпотентных групп, N_π – класс всех нильпотентных π -групп для некоторого множества простых чисел π , N_p – класс всех p -групп для некоторого простого числа p .

По теореме Гашюца–Любезедер–Шмидта [11] формация насыщена тогда и только тогда, когда она локальна.

Для доказательства основного результата работы нам будут необходимы следующие известные факты.

Лемма 1.1 [2, теорема 3.3]. *Насыщенная формация F имеет единственный максимальный внутренний локальный экран f , причем f удовлетворяет следующему условию: $f(p) = N_p f(p)$ для любого простого числа p .*

Лемма 1.2 [2, лемма 4.5]. *Пусть f – локальный экран формации F . Группа G тогда и только тогда принадлежит F , когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Лемма 1.3 [2, лемма 4.2]. *Пусть f – локальный экран насыщенной формации F . Тогда $N \cap F = N_\pi$ и $\pi = \{p \mid f(p) \neq \emptyset\}$.*

Лемма 1.4 [2, теорема 4.7]. *Пусть f – максимальный внутренний локальный экран формации F . Формация F наследственна (нормально наследственна) тогда и только тогда, когда для любого простого p формация $f(p)$ наследственна (соответственно, нормально наследственна).*

Лемма 1.5 [12, лемма 11]. *Пусть F – разрешимая нормально наследственная формация. Если F – формация Шеметкова в классе S , то F – наследственная формация.*

Лемма 1.6 [8, лемма 6.1.6]. *Пусть F – непустая формация в классе S . Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $H F$ -субнормальна (F -достижима) в K и $K F$ -субнормальна (F -достижима) в G , то $H F$ -субнормальна (соответственно, F -достижима) в G ;*

2) *если $N \triangleleft G$ и H/N F -субнормальна (F -достижима) в G/N , то H F -субнормальна (соответственно, F -достижима) в G ;*

3) *если $N \triangleleft G$ и H F -субнормальна (F -достижима) в G , то HN/N F -субнормальна (соответственно, F -достижима) в G .*

Лемма 1.7 [8, лемма 6.1.7]. *Пусть F – наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H – подгруппа группы G и $G^F \subseteq H$, то H F -субнормальна (соответственно, F -достижима) в G ;*

2) *если H F -субнормальна (F -достижима) в G и K – подгруппа группы G , то $H \cap K$ F -субнормальна (соответственно, F -достижима) в K ;*

3) *если H_i F -субнормальна (F -достижима) в G , $i = 1, 2$, то $H_1 \cap H_2$ F -субнормальна (соответственно, F -достижима) в G .*

Лемма 1.8 [10, теорема 2]. *Пусть F – разрешимая наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *F содержит всякую разрешимую группу $G = AB$, у которой $\pi(G) \subseteq \pi(F)$ и силовские подгруппы из A и B являются F -достижимыми в G ;*

2) *F – формация Шеметкова в классе S .*

2. Основной результат.

Теорема 2.1. *Пусть F – разрешимая нормально наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *формация F содержит всякую разрешимую группу $G = AB$, где $\pi(G) \subseteq \pi(F)$, A – субнормальная F -подгруппа в G , а любая силовская подгруппа из B F -достижима в G ;*

2) *формация F содержит всякую группу $G = AB$, где $\pi(G) \subseteq \pi(F)$, A – субнормальная F -подгруппа в G , а любая силовская подгруппа из B F -субнормальна в G ;*

3) *формация F содержит всякую группу $G = AB$, у которой A – субнормальная F -подгруппа в G , а B – F -достижимая F -подгруппа в G ;*

4) *формация F содержит всякую группу $G = AB$, у которой A – субнормальная F -подгруппа в G , а B – F -субнормальная F -подгруппа в G ;*

5) *F – формация Шеметкова в классе S .*

Доказательство. Доказательство проведем по следующей схеме: 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5) \Rightarrow 3), затем 5) \Rightarrow 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 5).

Утверждение 4) следует из утверждения 3) ввиду того, что всякая F -субнормальная подгруппа по определению является F -достижимой.

Пусть выполнено утверждение 4). Докажем справедливость утверждения 5). По условию F является насыщенной формацией. По лемме 1.1 формация F имеет единственный максимальный внутренний локальный экран f , причем $N_p f(p) = f(p)$ для любого простого p .

Рассмотрим произвольную разрешимую минимальную не F -группу G . Пусть G не является группой простого порядка. Возможны два случая.

1. $\Phi(G) = 1$. Так как G разрешима, то в G найдется минимальная нормальная подгруппа N . Из $\Phi(G) = 1$ следует, что $G = NM$ для некоторой максимальной подгруппы M из G . Подгруппа N является элементарной абелевой p -группой для некоторого простого числа p . А так как $G/N \cong M/M \cap N \in F$, то $N = G^F$. Ввиду того, что F – формация, получаем, что N является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G , причем $N \cap M = 1$ и $N = C_G(N)$. Из леммы 1.2 и $G \notin F$ получаем, что $G/N \cong M \notin f(p)$.

Покажем, что M – минимальная не $f(p)$ -группа. Для любой собственной подгруппы K группы M произведение $NK \neq G$ и $NK \in F$. Используя лемму 1.2, получаем, что $NK/F_p(NK) \in f(p)$. Так как N самоцентрализуема и $N \subseteq F_p(NK)$, заключаем, что $F_p(NK)$ является p -группой. Значит, $NK \in N_p f(p) = f(p)$ и $K \cong NK/N \in f(p)$. Таким образом, $M \in M(f(p))$.

Покажем, что M – циклическая группа. Предположим противное. Пусть M_1 – максимальная нормальная подгруппа группы M . Такая подгруппа существует ввиду разрешимости группы M . Тогда подгруппа $H_1 = NM_1$ нормальна в группе G . Так как M/M_1 – примарная группа, то некоторая силовская подгруппа из M не содержится в M_1 . Отсюда и из $M \notin f(p)$ следует, что в M найдется максимальная подгруппа M_2 такая, что $M_2 \neq M_1$. Обозначим $H_2 = NM_2$. Так как $H_1 \neq G$, то $H_1 \in F$. Ввиду того, что $N = G^F \subseteq H_2$ и H_2 максимальна в G , получаем, что H_2 F -субнормальна в G . Значит, ввиду справедливости утверждения 4) теоремы получаем, что $G = H_1 H_2 \in F$. Это противоречит выбору G . Таким образом, M – циклическая группа.

Так как $M \in M(f(p))$ и $f(p)$ – формация, то M – q -группа для некоторого простого числа q , $q \neq p$.

Предположим, что $|M| = q^n$ и $n > 1$. Пусть B^* и B^{**} – циклические группы порядков q^{n-1} и q соответственно. Из того, что M – циклическая группа и $M \in M(f(p))$, следует $B^{**} \in f(p)$. Пусть S – регулярное сплетение $B^* w_r B^{**}$. Так как $|M| = q^n$ и $M \in F$, по лемме 1.3 $N_q \subseteq F$. Поэтому $S \in F$. Пусть Q – база сплетения S , т.е. $S = [Q]B^{**}$. Ясно, что $Q \in f(p)$.

Очевидно, что некоторая подгруппа S_1 группы S изоморфна группе M . Ввиду нильпотент-

ности группы S подгруппа S_1 субнормальна в S . Так как по условию формация F является нормально наследственной, то, применяя лемму 1.4, получаем, что $f(p)$ – нормально наследственная формация. Если предположить, что $S \in f(p)$, то $S_1 \cong M \in f(p)$. Противоречие. Следовательно, $S \notin f(p)$.

Обозначим через R регулярное сплетение $SwrP$, где $|P| = p$. Пусть A – база сплетения R . Тогда $R = [A]S = [A]([Q]B^{**})$. Пусть $R_1 = AQ$ и $R_2 = AB^{**}$. Тогда группа $R = R_1 R_2$. Очевидно, что R_1 субнормальна в R . А так как подгруппы R_1 и R_2 принадлежат $N_p f(p) = f(p) \subseteq F$, и $R/A \cong S \subseteq N_q \subseteq F$, то $R^F \subseteq R^{N_q} \subseteq A \subseteq R_2$. Отсюда и из наследственности формации N_q следует, что R_2 является F -достижимой подгруппой группы R . Из справедливости утверждения 4) теоремы следует, что $R \in F$. Но $F_p(R) = A$. Поэтому $S \cong R/A \in f(p)$. Полученное противоречие доказывает, что $n = 1$.

Так как группа $G \notin N$, то G – группа Шмидта.

2. $\Phi(G) \neq 1$. Обозначим $\Phi = \Phi(G)$. Так как $G \notin F$ и F – насыщенная формация, то $G/\Phi \notin F$. Из разрешимости группы G следует разрешимость G/Φ . Так как $G \in M(F)$, то для любой собственной подгруппы H/Φ из G/Φ имеем $H \neq G$ и $H \in F$. Но тогда $H/\Phi \in F$. Таким образом, $G/\Phi \in M(F) \cap S$. Если $|G/\Phi| = q$ для некоторого простого числа q , то G – циклическая группа. Но тогда из $G \in M(F)$ и насыщенности формации F следует, что $|G| = q$. Получили противоречие с выбором G .

Итак, G/Φ не является группой простого порядка. Ввиду доказанного выше G/Φ – группа Шмидта. При этом $G/\Phi = G_p \Phi/\Phi \cdot G_q \Phi/\Phi$, где G_p – силовская p -подгруппа, G_q – силовская q -подгруппа группы G , $G_p \Phi/\Phi = (G/\Phi)^F$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G/Φ , $G_p \Phi/\Phi$ – максимальная подгруппа в G/Φ и $|G_q \Phi/\Phi| = q$. Из $G_p \Phi \triangleleft G$ и обобщенной леммы Фраттини следует, что $G_p \triangleleft G$.

Пусть H – произвольная собственная подгруппа группы G . Тогда H содержится в некоторой максимальной в G подгруппе W . Значит, либо $W/\Phi = G_p \Phi/\Phi$, либо $W/\Phi = (G_q \Phi/\Phi)^{x\Phi}$ для некоторого $x \in G$. В первом случае $W = G_p \Phi$ нильпотентна. Во втором случае $W = G_q^x \Phi$. Если $W \neq F_p(W)$, то из $W \in F$ получаем $W/F_p(W) \in f(p)$. Так как $W/F_p(W)$ – q -группа, то формация $f(p)$ содержит группу простого порядка q . Следовательно, $G/\Phi \in N_p f(p) = f(p)$. Поскольку экран f является внутренним экраном формации F , то $G/\Phi \in F$. Получаем противоречие $G \in F$. Значит, $W = F_p(W)$. Таким образом, и в случае $W = G_q^x \Phi$ группа

$W \in \mathcal{N}$. Следовательно, $H \in \mathcal{N}$. А поскольку $G \notin \mathcal{N}$, то G – группа Шмидта.

Итак, получаем, что минимальная не F -группа является группой Шмидта. Таким образом, формация F является формацией Шеметкова в классе S и выполняется утверждение 5).

Покажем, что из утверждения 5) следует утверждение 3). Пусть группа $G = AB$, где A – субнормальная F -подгруппа в G , B – F -достижимая F -подгруппа в G . Ввиду выполнимости утверждения 5) и леммы 1.5 формация F является наследственной. Так как $A \in F$ и $B \in F$, то $A^F = B^F = 1$. Тогда по леммам 1.7 и 1.6 любая силовская подгруппа из A и B является F -достижимой в G . По лемме 1.8 группа $G \in F$. Итак, из утверждения 5) следует утверждение 3).

Из утверждения 5) следует утверждение 1) ввиду лемм 1.5–1.8.

Предположим, что выполнено утверждение 1) теоремы. Докажем справедливость утверждения 2). Пусть G – такая группа, что $G = AB$, $\pi(G) \subseteq \pi(F)$, A – субнормальная F -подгруппа в группе G , любая силовская подгруппа из B является F -субнормальной в G . Так как всякая F -субнормальная подгруппа является F -достижимой, то любая силовская подгруппа из B является F -достижимой подгруппой в G . Кроме того, G разрешима. Но тогда ввиду справедливости утверждения 1) теоремы $G \in F$. Следовательно, из утверждения 1) следует утверждение 2).

Докажем, что из утверждения 2) следует утверждение 5). Пусть выполняется утверждение 2). Покажем, что F – формация Шеметкова. Пусть $G \in M(F) \cap S$ и $|G|$ не является простым числом.

Допустим, что $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = NM$, где N – минимальная нормальная подгруппа из G , M – максимальная подгруппа из G , причем $N = C_G(N) = G^F$ – элементарная абелева p -группа для некоторого простого числа p , $N \cap M = 1$. По лемме 1.1 формация F имеет единственный максимальный внутренний экран f такой, что $f(p) = N_p f(p)$ для любого простого p . Ввиду леммы 1.2 $M \notin f(p)$, более того $M \in M(f(p))$.

Допустим, что M не является циклической. Для максимальной нормальной подгруппы W_1 группы M имеем $A = NW_1 \triangleleft G$ и $A \in F$. Пусть W_2 – максимальная подгруппа из M , которая не содержит W_1 . Тогда $B = NW_2$ – максимальная подгруппа в G . Из $N = G^F \subseteq B$ следует F -субнормальность B в G . Так как для любой силовской подгруппы Q из B и максимальной цепи подгрупп $Q = B_m \subseteq B_{m-1} \subseteq \dots \subseteq B_0 = B$ имеет место $B_i \in F$, то $(B_{i-1})^F = 1 \subseteq B_i$ ($i=1, \dots, m$). По лемме 1.6 Q F -субнормальна в G . Тогда группа

$G = AB \in F$ по утверждению 2), это противоречит выбору G . Значит, M – циклическая группа.

Далее, как при доказательстве импликации 4) \Rightarrow 5), получаем, что $|M| = q$, $q \neq p$ и $G = NM$ – группа Шмидта.

При $\Phi(G) \neq 1$ аналогичными рассуждениями, как при доказательстве импликации 4) \Rightarrow 5), устанавливаем, что G – группа Шмидта. Следовательно, F – формация Шеметкова в классе S и выполняется утверждение 5). Теорема доказана полностью.

Заключение. Теорема 2.1 позволяет получить приложения для конкретных формаций. Так как подгруппа N -субнормальна в группе из S тогда и только тогда, когда она субнормальна [2, замечание 1, с. 93], то для $F = N$ вытекает

Следствие 1. Если разрешимая группа $G = AB$, где A – субнормальная в G нильпотентная подгруппа, а любая силовская подгруппа из B субнормальна в G , то G нильпотентна.

Напомним, что группа G называется π -разложимой [2, с. 151], если ее холловы π - и π' -подгруппы нормальны в G и холлова π -подгруппа нильпотентна.

Следствие 2. Пусть F – формация всех π -разложимых групп. Если разрешимая группа $G = AB$, где A – субнормальная в G π -разложимая подгруппа, а любая силовская подгруппа из B F -субнормальна в G , то G – π -разложима.

ЛИТЕРАТУРА

- Hawkes, T. On formation subgroups of a finite soluble group / T. Hawkes // J. London Math. Soc. – 1969. – № 44. – P. 243–250.
- Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
- Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30, № 3. – S. 225–228.
- Семенчук, В.Н. Характеризация S -формаций / В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – 1992. – Вып. 7. – С. 103–107.
- Ballester-Bolinches, A. A note on saturated formations / A. Ballester-Bolinches // Arch. Math. – 1992. – Vol. 58, № 2. – P. 110–113.
- Семенчук, В.Н. Конечные группы с F -абнормальными или F -субнормальными подгруппами / В.Н. Семенчук // Мат. заметки. – 1994. – Т. 55, № 6. – С. 111–115.
- Семенчук, В.Н. Конечные группы, факторизуемые F -достижимыми подгруппами / В.Н. Семенчук, О.А. Мокеева // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. – 2002. – № 5. – С. 47–49.
- Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.
- Васильев, А.Ф. О влиянии примарных F -субнормальных подгрупп на строение конечных групп / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.
- Васильева, Т.И. Конечные группы с формационно субнормальными подгруппами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2006. – № 3. – С. 25–30.
- Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
- Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики Акад. наук Украины, 1993. – С. 27–54.

Поступила в редакцию 07.02.2011. Принята в печать 26.02.2011

Адрес для корреспонденции: 246042, г. Гомель, ул. Ильича, 161 «Б», кв. 40, e-mail: 6041131@tut.by – Рябенко Е.А.