УДК 512.542

О произведениях субнормальных и обобщенно субнормальных подгрупп

Е.А. Рябченко

Учреждение образования «Белорусский государственный университет транспорта»

Пусть $\boldsymbol{F}$ – непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\boldsymbol{F}$-субнормальной в G, если либо H = G, либо существует максимальная цепь подгрупп $G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$ такая, что $(H_{i-1})^{\boldsymbol{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1,2,\ldots,n$. Подгруппа H группы G называется $\boldsymbol{F}$-достижимой в G, если существует цепь подгрупп $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$ такая, что либо H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\boldsymbol{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1,2,\ldots,m$.

В работе получена характеризация разрешимых нормально наследственных насыщенных формаций $\boldsymbol{F}$, замкнутых относительно взятия произведений G = AB, в случае, когда A – субнормальная $\boldsymbol{F}$-подгруппа, а B – $\boldsymbol{F}$-субнормальная ($\boldsymbol{F}$-достижимая) в G подгруппа, либо силовские подгруппы из B $\boldsymbol{F}$-субнормальны ($\boldsymbol{F}$-достижимы) в G.

Ключевые слова: *насыщенная формация, нормально наследственная формация, $\boldsymbol{F}$-субнормальная подгруппа, $\boldsymbol{F}$-достижимая подгруппа.*

On products of subnormal and generally subnormal subgrouos

E.A. Rjabchenko

Educational establishment «Belarusian State University of transport»

Let's consider F to be a non-empty formation. The subgroup H of group G is called F subnormal in G, if either H = G or there is a maximal chain of subgroups $G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$ where $(H_{i-1})^{F} \subseteq H_i$ for all $i = 1,2,\ldots,n$. The subgroup H of group G is called F – accessible in G, if there is a chain of subgroups $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$ in which H_i is normal in H_{i-1}, or $(H_{i-1})^{F} \subseteq H_i$ for all $i = 1,2,\ldots,m$.

In this paper we characterize solvable normal hereditary saturated formations $\boldsymbol{F}$, that are closed respectfully to the products G = AB, in the case when A is a subnormal $\boldsymbol{F}$-subgroup and B is $\boldsymbol{F}$-subnormal ($\boldsymbol{F}$-accessible) subgroup in G or Sylow subgroups from B are $\boldsymbol{F}$-subnormal ($\boldsymbol{F}$-accessible) subgroups in G.

Key words: *saturated formation, completely normal formation, $\boldsymbol{F}$-subnormal subgroup, $\boldsymbol{F}$-accessible subgroup.*

Рассматриваются только конечные группы. Обобщением понятия субнормальной подгруппы является предложенное для разрешимой группы Хоуксом [1], для произвольной группы Л.А. Шеметковым [2] понятие $\boldsymbol{F}$-субнормальной подгруппы, а также введенное Кегелем [3] понятие $\boldsymbol{F}$-достижимой подгруппы.

Пусть $\boldsymbol{F}$ – непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\boldsymbol{F}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$ такая, что $(H_{i-1})^{\boldsymbol{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1,2,\ldots,n$.

Подгруппа H группы G называется $\boldsymbol{F}$-достижимой в G, если существует цепь подгрупп $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$ такая, что либо H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\boldsymbol{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1,2,\ldots,m$.

В 1992 году в работах [4–5] в классе разрешимых групп было положено начало изучению условий принадлежности формации $\boldsymbol{F}$ групп, представимых в виде произведения $\boldsymbol{F}$-субнормальных ($\boldsymbol{F}$-достижимых) $\boldsymbol{F}$-подгрупп. Это направление исследований получило дальнейшее развитие в работах [6–7], [8, гл. 6]. В работах [9–10] изучались формации $\boldsymbol{F}$, содержащие группу $G = AB$ с $\boldsymbol{F}$-субнормальными ($\boldsymbol{F}$-достижимыми) в G силовскими подгруппами из A и B.

Настоящая работа примыкает к отмеченному выше направлению исследований. Цель работы – изучить разрешимые нормально наследственные насыщенные формации $\boldsymbol{F}$, замкнутые относительно взятия произведений $G=AB$, в случае, когда A – субнормальная $\boldsymbol{F}$-подгруппа, а B – $\boldsymbol{F}$-субнормальная ($\boldsymbol{F}$-достижимая) в G подгруппа, либо силовские подгруппы из B $\boldsymbol{F}$-субнормальны ($\boldsymbol{F}$-достижимы) в G.

1. Необходимые определения и известные результаты.

Используются обозначения и определения из [2], [11]. Напомним некоторые из них.

Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка $|G|$ группы G. Пусть $\boldsymbol{F}$ – некоторая формация. Через $\pi(\boldsymbol{F})$ обозначается множество всех простых делителей порядков групп из $\boldsymbol{F}$, $\pi'(\boldsymbol{F})$ – множество всех простых чисел, отличных от чисел из $\pi(\boldsymbol{F})$. Через $G^{\boldsymbol{F}}$ обозначается $\boldsymbol{F}$-корадикал группы G, т.е. наименьшая нормальная в G подгруппа такая, что $G/G^{\boldsymbol{F}}\in\boldsymbol{F}$. Минимальная не $\boldsymbol{F}$-группа – это группа, не принадлежащая $\boldsymbol{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\boldsymbol{F}$. Через $M(\boldsymbol{F})$ обозначается множество всех минимальных не $\boldsymbol{F}$-групп.

Формацией Шеметкова в классе $\boldsymbol{S}$ называется формация $\boldsymbol{F}$, для которой каждая разрешимая минимальная не $\boldsymbol{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка.

Формация $\boldsymbol{F}$ называется наследственной (нормально наследственной), если $\boldsymbol{F}$ вместе с группой G содержит все подгруппы (соответственно, нормальные подгруппы) из G.

Используются обозначения: $\boldsymbol{S}$ – класс всех разрешимых групп, $\boldsymbol{N}$ – класс всех нильпотентных групп, $\boldsymbol{N}_\pi$ – класс всех нильпотентных π-групп для некоторого множества простых чисел π, $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{p}}$ – класс всех p-групп для некоторого простого числа p.

По теореме Гашюца–Любезедер–Шмидта [11] формация насыщена тогда и только тогда, когда она локальна.

Для доказательства основного результата работы нам будут необходимы следующие известные факты.

Лемма 1.1 [2, теорема 3.3]. *Насыщенная формация $\boldsymbol{F}$ имеет единственный максимальный внутренний локальный экран f, причем f удовлетворяет следующему условию: $f(p) = \boldsymbol{N}_p f(p)$ для любого простого числа p.*

Лемма 1.2 [2, лемма 4.5]. *Пусть f – локальный экран формации $\boldsymbol{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\boldsymbol{F}$, когда $G/F_p(G)\in f(p)$ для любого $p\in\pi(G)$.*

Лемма 1.3 [2, лемма 4.2]. *Пусть f – локальный экран насыщенной формации $\boldsymbol{F}$. Тогда $\boldsymbol{N}\cap\boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}_\pi$ и $\pi=\{p \mid f(p)\neq\varnothing\}$.*

Лемма 1.4 [2, теорема 4.7]. *Пусть f – максимальный внутренний локальный экран формации $\boldsymbol{F}$. Формация $\boldsymbol{F}$ наследственна (нормально наследственна) тогда и только тогда, когда для любого простого p формация $f(p)$ наследственна (соответственно, нормально наследственна).*

Лемма 1.5 [12, лемма 11]. *Пусть $\boldsymbol{F}$ – разрешимая нормально наследственная формация. Если $\boldsymbol{F}$ – формация Шеметкова в классе $\boldsymbol{S}$, то $\boldsymbol{F}$ – наследственная формация.*

Лемма 1.6 [8, лемма 6.1.6]. *Пусть $\boldsymbol{F}$ – непустая формация в классе $\boldsymbol{S}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H $\boldsymbol{F}$-субнормальна ($\boldsymbol{F}$-достижима) в K и K $\boldsymbol{F}$-субнормальна ($\boldsymbol{F}$-достижима) в G, то H $\boldsymbol{F}$-субнормальна (соответственно, $\boldsymbol{F}$-достижима) в G;

2) если $N\triangleleft G$ и H/N $\boldsymbol{F}$-субнормальна ($\boldsymbol{F}$-достижима) в G/N, то H $\boldsymbol{F}$-субнормальна (соответственно, $\boldsymbol{F}$-достижима) в G;

3) если $N\triangleleft G$ и H $\boldsymbol{F}$-субнормальна ($\boldsymbol{F}$-достижима) в G, то HN/N $\boldsymbol{F}$-субнормальна (соответственно, $\boldsymbol{F}$-достижима) в G.

Лемма 1.7 [8, лемма 6.1.7]. *Пусть $\boldsymbol{F}$ – наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H – подгруппа группы G и $G^{\boldsymbol{F}}\subseteq H$, то H $\boldsymbol{F}$-субнормальна (соответственно, $\boldsymbol{F}$-достижима) в G;

2) если H $\boldsymbol{F}$-субнормальна ($\boldsymbol{F}$-достижима) в G и K – подгруппа группы G, то $H\cap K$ $\boldsymbol{F}$-субнормальна (соответственно, $\boldsymbol{F}$-достижима) в K;

3) если H_i $\boldsymbol{F}$-субнормальна ($\boldsymbol{F}$-достижима) в G, $i = 1,2$, то $H_1\cap H_2$ $\boldsymbol{F}$-субнормальна (соответственно, $\boldsymbol{F}$-достижима) в G.

Лемма 1.8 [10, теорема 2]. *Пусть $\boldsymbol{F}$ – разрешимая наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\boldsymbol{F}$ содержит всякую разрешимую группу $G = AB$, у которой $\pi(G)\subseteq\pi(\boldsymbol{F})$ и силовские подгруппы из A и B являются $\boldsymbol{F}$-достижимыми в G;

2) $\boldsymbol{F}$ – формация Шеметкова в классе $\boldsymbol{S}$.

2. Основной результат.

Теорема 2.1. *Пусть $\boldsymbol{F}$ – разрешимая нормально наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) формация $\boldsymbol{F}$ содержит всякую разрешимую группу $G = AB$, где $\pi(G)\subseteq\pi(\boldsymbol{F})$, A – субнормальная $\boldsymbol{F}$-подгруппа в G, а любая силовская подгруппа из B $\boldsymbol{F}$-достижима в G;

2) формация $\boldsymbol{F}$ содержит всякую группу $G = AB$, где $\pi(G)\subseteq\pi(\boldsymbol{F})$, A – субнормальная $\boldsymbol{F}$-подгруппа в G, а любая силовская подгруппа из B $\boldsymbol{F}$-субнормальна в G;

3) формация $\boldsymbol{F}$ содержит всякую группу $G = AB$, у которой A – субнормальная $\boldsymbol{F}$-подгруппа в G, а B – $\boldsymbol{F}$-достижимая $\boldsymbol{F}$-подгруппа в G;

4) формация $\boldsymbol{F}$ содержит всякую группу $G = AB$, у которой A – субнормальная $\boldsymbol{F}$-подгруппа в G, а B – $\boldsymbol{F}$-субнормальная $\boldsymbol{F}$-подгруппа в G;

5) $\boldsymbol{F}$ – формация Шеметкова в классе $\boldsymbol{S}$.

Доказательство. Доказательство проведем по следующей схеме: 3)$\Rightarrow$4)$\Rightarrow$5)$\Rightarrow$3), затем 5)$\Rightarrow$1)$\Rightarrow$2)$\Rightarrow$5).

Утверждение 4) следует из утверждения 3) ввиду того, что всякая $\boldsymbol{F}$-субнормальная подгруппа по определению является $\boldsymbol{F}$-достижимой.

Пусть выполнено утверждение 4). Докажем справедливость утверждения 5). По условию $\boldsymbol{F}$ является насыщенной формацией. По лемме 1.1 формация $\boldsymbol{F}$ имеет единственный максимальный внутренний локальный экран f, причем $\boldsymbol{N}_p f(p) = f(p)$ для любого простого p.

Рассмотрим произвольную разрешимую минимальную не $\boldsymbol{F}$-группу G. Пусть G не является группой простого порядка. Возможны два случая.

1. $\Phi(G) = 1$. Так как G разрешима, то в G найдется минимальная нормальная подгруппа N. Из $\Phi(G) = 1$ следует, что $G = NM$ для некоторой максимальной подгруппы M из G. Подгруппа N является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p. А так как $G/N \cong M/M \cap N \in \boldsymbol{F}$, то $N = G^{\boldsymbol{F}}$. Ввиду того, что $\boldsymbol{F}$ – формация, получаем, что N является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G, причем $N \cap M = 1$ и $N = C_G(N)$. Из леммы 1.2 и $G \notin \boldsymbol{F}$ получаем, что $G/N \cong M \notin f(p)$.

Покажем, что M – минимальная не $f(p)$-группа. Для любой собственной подгруппы K группы M произведение $NK \neq G$ и $NK \in \boldsymbol{F}$. Используя лемму 1.2, получаем, что $NK / F_p(NK) \in f(p)$. Так как N самоцентрализуема и $N \subseteq F_p(NK)$, заключаем, что $F_p(NK)$ является p-группой. Значит, $NK \in \boldsymbol{N}_p f(p) = f(p)$ и $K \cong NK/N \in f(p)$. Таким образом, $M \in M(f(p))$.

Покажем, что M – циклическая группа. Предположим противное. Пусть M_1 – максимальная нормальная подгруппа группы M. Такая подгруппа существует ввиду разрешимости группы M. Тогда подгруппа $H_1 = NM_1$ нормальна в группе G. Так как M/M_1 – примарная группа, то некоторая силовская подгруппа из M не содержится в M_1. Отсюда и из $M \notin f(p)$ следует, что в M найдется максимальная подгруппа M_2 такая, что $M_2 \neq M_1$. Обозначим $H_2 = NM_2$. Так как $H_1 \neq G$, то $H_1 \in \boldsymbol{F}$. Ввиду того, что $N = G^{\boldsymbol{F}} \subseteq H_2$ и H_2 максимальна в G, получаем, что H_2 $\boldsymbol{F}$-субнормальна в G. Значит, ввиду справедливости утверждения 4) теоремы получаем, что $G = H_1H_2 \in \boldsymbol{F}$. Это противоречит выбору G. Таким образом, M – циклическая группа.

Так как $M \in M(f(p))$ и $f(p)$ – формация, то M – q-группа для некоторого простого числа q, $q \neq p$.

Предположим, что $|M| = q^n$ и $n > 1$. Пусть B^* и B^{**} – циклические группы порядков q^{n-1} и q соответственно. Из того, что M – циклическая группа и $M \in M(f(p))$, следует $B^{**} \in f(p)$. Пусть S – регулярное сплетение $B^* wr B^{**}$. Так как $|M| = q^n$ и $M \in \boldsymbol{F}$, по лемме 1.3 $\boldsymbol{N}_q \subseteq \boldsymbol{F}$. Поэтому $S \in \boldsymbol{F}$. Пусть Q – база сплетения S, т.е. $S = [Q]B^{**}$. Ясно, что $Q \in f(p)$.

Очевидно, что некоторая подгруппа S_1 группы S изоморфна группе M. Ввиду нильпотентности группы S подгруппа S_1 субнормальна в S. Так как по условию формация $\boldsymbol{F}$ является нормально наследственной, то, применяя лемму 1.4, получаем, что $f(p)$ – нормально наследственная формация. Если предположить, что $S \in f(p)$, то $S_1 \cong M \in f(p)$. Противоречие. Следовательно, $S \notin f(p)$.

Обозначим через R регулярное сплетение $SwrP$, где $|P| = p$. Пусть A – база сплетения R. Тогда $R = [A]S = [A]([Q]B^{**})$. Пусть $R_1 = AQ$ и $R_2 = AB^{**}$. Тогда группа $R = R_1R_2$. Очевидно, что R_1 субнормальна в R. А так как подгруппы R_1 и R_2 принадлежат $\boldsymbol{N}_p f(p) = f(p) \subseteq \boldsymbol{F}$, и $R/A \cong S \subseteq \boldsymbol{N}_q \subseteq \boldsymbol{F}$, то $R^{\boldsymbol{F}} \subseteq R^{\boldsymbol{N}q} \subseteq A \subseteq R_2$. Отсюда и из наследственности формации $\boldsymbol{N}_q$ следует, что R_2 является $\boldsymbol{F}$-достижимой подгруппой группы R. Из справедливости утверждения 4) теоремы следует, что $R \in \boldsymbol{F}$. Но $F_p(R) = A$. Поэтому $S \cong R/A \in f(p)$. Полученное противоречие доказывает, что $n = 1$.

Так как группа $G \notin \boldsymbol{N}$, то G – группа Шмидта.

2. $\Phi(G) \neq 1$. Обозначим $\Phi = \Phi(G)$. Так как $G \notin \boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}$ – насыщенная формация, то $G/\Phi \notin \boldsymbol{F}$. Из разрешимости группы G следует разрешимость G/Φ. Так как $G \in M(\boldsymbol{F})$, то для любой собственной подгруппы H/Φ из G/Φ имеем $H \neq G$ и $H \in \boldsymbol{F}$. Но тогда $H/\Phi \in \boldsymbol{F}$. Таким образом, $G/\Phi \in M(\boldsymbol{F}) \cap \boldsymbol{S}$. Если $|G/\Phi| = q$ для некоторого простого числа q, то G – циклическая группа. Но тогда из $G \in M(\boldsymbol{F})$ и насыщенности формации $\boldsymbol{F}$ следует, что $|G| = q$. Получили противоречие с выбором G.

Итак, G/Φ не является группой простого порядка. Ввиду доказанного выше G/Φ – группа Шмидта. При этом $G/\Phi = G_p\Phi/\Phi \cdot G_q\Phi/\Phi$, где G_p – силовская p-подгруппа, G_q – силовская q-подгруппа группы G, $G_p\Phi/\Phi = (G/\Phi)^{\boldsymbol{F}}$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G/Φ, $G_p\Phi/\Phi$ – максимальная подгруппа в G/Φ и $|G_q\Phi/\Phi| = q$. Из $G_p\Phi \lhd G$ и обобщенной леммы Фраттини следует, что $G_p \lhd G$.

Пусть H – произвольная собственная подгруппа группы G. Тогда H содержится в некоторой максимальной в G подгруппе W. Значит, либо $W/\Phi = G_p\Phi/\Phi$, либо $W/\Phi = (G_q\Phi/\Phi)^{x\Phi}$ для некоторого $x \in G$. В первом случае $W = G_p\Phi$ нильпотентна. Во втором случае $W = G_q^x\Phi$. Если $W \neq F_p(W)$, то из $W \in \boldsymbol{F}$ получаем $W/F_p(W) \in f(p)$. Так как $W/F_p(W)$ – q-группа, то формация $f(p)$ содержит группу простого порядка q. Следовательно, $G/\Phi \in \boldsymbol{N}_p f(p) = f(p)$. Поскольку экран f является внутренним экраном формации $\boldsymbol{F}$, то $G/\Phi \in \boldsymbol{F}$. Получаем противоречие $G \in \boldsymbol{F}$. Значит, $W = F_p(W)$. Таким образом, и в случае $W = G_q^x\Phi$ группа

$W \in \boldsymbol{N}$. Следовательно, $H \in \boldsymbol{N}$. А поскольку $G \notin \boldsymbol{N}$, то G – группа Шмидта.

Итак, получаем, что минимальная не $\boldsymbol{F}$-группа является группой Шмидта. Таким образом, формация $\boldsymbol{F}$ является формацией Шеметкова в классе $\boldsymbol{S}$ и выполняется утверждение 5).

Покажем, что из утверждения 5) следует утверждение 3). Пусть группа $G = AB$, где A – субнормальная $\boldsymbol{F}$-подгруппа в G, B – $\boldsymbol{F}$-достижимая $\boldsymbol{F}$-подгруппа в G. Ввиду выполнимости утверждения 5) и леммы 1.5 формация $\boldsymbol{F}$ является наследственной. Так как $A \in \boldsymbol{F}$ и $B \in \boldsymbol{F}$, то $A^{\boldsymbol{F}} = B^{\boldsymbol{F}} = 1$. Тогда по леммам 1.7 и 1.6 любая силовская подгруппа из A и B является $\boldsymbol{F}$-достижимой в G. По лемме 1.8 группа $G \in \boldsymbol{F}$. Итак, из утверждения 5) следует утверждение 3).

Из утверждения 5) следует утверждение 1) ввиду лемм 1.5–1.8.

Предположим, что выполнено утверждение 1) теоремы. Докажем справедливость утверждения 2). Пусть G – такая группа, что $G = AB$, $\pi(G) \subseteq \pi(\boldsymbol{F})$, A – субнормальная $\boldsymbol{F}$-подгруппа в группе G, любая силовская подгруппа из B является $\boldsymbol{F}$-субнормальной в G. Так как всякая $\boldsymbol{F}$-субнормальная подгруппа является $\boldsymbol{F}$-достижимой, то любая силовская подгруппа из B является $\boldsymbol{F}$-достижимой подгруппой в G. Кроме того, G разрешима. Но тогда ввиду справедливости утверждения 1) теоремы $G \in \boldsymbol{F}$. Следовательно, из утверждения 1) следует утверждение 2).

Докажем, что из утверждения 2) следует утверждение 5). Пусть выполняется утверждение 2). Покажем, что $\boldsymbol{F}$ – формация Шеметкова. Пусть $G \in M(\boldsymbol{F}) \cap \boldsymbol{S}$ и $|G|$ не является простым числом.

Допустим, что $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = NM$, где N – минимальная нормальная подгруппа из G, M – максимальная подгруппа из G, причем $N = C_G(N) = G^{\boldsymbol{F}}$ – элементарная абелева p-группа для некоторого простого числа p, $N \cap M = 1$. По лемме 1.1 формация $\boldsymbol{F}$ имеет единственный максимальный внутренний экран f такой, что $f(p) = \boldsymbol{N}_p f(p)$ для любого простого p. Ввиду леммы 1.2 $M \notin f(p)$, более того $M \in M(f(p))$.

Допустим, что M не является циклической. Для максимальной нормальной подгруппы W_1 группы M имеем $A = NW_1 \triangleleft G$ и $A \in \boldsymbol{F}$. Пусть W_2 – максимальная подгруппа из M, которая не содержит W_1. Тогда $B = NW_2$ – максимальная подгруппа в G. Из $N = G^{\boldsymbol{F}} \subseteq B$ следует $\boldsymbol{F}$-субнормальность B в G. Так как для любой силовской подгруппы Q из B и максимальной цепи подгрупп $Q = B_m \subset B_{m-1} \subset \ldots \subset B_0 = B$ имеет место $B_i \in \boldsymbol{F}$, то $(B_{i-1})^{\boldsymbol{F}} = 1 \subseteq B_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. По лемме 1.6 Q $\boldsymbol{F}$-субнормальна в G. Тогда группа $G = AB \in \boldsymbol{F}$ по утверждению 2), это противоречит выбору G. Значит, M – циклическая группа.

Далее, как при доказательстве импликации 4)$\Rightarrow$5), получаем, что $|M| = q$, $q \neq p$ и $G = NM$ – группа Шмидта.

При $\Phi(G) \neq 1$ аналогичными рассуждениями, как при доказательстве импликации 4)$\Rightarrow$5), устанавливаем, что G – группа Шмидта. Следовательно, $\boldsymbol{F}$ – формация Шеметкова в классе $\boldsymbol{S}$ и выполняется утверждение 5). Теорема доказана полностью.

Заключение. Теорема 2.1 позволяет получить приложения для конкретных формаций. Так как подгруппа $\boldsymbol{N}$-субнормальна в группе из $\boldsymbol{S}$ тогда и только тогда, когда она субнормальна [2, замечание 1, с. 93], то для $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}$ вытекает

Следствие 1. Если разрешимая группа $G = AB$, где A – субнормальная в G нильпотентная подгруппа, а любая силовская подгруппа из B субнормальна в G, то G нильпотентна.

Напомним, что группа G называется π-разложимой [2, с. 151], если ее холловы π- и π'-подгруппы нормальны в G и холлова π-подгруппа нильпотентна.

Следствие 2. Пусть $\boldsymbol{F}$ – формация всех π-разложимых групп. Если разрешимая группа $G = AB$, где A – субнормальная в G π-разложимая подгруппа, а любая силовская подгруппа из B $\boldsymbol{F}$-субнормальна в G, то G – π-разложима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hawkes, T. On formation subgroups of a finite soluble group / T. Hawkes // J. London Math. Soc. – 1969. – № 44. – P. 243–250.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
3. Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30, № 3. – S. 225–228.
4. Семенчук, В.Н. Характеризация $\tilde{S}$-формаций / В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – 1992. – Вып. 7. – С. 103–107.
5. Ballester-Bolinches, A. A note on saturated formations / A. Ballester-Bolinches // Arch. Math. – 1992. – Vol. 58, № 2. – P. 110–113.
6. Семенчук, В.Н. Конечные группы с $\boldsymbol{F}$-абнормальными или $\boldsymbol{F}$-субнормальными подгруппами / В.Н. Семенчук // Мат. заметки. – 1994. – Т. 55, № 6. – С. 111–115.
7. Семенчук, В.Н. Конечные группы, факторизуемые $\boldsymbol{F}$-достижимыми подгруппами / В.Н. Семенчук, О.А. Мокеева // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. – 2002. – № 5. – С. 47–49.
8. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.
9. Васильев, А.Ф. О влиянии примарных $\boldsymbol{F}$-субнормальных подгрупп на строение конечных групп / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.
10. Васильева, Т.И. Конечные группы с формационно субнормальными подгруппами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 25–30.
11. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
12. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики Акад. наук Украины, 1993. – С. 27–54.

Поступила в редакцию 07.02.2011. Принята в печать 26.02.2011
Адрес для корреспонденции: 246042, г. Гомель, ул. Ильича, 161 «Б», кв. 40, e-mail: 6041131@tut.by – Рябченко Е.А.