

# ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 519.2

ЕВДОКИМОВИЧ  
Владислав Евгеньевич

Стационарное распределение сетей обслуживания с характеристиками обслуживания и маршрутизации, зависящими от их состояния

01.01.05 теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Минск – 2003

# ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

Работа выполнена в Гомельском государственном университете

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, профессор **Малинковский Юрий Владимирович**, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, кафедра математического анализа

**Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук **Лазакевич Николай Викторович**, Белорусский государственный университет, кафедра функционального анализа

кандидат физико-математических наук **Крыленко Александр Владимирович**, Гомельский государственный областной институт повышения квалификации, кафедра общей и коррекционной педагогики

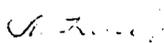
**Опонирующая организация:** Российский университет дружбы народов

Защита диссертации состоится **17 апреля 2003 г.** в заседании совета по защите диссертаций в Белорусском государственном университете по адресу: 220030, Республика Беларусь, г. Минск, пр. Ф.Скорины, 4 (главный корпус), ауд. 206, тел.ученого секретаря (017) 226-55-41

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета

Автореферат разослан **«17»** апреля 2003 г.

Ученый секретарь совета  
по защите диссертаций  
доктор физико-математических наук,  
профессор



А.А.Килбас

# ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

1

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы диссертации.** Стремительное развитие информатики и вычислительной техники требует разработки теоретических основ для исследования таких объектов, как сети ЭВМ, сети передачи данных, коммуникационные сети. Все это стимулирует интенсивное развитие теории сетей массового обслуживания и расширение области применения данного раздела теории массового обслуживания. Теория сетей массового обслуживания предоставляет удобный язык для адекватного описания функционирования больших систем, поскольку в терминах этой теории можно формализовать достаточно сложные модели.

Существенный вклад в развитие теории сетей массового обслуживания внесли В.В.Анисимов, Г.П.Башарин, А.А.Боровков, П.П.Бочаров, Е.Геленбе, Дж.Джексон, Г.Л.Добрушин, В.А.Ившицкий, Ф.П.Келли, М.Я.Кельберт, Д.Кениг, Л.Клейнрок, Ю.В.Малинковский, Г.А.Медведев, В.Меламед, Р.Мюнц, П.К.Поллетт, Р.Ф.Серфозо, Ю.М.Сухов, П.Тейлор, А.Л.Толмачев, Д.Тоусли, Дж.Уолренд, Г.И.Фалин, Дж.Ховард, Х.Чао, К.Ченди, Р.Шасбергер, С.Ф.Яшков и многие другие.

В настоящее время наиболее важными вопросами теории сетей массового обслуживания является выяснение условий, при которых инвариантная мера имеет мультипликативную или близкую к ней форму. Это связано с тем, что до сих пор не разработано методов, позволяющих находить стационарное распределение для случая, когда оно не имеет формы произведения. Расширение класса мультипликативных сетей необходимо для проектирования и эксплуатации реальных технических объектов. Имеются единичные работы, в которых рассматриваются сети массового обслуживания с динамической маршрутизацией, хотя в реальных сетях вероятности, задающие перемещение требований, зависят от состояния этой сети. И практически отсутствуют работы по нахождению инвариантной меры для таких сетей, в которых интенсивности поступающих в них потоков, интенсивности обслуживания и характеристики взаимодействия между узлами зависят от состояния вектора, описывающего стационарное функционирование сети.

В связи с этим весьма актуальным представляется нахождение инвариантной меры для многомерных марковских процессов, с инфинитесимальными интенсивностями переходов, произвольным образом зависящими от состояния этих процессов. Тем более, что в реальных технических системах такая зависимость, как правило, имеет место.

**Связь работы с крупными научными программами, темами.** Полученные в работе результаты использовались при работе над госбюд-

# ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

жетной НИР ГБЦМ 20-10 “Исследование инвариантных мер многомерных марковских процессов”, № госрегистрации 2000545, выполненной по плану Министерства образования РБ в 2000-2001 гг.; госбюджетной НИР ГБЦМ 01-53-Ф “Методы исследования сетей массового обслуживания”, № госрегистрации 20011312, выполненной по плану Министерства образования РБ в 2001-2002 гг.; госбюджетной НИР ГБЦМ 02-03 “Сети массового обслуживания с динамической маршрутизацией, динамическими характеристиками обслуживания и динамическими обходами”, № госрегистрации 2002667, выполненной по плану Министерства образования РБ в 2002 г.

**Цель и задачи исследования.** Основной целью работы является разработка методов исследования стационарного функционирования открытых и замкнутых сетей массового обслуживания с динамическими характеристиками обслуживания, динамической маршрутизацией и динамическими обходами узлов заявками, установление достаточных условий эргодичности и нахождение стационарных распределений.

Рассматриваются открытые и замкнутые сети массового обслуживания с обходами узлов заявками, экспоненциальным обслуживанием, марковскими маршрутизациями обслуженных и обошедших узлов заявок. При этом интенсивность входного потока (в случае открытой сети), интенсивность обслуживания в узлах, матрица маршрутизации и матрица обходов, не совпадающая, вообще говоря, с ней, зависят от состояния сети.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

а) устанавливаются условия, при которых решение уравнений равновесия не зависит от формы пути, соединяющего любые две вершины на графе состояний (эти условия в дальнейшем будем называть условиями независимости от формы пути);

б) для рассматриваемых моделей сетей массового обслуживания устанавливаются достаточные условия эргодичности;

в) находится стационарное распределение вероятностей состояний для всех типов рассматриваемых сетей массового обслуживания.

**Объект и предмет исследования.** Исследуются открытые и замкнутые сети массового обслуживания с динамическими характеристиками, динамической маршрутизацией и динамическими обходами узлов заявками. Изучается стационарное распределение вероятностей состояний таких сетей.

**Гипотеза.** Стационарное распределение открытых и замкнутых марковских сетей массового обслуживания с динамическими характеристиками, динамической маршрутизацией и динамическими обходами

# ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

3

узлов заявками при выполнении условия независимости от формы пути имеет форму произведения, в котором множители зависят как от состояний узлов, так и от состояния сети (в дальнейшем эту форму будем называть обобщенной формой произведения).

**Методология и методы проведенного исследования.** В работе использовались методы теории вероятностей, теории случайных процессов, теории марковских процессов, теории массового обслуживания. В исследованиях стационарного распределения применялся метод локального баланса, метод обращения времени для соответствующих марковских процессов.

**Научная новизна и значимость полученных результатов.** Впервые исследованы сети массового обслуживания весьма общего вида, которые описываются многомерным марковским процессом с инфинитесимальным оператором, зависящим от состояния процесса произвольным образом.

Для открытых и замкнутых марковских сетей массового обслуживания с динамическими характеристиками, динамической маршрутизацией и динамическими обходами узлов заявками устанавливаются достаточные условия эргодичности и находятся стационарные распределения.

Все результаты работы новые и являющиеся развитием и обобщением имеющихся результатов по сетям массового обслуживания, в частности по сетям с обходами узлов заявками на случай, когда матрица маршрутизации зависит от состояния сети.

Результаты диссертации развивают научные представления о сетях массового обслуживания, работающих в стационарном режиме.

**Практическая значимость полученных результатов.** Работа имеет теоретический характер. Практическая значимость полученных результатов определяется возможностью применять их к достаточно широкому классу задач при проектировании и эксплуатации реальных объектов таких, как сети ЭВМ, сети передачи данных, коммуникационные сети, локальные сети и т.д.. Теоретические результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы в учебном процессе БГУ, ГГУ, ГрГУ и других вузах.

## **Основные положения диссертации, выносимые на защиту.**

1. Достаточные условия эргодичности открытых и замкнутых однородных марковских сетей массового обслуживания с характеристиками обслуживания и маршрутизации, зависящими от их состояния.

2. Достаточные условия эргодичности открытых и замкнутых неоднородных марковских сетей массового обслуживания с характеристиками обслуживания и маршрутизации, зависящими от их состояния.

# ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

3. Стационарное распределение вероятностей состояний однородных и неоднородных сетей массового обслуживания с инфинитезимальными интенсивностями, зависящими от состояния сетей, имеет обобщенную форму произведения.

4. Условия независимости от формы пути, при которых решение уравнений равновесия не зависит от формы пути, соединяющего любые две вершины на графе состояний.

**Личный вклад соискателя.** Все результаты, приведенные в диссертации, получены автором самостоятельно. В совместных работах постановка задач и обсуждение результатов принадлежат научному руководителю.

**Апробация результатов диссертации.** Материалы диссертации докладывались на III Республиканской научной конференции студентов и аспирантов “Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях” (Гомель, 2000), на VIII Белорусской международной математической конференции (Минск, 2000), на международной конференции “Современные математические методы исследования информационно-вычислительных сетей” (Минск, 2001), на IV Республиканской научной конференции студентов и аспирантов “Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях” (Гомель, 2001), на международной научно-практической конференции “Актуальные проблемы развития транспортных систем и строительного комплекса” (Гомель, 2000), на V Республиканской научной конференции студентов и аспирантов “Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях” (Гомель, 2001), на I международной конференции “Информационные системы и технологии (IST’2002)” (Минск, 2002), на научном семинаре Российского Университета Дружбы Народов (Москва, 2002).

**Опубликованность результатов.** Результаты диссертации опубликованы в 11 работах, из них 4 статьи в научных журналах, 4 статьи в сборниках материалов научных конференций, 3 тезисов докладов на научных конференциях. Общее количество страниц опубликованных материалов — 43.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, списка использованных источников. Общий объем диссертации составляет 93 страницы. Список использованных источников состоит из 116 наименований.

# ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

5

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В первой главе диссертации сделан обзор имеющихся в настоящее время работ по тематике диссертации, дается характеристика наиболее актуальных вопросов в направлении исследований, касающихся темы диссертации, и методов их решения.

Во второй главе диссертации рассматриваются открытые и замкнутые сети массового обслуживания с экспоненциальным обслуживанием, марковской маршрутизацией и обходами узлов заявками. При этом интенсивность входного потока (для открытой сети), интенсивность обслуживания в узлах, матрица маршрутизации и матрица обходов, не совпадающая, вообще говоря, с матрицей маршрутизации, зависят от состояния сети. Для данных сетей массового обслуживания устанавливаются условия независимости от формы пути, достаточное условие эргодичности и находится стационарное распределение.

В первом разделе второй главы рассматривается открытая сеть массового обслуживания. Состояние сети, состоящей из  $N$  однолинейных узлов, характеризуется в момент времени  $t \geq 0$  случайным вектором  $\vec{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t))$ , где  $n_i(t)$  — число заявок в  $i$ -м узле в момент  $t$ . Для удобства описания состояния сети и его  $i$ -ю координату в некоторый марковский момент соответственно будем обозначать  $\vec{n}^+$  и  $n_i^+$  либо  $\vec{n}^-$  и  $n_i^-$  в зависимости от того, учитывается или не учитывается в состояниях  $\vec{n}$  и  $n_i$  заявка, совершающая в этот момент некоторое перемещение (движение в определенный узел извне или из другого узла после обслуживания или обхода). В сеть поступает стационарный пуассоновский поток заявок интенсивности  $\lambda(\vec{n}^-)$ , зависящей от  $\vec{n}^-$ . Каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью  $p_{0i}(\vec{n}^-)$  направляется в  $i$ -й узел ( $i = \overline{1, N}$ ;  $\sum_i p_{0i}(\vec{n}^-) = 1$ ).

Заявка, направленная в  $i$ -й узел (извне или из другого узла), с вероятностью  $f_{\vec{n}^-}^{(i)}$  присоединяется к очереди, а с вероятностью  $1 - f_{\vec{n}^-}^{(i)}$  мгновенно обходит этот узел ( $0 \leq f_{\vec{n}^-}^{(i)} \leq 1, i = \overline{1, N}$ ).

Длительности обслуживания заявок в узлах независимы. Они не зависят от процесса поступления и для  $i$ -го узла имеют показательное распределение с параметром  $\mu_i(\vec{n}^+)$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Предполагается, что  $\mu_i(\vec{n}^-) > 0$ , если  $n_i \neq 0$ . Заявка, обслуженная  $i$ -м узлом, независимо от других заявок с вероятностью  $p_{ij}(\vec{n}^-)$  направляется в  $j$ -й узел, а с вероятностью  $p_{i0}(\vec{n}^-)$  покидает сеть. Заявка, обошедшая  $i$ -й узел, независимо от других заявок с вероятностью  $q_{ij}(\vec{n}^-)$  направляется в  $j$ -й узел, а с вероятностью  $q_{i0}(\vec{n}^-)$  покидает сеть.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе проведено исследование стационарного распределения открытых и замкнутых марковских сетей массового обслуживания с динамическими характеристиками, динамической маршрутизацией и динамическими обходами узлов заявками.

Получены следующие основные результаты:

1. Для открытых и замкнутых марковских сетей массового обслуживания с динамическими характеристиками, динамической маршрутизацией и динамическими обходами узлов заявками получено достаточное условие эргодичности и найдено стационарное распределение [1,4,5,6,7,9,10,11].

2. Для открытых и замкнутых марковских сетей массового обслуживания с динамическими характеристиками, динамической маршрутизацией, динамическими обходами узлов заявками и ограничением на время ожидания получено достаточное условие эргодичности и найдено стационарное распределение [2,3].

3. Для открытых и замкнутых марковских сетей массового обслуживания с динамическими характеристиками, динамической маршрутизацией, динамическими обходами узлов заявками, несколькими типами сообщений и детальным описанием узла получено достаточное условие эргодичности и найдено стационарное распределение [8].

## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

### Статьи

1. *Евдокимович В.Е., Малитковский Ю.В.* Сети массового обслуживания с динамической маршрутизацией и динамическими вероятностными обходами узлов заявками // Проблемы передачи информации. — 2001. — Т.37, вып.3. — С. 55–66.

2. *Евдокимович В.Е.* Стационарное распределение замкнутых сетей с динамическими характеристиками и ограниченными временами ожидания // Вестник ТГУ. — 2002. — №1(1). — С. 47–51.

3. *Евдокимович В.Е.* Стационарное распределение открытых сетей с динамическими характеристиками и ограничением на время ожидания // Известия Гомельского гос. унив. им. Ф.Скорины. — 2002. — №6(15). С. 167–170.

4. *Евдокимович В.Е.* Замкнутые сети массового обслуживания с динамической маршрутизацией и динамическими вероятностными обходами узлов заявками // Весті Національної Академії наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. наук. — 2003. — №1. — С. 109–113.

### Материалы научных конференций

5. *Евдокимович В.Е.* Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками и новой маршрутизацией // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: Материалы III Респ. научной конф. студентов и аспирантов, Гомель, 13–18 марта 2000 г./ Гомельский гос. унив. им. Ф.Скорины. Гомель, 2000. — С. 125–127.

6. *Евдокимович В.Е.* Сеть массового обслуживания с дробнорациональными вероятностями обходов и маршрутизации // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: Материалы IV Респ. научной конф. студентов и аспирантов, Гомель, 19–22 марта 2001 г./ Гомельский гос. унив. им. Ф.Скорины. — Гомель, 2001. — С. 99–101.

7. *Евдокимович В.Е.* Замкнутая сеть массового обслуживания с динамической маршрутизацией и динамическими вероятностными обходами

узлов заявками // Актуальные проблемы развития транспортных систем и строительного комплекса: Труды Межд. науч.-практ. конф./ Бел. гос. унив. транспорта — Гомель, 2001. — С. 300-301.

8. *Евдокимович В.Е., Довженко Т.С.* Сети передачи данных с динамическими параметрами и несколькими типами сообщений // Информационные системы и технологии (IST,2002): Материалы I межд. конф., Минск, 5-8 ноября, 2001 г. В II ч./ Бел. гос. унив. — Минск, 2002. — Ч.1. — С. 329-332.

## Тезисы

9. *Евдокимович В.Е., Малинковский Ю.В.* Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками и динамической маршрутизацией // VII Белорусская Математическая Конференция: Тез. докл. науч. конф., Минск, 19-24 июня 2000 г. В IV ч. / Бел. матем. общество, Бел. гос. унив., Ин-т матем-ки Академии наук Беларуси. — Минск, 2000. — Ч.2. — С. 146.

10. *Евдокимович В.Е.* Сети массового обслуживания с обходами конечнoемкoстных узлов заявками и динамической маршрутизацией // Массовое обслуживание. Потоки, системы, сети: Материалы межд. конф. "Современные математические методы исследования телекоммуникационных сетей", Минск, 23-25 января, 2001 г./ Бел. гос. унив. — Минск, 2001. — Вып. 16. — С. 90-91.

11. *Евдокимович В.Е.* О некоторых примерах для замкнутой сети массового обслуживания с динамической маршрутизацией и динамическими вероятностными обходами узлов заявками // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: Материалы V Респ. научной конф. студентов и аспирантов, Гомель, 18-20 марта 2002 г./ Гомельский гос. унив. им. Ф.Скорины. — Гомель, 2002. — С. 174-175.

## РЕЗЮМЕ

Евдокимович Владислав Евгеньевич

Стационарное распределение сетей обслуживания с характеристиками обслуживания и маршрутизации, зависящими от их состояния.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, вероятность состояний, обход узлов заявками, стационарное распределение, форма произведения.

Исследуются открытые и замкнутые сети массового обслуживания с динамическими характеристиками: обслуживания, маршрутизации и обходами узлов заявками. Изучается стационарное распределение вероятностей состояний таких сетей. Целью работы является нахождение стационарного распределения этих сетей массового обслуживания.

В работе использовались методы теории вероятностей, теории случайных процессов, теории марковских процессов, теории массового обслуживания.

Получены следующие основные результаты:

1. Для открытых и замкнутых марковских сетей массового обслуживания с динамическими характеристиками получено достаточное условие эргодичности и найдено стационарное распределение.

2. Для открытых и замкнутых марковских сетей массового обслуживания с динамическими характеристиками и экспоненциальным ограничением на время ожидания получено достаточное условие эргодичности и найдено стационарное распределение.

3. Для открытых и замкнутых марковских сетей массового обслуживания с динамическими характеристиками, несколькими типами заявок и детальным описанием узла получено достаточное условие эргодичности. Найдено стационарное распределение.

Все результаты работы новые, являются обобщением имеющихся результатов по сетям массового обслуживания и развивают научные представления о сетях массового обслуживания, функционирующих в стационарном режиме.

Работа имеет теоретический характер. Практическая значимость полученных результатов определяется возможностью применять их к достаточно широкому классу задач при проектировании и эксплуатации сетей ЭВМ, сетей передачи данных, коммуникационных сетей.

# ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

20

## РЭЗЮМЭ

Еўдакімовіч Уладзіслаў Яўгеневіч

Стацыянарнае размеркаванне сетак абслугоўвання з характарыстыкамі абслугоўвання і маршрутызацыі, залежнымі ад іх стапу.

Ключавыя словы: сетка масавага абслугоўвання, імавернасць станаў, абход вузлоў заяўкамі, стацыянарнае размеркаванне, форма здабытку.

Даследуюцца адкрытыя і замкнутыя сеткі масавага абслугоўвання з дынамічнымі характэрыстыкамі: абслугоўвання, маршрутызацыі і абходаў вузлоў заяўкамі. Вызначаецца стацыянарнае размеркаванне імавернасцей станаў такіх сетак. Мэтай работы з'яўляецца знаходжанне стацыянарнага размеркавання гэтых сетак масавага абслугоўвання.

У рабоце выкарыстоўваліся метады тэорыі імавернасцей, тэорыі выпадковых працэсаў, тэорыі маркаўскіх працэсаў, тэорыі масавага абслугоўвання.

Атрыманы наступныя асноўныя вынікі:

1. Для адкрытых і замкнутых маркаўскіх сетак масавага абслугоўвання з дынамічнымі характэрыстыкамі атрымана дастатковая умова эргадычнасці і знойдзена стацыянарнае размеркаванне.

2. Для адкрытых і замкнутых маркаўскіх сетак масавага абслугоўвання з дынамічнымі характэрыстыкамі і экспаненцыяльным абмежаваннем на час чакання атрымана дастатковая умова эргадычнасці і знойдзена стацыянарнае размеркаванне.

3. Для адкрытых і замкнутых маркаўскіх сетак масавага абслугоўвання з дынамічнымі характэрыстыкамі, некалькімі тыпамі заявак і дэталёвым апісаннем вузла атрымана дастатковая умова эргадычнасці. Знойдзена стацыянарнае размеркаванне.

Усе рэзультаты работы новыя, з'яўляюцца абагульненнем маючых рэзультатаў па сетках масавага абслугоўвання і развіваюць навуковыя уяўленні аб сетках масавага абслугоўвання, функцыяніруючых у стацыянарным рэжыме.

Работа мае тэарэтычны характар. Практычнае значэнне атрыманых рэзультатаў вызначаецца магчымасцю прымяняць іх да дастаткова шырокага класу задач пры праектаванні і эксплуатацыі сетак ЭВМ, сетак перадачы даных, і камунікацыйных сетак.

## SUMMARY

Evdokimovich Vladislav Evgenievich

Stationary distribution of networks with features of service and routing depending on their states.

Keywords: Queueing networks, probability of states, round of nodes by customers, stationary distribution, product form.

Open and closed Markov networks with dynamic characteristics: of service, routing and rounds of nodes by customers are researched. The aim of the work is to obtain network stationary distribution. The methodes of probability theory, stochastic process theory, Markov process theory, queueing theory are used in the work.

Following main results are received:

1. For open and closed Markov networks with dynamic features the sufficient condition of ergodicity is installed. Stationary distribution is founded.

2. For open and closed Markov networks with dynamic features, and limited waiting times the sufficient condition of ergodicity is installed. Stationary distribution is founded.

3. For open and closed Markov networks with dynamic features, several types of customers and detailed describing of nodes the sufficient condition of ergodicity is installed. Stationary distribution is founded.

All results are new. They expand certain queueing network results and develop scientific views on queueing networks working in stationary regime. The work has theoretical nature. Practical significance of obtained results is defined by possibility of using to sufficiently wide class of problems during projecting and exploitation of computer networks, data transmission networks, communication networks.