

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 519.21

ЕРЁМИНА

Александра Рафаэловна

**ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
В СЕТЯХ С МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ  
ОБСЛУЖИВАНИЯ И РАЗНОТИПНЫМИ ЗАЯВКАМИ**

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности «01.01.05 – Теория вероятностей  
и математическая статистика»

Минск, 2013

Работа выполнена в учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы».

**Научный руководитель – Малинковский Юрий Владимирович,**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой экономической  
кибернетики и теории вероятностей  
УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины».

**Официальные оппоненты: Апанасович Владимир Владимирович,**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
директор ГУО «Институт бизнеса и менеджмента  
технологий» Белорусского государственного  
университета;

**Гаврилюк Александр Александрович,**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры прикладной математики  
УО «Белорусский государственный университет  
транспорта».

**Оппонирующая организация –** Государственное научное учреждение  
«Институт математики НАН Беларуси».

Защита состоится 15 ноября 2013 г. в 12.00 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (юридический факультет), ауд. 407. Телефон ученого секретаря – (017) 209-57-09.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан 07 октября 2013 г.

Ученый секретарь  
совета по защите диссертаций  
доктор физико-математических наук,  
профессор

Н.В. Лазакович

## КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Системы и сети массового обслуживания (МО) находят широкое применение при анализе и оптимизации различных процессов, в частности, при передаче и обработке информации. Они являются адекватными моделями, описывающими функционирование многих реальных объектов в экономике, производственном и финансовом секторе, логистике, технике, здравоохранении, проектировании информационных и компьютерных сетей и т.д. [10, 12, 13, 16]. Особый практический интерес представляет изучение сетей с многорежимным обслуживанием, которые могут использоваться при проектировании ремонтных мастерских, заправочных станций, промышленных объектов, планировании графика работы общественного транспорта, открытии новых производственных линий и т.д.

Однако при построении и анализе сетей часто выдвигается предположение о том, что длительности обслуживания поступающих заявок и (или) длительности пребывания обслуживаемых приборов в режимах имеют экспоненциальное распределение. Это условие часто не соответствует функционированию реальных объектов. Поэтому большую практическую значимость имеет изучение таких сетей, в которых заявки обслуживаются не только по экспоненциальному закону, а обслуживаемые приборы в узлах могут полностью или частично выходить из строя, работать с меньшей производительностью.

Первый результат по инвариантности стационарного распределения получен в 1957 г. Б.А. Севастьянов доказал, что для системы  $M/G/m/0$  существует эргодическое распределение вероятностей состояний, которое не зависит от вида функции распределения длительности обслуживания, если среднее время обслуживания фиксировано. В 1975 году была опубликована ВСМР-теорема (Baskett, Chandy, Muntz, Palacios), являющаяся первой работой по инвариантности для сетей МО.

Установлению инвариантности стационарного распределения вероятностей состояний систем и сетей МО также посвящены публикации В.А. Ивницкого, Д. Кёнига, И.Н. Коваленко, А.В. Крыленко, А.Н. Старовойтова, Д. Штойяна, О.В. Якубович, У. Янзена и др.

В данной работе для ряда мгновенных дисциплин обслуживания доказыва-ется инвариантность стационарного распределения состояний сетей с многоре-жимными стратегиями и заявками различных типов относительно работ по об-служиванию требований и (или) по переключению режимов работы приборов.

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

### **Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами**

Диссертационная работа выполнялась в рамках следующих научных программ учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»:

– Государственная программа фундаментальных исследований «Математические модели 26», задание «Математические модели стохастических сетей» (срок выполнения 2009-2010 гг., № госрегистрации 20061474);

– Государственная программа научных исследований «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития (Конвергенция)», подпрограмма «Математические методы», задание «Стационарное распределение стохастических сетей» (срок выполнения 2011-2012 гг., № госрегистрации 20111163).

### **Цель и задачи исследования**

Целью работы является доказательство инвариантности (независимости) стационарного распределения открытых и замкнутых сетей с многорежимными стратегиями обслуживания и разнотипными заявками относительно вида функций распределения количества работы, необходимого для обслуживания поступающей в узел заявки, и (или) функций распределения количества работы, необходимого для переключения режимов приборов в узлах. Для достижения поставленной цели решались следующие задачи для открытых и замкнутых сетей:

1) с мгновенными дисциплинами обслуживания, произвольной функцией распределения количества работы, необходимого для обслуживания требования, экспоненциальным переключением режимов работы приборов в узлах и марковской маршрутизацией устанавливаются достаточные условия независимости стационарного распределения состояний сети от вида функций распределения, характеризующих обслуживание;

2) с экспоненциальным обслуживанием, произвольной функцией распределения количества работы, необходимого для переключения режимов функционирования приборов в узлах, и марковской маршрутизацией устанавливаются достаточные условия независимости стационарного распределения состояний сети от вида функций распределения, характеризующих переключение;

3) с мгновенными дисциплинами обслуживания, произвольной функцией

распределения количества работы, необходимого для обслуживания требования, произвольной функцией распределения количества работы, необходимого для переключения режимов функционирования приборов в узлах, и марковской маршрутизацией устанавливаются достаточные условия независимости стационарного распределения состояний сети от вида функций распределения, характеризующих обслуживание и переключение.

**Объектом исследования** являются кусочно-линейные и кусочно-непрерывные марковские процессы состояний открытых и замкнутых сетей с многорежимными стратегиями обслуживания и разнотипными заявками.

**Предметом исследования** является стационарное распределение вероятностей состояний таких сетей.

В работе использовались методы теории вероятностей, теории марковских процессов, теории МО, теории надёжности. Исследования основывались на методе расширения фазового пространства (метод дополнительных переменных) и методе локального баланса.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Если дисциплина обслуживания является «немедленной», то стационарное распределение вероятностей состояний открытых и замкнутых сетей с многорежимными стратегиями и разнотипными заявками не зависит от вида функций распределения количества работы, необходимого для обслуживания требований, поступающих в узел, и имеет мультипликативную форму.

2. Стационарное распределение вероятностей состояний открытых и замкнутых сетей с многорежимными стратегиями и разнотипными заявками не зависит от вида функций распределения количества работы, необходимого для переключения режимов функционирования приборов в узлах, и имеет мультипликативную форму.

3. Если дисциплина обслуживания является «немедленной», то стационарное распределение вероятностей состояний открытых и замкнутых сетей с многорежимными стратегиями и разнотипными заявками не зависит от вида функций распределения количества работы, необходимого для обслуживания требования, а также количества работы, необходимого для переключения режимов приборов, и имеет мультипликативную форму.

Основные результаты настоящей диссертационной работы являются новыми, поскольку обобщают результаты, полученные Ю.Е. Летунович для сетей с несколькими типами заявок, многорежимными стратегиями обслуживания и экспоненциальными длительностями обслуживания и пребывания в режимах, на случай произвольно распределённых длительностей обслуживания и пребывания в режимах и А.Н. Старовойтовым для сетей с многорежимными страте-

гиями обслуживания, однотипными заявками и произвольными длительностями обслуживания и пребывания в режимах на случай нескольких типов заявок.

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть применены при проектировании и моделировании реальных объектов, т.к. на практике существуют технические средства, которые в силу износа, нарушения условий эксплуатации и т.д. могут продолжать работать с меньшей производительностью или полностью прекращать функционирование.

### **Личный вклад соискателя**

Все результаты, приведенные в диссертации, получены автором самостоятельно. В совместных работах постановка задач принадлежит научному руководителю Ю.В. Малинковскому. В совместной работе с А.Н. Старовойтовым последнему принадлежала постановка задачи. Вклад соискателя определяется рамками излагаемых в диссертации результатов.

### **Апробация результатов диссертации**

Основные результаты диссертации докладывались на X Белорусской математической конференции (Минск, 2008), на X-XIII Республиканских научных конференциях студентов и аспирантов (Гомель, 2007-2010), на международной конференции, посвященной 75-летию Г.А.Медведева (Минск, 2010), а также на международных научных и научно-практических конференциях: «Современные информационные компьютерные технологии mcIT-2010» (Гродно, 2010); 14-й «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: теория и приложения» (Москва, 2010); «Массовое обслуживание: потоки, системы, сети. Современные математические методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей» (Минск, 2011); X «Информационные технологии и математическое моделирование» (Анжеро-Судженск, 2011); «Моделирование и анализ информационных систем» (Ярославль, 2012); XIV, посвященной 120-летию со дня рождения академика М. Кравчука (Киев, 2012); VI «Современные задачи прикладной статистики, промышленной, актуарной и финансовой математики» (Донецк, 2012); I Интернет-конференции «Современные тенденции развития математики и её прикладные аспекты – 2012» (Донецк, 2012); 17-й «Проблемы передачи и обработки информации в сетях и системах телекоммуникаций» (Рязань, 2012); «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий» (Сочи, 2012); XV «Математические методы в технике и технологиях (ММТТ-25)» (Волгоград, 2012). Результаты докладывались на научных семинарах учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

### **Опубликованность результатов диссертации**

Основные результаты диссертации опубликованы в 29 научных работах, из которых 9 – статьи в научных журналах в соответствии с п. 18 Положения о присуждении учёных степеней и присвоении учёных званий в Республике Беларусь (общим объёмом 3,5 авторского листа), 2 – статьи в сборниках научных трудов, 16 – статьи в сборниках материалов научных конференций, 2 – тезисы.

### **Структура и объём диссертации**

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, библиографического списка и семи приложений. Полный объём диссертации составляет 122 страницы, в том числе 7 приложений занимают 14 страниц. Библиографический список содержит 159 наименований, включая собственные публикации автора (на 16 страницах).

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

### **Основные научные результаты диссертации**

1. Для открытых и замкнутых сетей МО с многорежимными стратегиями, разнотипными заявками и различными «немедленными» дисциплинами обслуживания установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сетей относительно вида функций распределения величин работ, требующихся на обслуживание заявок в случае, когда длительности пребывания в режимах имеют экспоненциальное распределение [1, 2, 3, 5, 11, 14, 15, 17, 28].

2. Для открытых и замкнутых сетей МО с многорежимными стратегиями и разнотипными заявками установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сетей относительно вида функций распределения величин работ, необходимых для переключения режимов функционирования приборов в узлах, когда величины работ, требующиеся на обслуживание заявок, имеют экспоненциальное распределение [9, 21, 22, 23, 24, 27].

3. Для открытых и замкнутых сетей МО с многорежимными стратегиями, разнотипными заявками и различными «немедленными» дисциплинами обслуживания установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сетей относительно вида функций распределения величин ра-

бот, требующихся на обслуживание заявок, и величин работ, необходимых для переключения режимов функционирования приборов в узлах [4, 6, 7, 8, 18, 19, 20, 25, 26, 29].

Таким образом, для всех вышеперечисленных случаев установлено, что стационарное распределение вероятностей состояний сети, как и в марковском случае, имеет форму произведения, где каждый множитель является стационарным распределением вероятностей состояний изолированного узла, помещенного в фиктивную окружающую среду с простейшим входным потоком.

### **Рекомендации по практическому использованию результатов**

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы при решении прикладных задач, связанных с проектированием, моделированием и эксплуатацией различных реальных объектов, поскольку любые технические средства в силу естественного износа или нарушения условий эксплуатации могут полностью прекращать функционирование, либо продолжать работать с меньшей производительностью. При этом, как правило, распределение длительностей обслуживания заявок и времени нормального функционирования устройств отличается от экспоненциального. Поэтому полученные в работе результаты облегчают нахождение стационарных распределений состояний сетей.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ

### Статьи в научных журналах

1. Малинковский, Ю.В. Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сетей с многорежимными стратегиями обслуживания, разнотипными заявками и дисциплиной обслуживания LCFS PR / Ю.В. Малинковский, А.Н. Старовойтов, А.Р. Ерёмина // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – №3(8). – С. 33-39.
2. Ерёмина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения открытой сети массового обслуживания с многорежимными стратегиями, разнотипными заявками и дисциплиной «обобщённое разделение процессора» / А.Р. Ерёмина // Вестник Гродненского государственного университета им. Я. Купалы. Серия 2. – 2010. – №3. – С. 52-58.
3. Ерёмина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения состояний сетей массового обслуживания с многорежимными стратегиями, разнотипными заявками и дисциплиной «обобщённое разделение процессора» / А.Р. Ерёмина // Автоматика и вычислительная техника. – 2011. – №1. – С. 43-54.
4. Ерёмина, А.Р. Об инвариантности стационарного распределения вероятностей состояний открытой сети с многорежимными стратегиями обслуживания и разнотипными заявками / А.Р. Ерёмина, Ю.В. Малинковский // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – №4(17). – С. 41-48.
5. Ерёмина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения состояний сетей с многорежимным обслуживанием, разнотипными заявками и «дискриминаторным» разделением процессора / А.Р. Ерёмина, Ю.В. Малинковский // Автоматика и вычислительная техника. – 2012. – №4. – С. 34-46.
6. Ерёмина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения состояний сети с многорежимными стратегиями в случае зависимости параметров процессов обслуживания и переключения от состояния узла / А.Р. Ерёмина // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – №2(11). – С. 76-80.
7. Ерёмина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения состояний неоднородных сетей массового обслуживания с многорежимными стратегиями и дисциплиной DPS / А.Р. Ерёмина // Информатика. – 2012. – №2(34). – С. 98-106.
8. Ерёмина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний замкнутой сети с многорежимными стратегиями обслуживания / А.Р. Ерёмина // Молодёжь в науке – 2011: прил. к журн. «Весці НАН Беларусі» в 5 ч. / Нац. акад. наук Беларусі. Совет молодых учёных НАН

Беларуси; редкол. серии физ.-мат. наук: С.В. Абламейко (гл. ред.), С.Я. Килин [и др.] – Минск: Беларус. навука, 2012. – Ч. 5. Сер. физ.-мат. наук; сер. физ.-техн. наук. – С. 18-23.

9. Ерёміна, А.Р. Инвариантность стационарного распределения состояний замкнутой кусочно-непрерывной сети с многорежимным обслуживанием / А.Р. Ерёміна // Вестник Гродненского государственного университета им. Я. Купалы. Серия 2. – 2013. – №1. – С. 80-85.

### **Статьи в сборниках научных трудов**

10. Ерёміна, А.Р. Стохастическая модель и программная реализация процесса оптимизации функционирования автопредприятия / А.Р. Ерёміна // Современные информационные компьютерные технологии: сб. науч. ст. / ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: А.М. Кадан (отв. редактор) [и др.]. – Гродно: ГрГУ, 2006. – С. 28-34.

11. Ерёміна, А.Р. Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний открытых и замкнутых сетей с многорежимными стратегиями обслуживания, разнотипными заявками и дисциплиной обслуживания LCFS PR / А.Р. Ерёміна // Стохастическое и компьютерное моделирование систем и процессов: сб. науч. ст. / ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: Л.В. Рудикова (гл. ред.) [и др.]. – Гродно: ГрГУ, 2011. – С. 226-231.

### **Статьи в сборниках материалов научных конференций**

12. Ерёміна, А.Р. О применении теории массового обслуживания при решении некоторых задач логистики / А.Р. Ерёміна // Массовое обслуживание: потоки системы, сети: материалы Междунар. науч. конф. «Математические методы повышения эффективности информационно-телекоммуникационных сетей», Гродно, 29 янв. - 1 февр. 2007 г. / редкол.: А.Н. Дудин (отв. ред.) [и др.]. – Минск: РИВШ, 2007. – Вып. 19. – С.84-86.

13. Ерёміна, А.Р. Применение теории массового обслуживания при решении некоторых задач транспортной логистики / А.Р. Ерёміна // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы X Республ. научн. конф. студ. и аспирантов, Гомель, 12-14 марта 2007 г.: в 2 ч / ГГУ им. Ф. Скорины; редкол.: Д.Г. Лин [и др.]. – Гомель, 2007. – Ч. 1. – С. 191-192.

14. Ерёміна, А.Р. Система уравнений Колмогорова для открытой сети массового обслуживания с многорежимной стратегией обслуживания и несколькими типами заявок (с неэкспоненциальным обслуживанием) / А.Р. Ерёміна // Новые математические методы и компьютерные технологии в

проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XI Республ. научн. конф. студ. и аспирантов, Гомель, 17-19 марта 2008 г.: в 2 ч. / ГГУ им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко (гл.ред.) [и др.]. – Гомель, 2008. – Ч. 1. – С. 160-161.

15. Ерёмкина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения сетей с многорежимными стратегиями, разнотипными заявками и дисциплиной обслуживания LCFS / А.Р. Ерёмкина // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XII Республ. научн. конф. студ. и аспирантов, Гомель, 16-18 марта 2009 г.: в 2 ч. / ГГУ им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, 2009. – Ч. 1. – С. 194-195.

16. Ерёмкина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения сетей с многорежимными стратегиями относительно переключения режимов / А.Р. Ерёмкина // Теория вероятностей, математическая статистика и приложения: сб. науч. статей (материалы Междунар. конф., посвящ. 75-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Г.А. Медведева, Минск, 22-25 февр. 2010 г.). / редкол.: Н.Н. Труш (отв.ред.) [и др.]. – Минск: РИВШ, 2010. – Вып. 3. – С. 100-104.

17. Ерёмкина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения открытых сетей с многорежимными стратегиями, разнотипными заявками и дисциплиной обслуживания PS / А.Р. Ерёмкина // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XIII Республ. научн. конф. студ. и аспирантов, Гомель, 15-17 марта 2010 г.: в 2 ч. / ГГУ им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, 2010. – Ч. 1. – С. 17-18.

18. Ерёмкина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения открытой сети с многорежимными стратегиями обслуживания и разнотипными заявками / А.Р. Ерёмкина // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: теория и приложения: сб. науч. ст. 14-й Междунар. конф., Москва, 26-28 октября 2010 г. / Research and Development Company “Information and Networking Technologies”. – Москва, 2010. – С. 245-250.

19. Ерёмкина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения состояний сетей с многорежимными стратегиями / А.Р. Ерёмкина // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети: материалы Междунар. науч. конф. «Современные математические методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей», Минск, 31 янв. - 03 февр. 2011 г. / БГУ; редкол.: А.Н. Дудин (отв. ред.) [и др.]. – Минск: РИВШ, 2011. – Вып. 21. – С. 71-75.

20. Ерёмкина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения состояний открытых сетей массового обслуживания с многорежимными стратегиями / А.Р. Ерёмкина // Информационные технологии и математическое

моделирование (ИТММ-2011): материалы X Всерос. научно-практ. конф. с междунар. участием, Анжеро-Судженск, 25-26 ноября 2011 г. / ТГУ; редкол.: Р.Т. Якупов, А.А. Назаров [и др.]. – Томск: Изд-во ТГУ, 2011. – Ч. 1. – С. 110-115.

21. Ерёмина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения кусочно-непрерывной сети массового обслуживания с многорежимными стратегиями и дисциплиной DPS / А.Р. Ерёмина // Моделирование и анализ информационных систем: труды междунар. научно-практ. конференции, посвященной 35-летию математического ф-та и 25-летию ф-та информатики и вычислит. техники, Ярославль, 6-7 февр. 2012 г. / ЯрГУ им. П.Г. Демидова; редкол.: В.В. Васильчиков (отв. ред.) [и др.]. – Ярославль, 2012. – С. 104-106.

22. Ерёмина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения сети с многорежимными стратегиями и произвольным временем пребывания в режимах / А.Р. Ерёмина // XIV міжнар. наукова конф. ім. академіка М. Кравчука: матеріали конф., Київ, 19-21 квітня 2012 р.: в 4-х томах. – Київ: НТУУ «КПІ», 2012. – Т. 3. Теор. ймовірн. та матем. стат. – С. 50-51.

23. Ерёмина, А.Р. Неоднородные сети с многорежимным обслуживанием и дисциплиной LCFS PR / А.Р. Ерёмина // Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий: материалы Междунар. научно-практ. конф., Сочи, 3-9 мая 2012 г. / Сочинский гос. университет; редкол. редкол.: А.Р. Симонян, Е.И. Улитина. – Сочи: РИЦ ФГБОУ ВПО «СГУ», 2012. – С. 34-35.

24. Ерёмина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения состояний сетей с многорежимным обслуживанием / А.Р. Ерёмина // Проблемы передачи и обработки информации в сетях и системах телекоммуникаций: материалы 17-й Междунар. научно-технич. конф, посвящ. 60-летию РГРТУ, Рязань, 6-8 мая 2012 г.: в 2 ч. / Рязанский гос. радиотехнич. ун-т. – Рязань, 2012. – Ч. 2. – С. 92-94.

25. Ерёмина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний замкнутой неоднородной сети массового обслуживания / А.Р. Ерёмина // Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти – 2012: матеріали I Міжнар. науково-практ. інтернет-конф., Донецьк, 17 травня 2012 р. / Донецький нац. ун-т економіки і торгівлі; редкол.: А.А. Садеков (від.ред.) [та інш.]. – Донецьк: ДонНУЕТ, 2012. – С. 36-38.

26. Ерёмина, А.Р. Сеть с многорежимными стратегиями при произвольных распределениях длительностей обслуживания и переключения / А.Р. Ерёмина // Теория и практика в физико-математических науках: материалы IV Междунар. научно-практ. конф., Москва, 21 мая 2012 г. / редкол.: В.А. Неганов, А.Н. Шелаев. – М.: «Спутник+», 2012. – С. 16-19.

27. Ерёмина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения сетей с

многорежимными стратегиями обслуживания / А.Р. Ерёмина // Математические методы в технике и технологиях (ММТТ-25): сб. трудов XV Междунар. научн. конф., Волгоград, 29-31 мая 2012 г. – Волгоград: Волгогр. гос. техн. ун-т, 2012. – С. 145-148.

### **Тезисы докладов научных конференций**

28. Ерёмина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения сетей с многорежимными стратегиями и дисциплиной обслуживания LCFS с дообслуживанием относительно времени обслуживания / А.Р. Ерёмина // X Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. конф., Минск, 3-7 ноября 2008 г. / ИМ НАН РБ. – Минск, 2008. – Ч. 5. – С. 7-8.

29. Ерёмина, А.Р. Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний замкнутой сети массового обслуживания с многорежимными стратегиями / А.Р. Ерёмина, Ю.В. Малинковский // Современные задачи прикладной статистики, промышленной, актуарной и финансовой математики: тезисы докладов VI междунар. научно-практ. конф. студ., аспирантов и молодых учёных, посвящённых 75-летию Донецкого нац. ун-та, Донецк, 9-11 апреля 2012 г. / ДонНУ; редкол.: Б.В. Бондарев, Е.Ю. Рагулина. – Донецк, 2012. – С. 6.

## РЭЗІЮМЭ

**Яроміна Аляксандра Рафаэлаўна**

### **Інварыянтнасць стацыянарнага размеркавання сетак са шматрэжымнымі стратэгіямі абслугоўвання і рознатыповымі заяўкамі**

**Ключавыя словы:** сетка масавага абслугоўвання (МА), інварыянтнасць, шматрэжымныя стратэгіі, рознатыповыя заяўкі, стацыянарнае размеркаванне імавернасцей станаў, LCFS PR, DPS.

**Мэтай працы** з’яўляецца доказ інварыянтнасці (незалежнасці) стацыянарнага размеркавання сетак з шматрэжымнымі стратэгіямі і рознатыповымі заяўкамі адносна выгляду функцый размеркавання колькасці працы, неабходнай для абслугоўвання заяўкі, якая паступае ў вузел, і функцый размеркавання колькасці працы, неабходнай для пераключэння рэжымаў прыбораў у вузлах.

**Метады даследвання.** У працы ўжываліся метады тэорыі імавернасцей, тэорыі маркаўскіх працэсаў, тэорыі МА. Даследаванні засноўваліся на метадзе дадатковых пераменных і метадзе лакальнага балансу.

**Атрыманыя вынікі і навізна.** Для адчыненых і замкнёных сетак МА з шматрэжымнымі стратэгіямі і рознатыповымі заяўкамі:

1. Усталявана інварыянтнасць стацыянарнага размеркавання імавернасцей станаў адносна функцый размеркавання колькасці працы, неабходнай для абслугоўвання заявак, у выпадку, калі дысцыпліна абслугоўвання з’яўляецца “неадкладнай”.

2. Усталявана інварыянтнасць стацыянарнага размеркавання імавернасцей станаў адносна функцый размеркавання колькасці працы, неабходнай для пераклучэння рэжыму функцыянавання прыбора, у выпадку, калі хуткасць выканання азначанай працы залежыць ад колькасці рэшткавай працы.

3. Усталявана інварыянтнасць стацыянарнага размеркавання імавернасцей станаў адносна функцый размеркавання колькасці працы, неабходнай для абслугоўвання заяўкі, і функцый размеркавання колькасці працы, неабходнай для пераклучэння рэжыму функцыянавання прыбора, у выпадку, калі дысцыпліна абслугоўвання з’яўляецца “неадкладнай”.

**Рэкамендацыі па выкарыстанні і галіна ўжывання.** Атрыманыя вынікі могуць быць выкарыстаны пры вырашэнні шырокага кола прыкладных задач, звязаных з мадэліраваннем і эксплуатацыяй розных рэальных праектаў і палягчаюць знаходжанне стацыянарных размеркаванняў імавернасцей станаў сетак.

## РЕЗЮМЕ

Ерёмина Александра Рафаэловна

### **Инвариантность стационарного распределения в сетях с многорежимными стратегиями обслуживания и разнотипными заявками**

**Ключевые слова:** сеть массового обслуживания (МО), инвариантность, многорежимные стратегии, разнотипные заявки, стационарное распределение вероятностей состояний, LCFS PR, DPS.

**Целью работы** является доказательство инвариантности (независимости) стационарного распределения открытых и замкнутых сетей с многорежимными стратегиями обслуживания и разнотипными заявками относительно вида функций распределения количества работы, необходимого для обслуживания поступающей в узел заявки, и (или) функций распределения количества работы, необходимого для переключения режимов приборов в узлах.

**Методы исследования.** В работе использовались методы теории вероятностей, теории марковских процессов, теории МО. Исследования основывались на методе дополнительных переменных и методе локального баланса.

**Полученные результаты и их новизна.** Для открытых и замкнутых сетей МО с многорежимными стратегиями и разнотипными заявками:

1. Установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний относительно функций распределения количества работы, необходимого для обслуживания заявок, в случае, когда дисциплина обслуживания является «немедленной».

2. Установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний относительно функций распределения количества работы, необходимого для переключения режима прибора, в случае, когда скорость выполнения указанной работы зависит от количества остаточной работы.

3. Установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний относительно функций распределения количества работы, требующегося для обслуживания заявки, и функций распределения количества работы, необходимого для переключения режима прибора, в случае, когда дисциплина обслуживания является «немедленной».

**Рекомендации по использованию и область применения.** Полученные результаты могут быть использованы при решении прикладных задач, связанных с моделированием и эксплуатацией различных реальных объектов и облегчают нахождение стационарных распределений вероятностей состояний сетей.

## SUMMARY

**Aleksandra R. Yeryomina**

### **Invariance of stationary distribution of queuing networks with multimode servicing strategies and polytypic demands**

**Keywords:** queueing network, insensitivity, multimode strategies, polytypic demands, stationary distribution of state probabilities, LCFS PR, DPS.

**The purpose of the work** is determination of the insensitivity (independence) of stationary distribution of open and closed queueing networks with multimode strategies and polytypic demands in relation to a type of distribution functions of work quantity, which is necessary for servicing of incoming demand, and (or) distribution functions of work quantity, which is necessary for switching of strategies of devices in units.

**The method of investigation.** In work were used methods of probability theory, Markov processes theory, queueing theory. The researches were based on the methods of additional variables and local balance.

**Following results and their novelty.** For open and closed queueing networks with multimode strategies and polytypic demands:

1. The insensitivity of the stationary distribution of state probabilities is established in relation to distribution functions of work quantity, which is necessary for servicing of demands, when dispatching rule is “immediate”.

2. The insensitivity of the stationary distribution of state probabilities is established in relation to distribution functions of work quantity, which is necessary for switching of device work strategy, when rate of that work execution depends on residual work quantity.

3. The insensitivity of the stationary distribution of state probabilities is established in relation to distribution functions of work quantity, which is necessary for servicing of demands, and distribution functions of work quantity, which is necessary for switching of device work strategy, when dispatching rule is “immediate”.

**Recommendations for the use and sphere of application.** The results can be used to solve problems related to the modeling and exploitation of various real objects and easier to find the stationary distributions of state probabilities of queueing networks.