УДК 512.534

Описание конгруэнций на некоторых подполугруппах полугруппы линейных отношений

М.И. Наумик

Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Линейные отношения являются обобщением понятия линейного преобразования. Мультипликативная полугруппа линейных отношений содержит полугруппу линейных преобразований. Рассматриваем произвольное векторное пространство над телом. Ранее автором были описаны все конгруэнции на полугруппе линейных отношений. Сейчас рассматриваются все главные идеалы этой полугруппы линейных отношений.

В данной работе дано описание строения конгруэнций на подполугруппе $LR_\zeta(V)$ полугруппы линейных отношений векторного пространства над телом. Установлены связи между конгруэнциями на полугруппе LR(V) и конгруэнциями на полугруппе $LR_\zeta(V)$. Используя этот результат и описаны конгруэнции на полугруппе $LR_\zeta(V)$. Данная работа обобщает результат академика А.И. Мальцева о мультипликативных сравнениях матриц, где дано описание конгруэнций на мультипликативной полугруппе матриц над полем. Эта работа также обобщает результат Т.Н. Шарановой о конгруэнциях на полугруппе линейных преобразований произвольного векторного пространства над телом.

Ключевые слова: *конгруэнция конечного и бесконечного индекса, подполугруппа, линейные отношения, ранг линейного отношения.*

Description of the congruencies in some subsemigroups of semigroup of linear relations

M.I. Naumik

Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

Linear relations are generalization of linear transformation. Multiplicative semigroup of linear relations contains semigroup of linear transforms. We consider arbitrary vector space over skew field. All congruencies on a semigroup of linear relations were described earlier by author. Now all main ideals of this semigroup of linear relations are considered.

The research gives description of congruencies in subsemigroup $LR_\zeta(V)$ of semigroup linear relations of vector space above the body. The connections between the congruencies of the semigroup LR(V) and the congruencies of the semigroup $LR_\zeta(V)$ are found out. Using this result the congruencies of the semigroup $LR_\zeta(V)$ are described. This work generalizes a famous result of Academician A.I. Malcev about multiplicative comparison of matrices, where the description of the congruencies of the multiplicative semigroup of matrices over the field is given. This work also generalizes the result of T.N. Sharanova about the congruencies of the semigroup of linear transformations of arbitrary vector space of the skew field.

Key words: *congruence of finite and infinite index, subsemigroup, semigroup, linear relations, range of linear relations.*

В работе [1] автором были описаны все конгруэнции полугруппы линейных отношений векторного пространства над телом. В ней были найдены связи между конгруэнциями на полугруппе линейных преобразований и полугруппе линейных отношений, а также связи между конгруэнциями на подполугруппе всех взаимно однозначных линейных отношений и полугруппе линейных отношений.

В данной работе автором описываются связи между конгруэнциями на подполугруппе $LR_\zeta(V)$ полугруппы линейных отношений и конгруэнциями самой полугруппы линейных отношений. Используя это, автор дает описание всех конгруэнций на подполугруппе $LR_\zeta(V)$ полугруппы линейных отношений.

Все определения и обозначения см. в [1–3].

Пусть V – левое векторное пространство над произвольным телом F. Бинарное отношение $a \subseteq V \times V$ между элементами множества V называется линейным, если оно является подпространством $V \oplus V$. Другими словами, линейное отношение a – это множество пар $(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{x}, \bar{y} \in V$, замкнутое относительно операций сложения и умножения на элементе из F: если $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in a$ и $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \in a$ при каких-либо $\bar{x}_i, \bar{y}_i \in V$, то $(\alpha\bar{x}_i, \beta\bar{y}_i, \alpha\bar{y}_2 + \beta\bar{y}_2) \in a$ для любых $\alpha, \beta \in F$.

Множество $LR(V)$ всех линейных отношений на пространстве V является, как известно, полугруппой относительно операции умножения бинарных отношений: для $a, b \in LR(V)$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in ab$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\bar{z} \in V$, что $(\bar{x}, \bar{z}) \in a$ и $(\bar{z}, \bar{y}) \in b$.

При изучении линейных отношений $a \in LR(V)$ будем рассматривать следующие подпространства V:

$$pr_1 a = \{\bar{x} \in V : \exists \bar{y} \in V, (\bar{x}, \bar{y}) \in a\},$$

Репозиторий ВГУ

$$\ker a \ \{\bar{x} \in V : (\bar{x}, \bar{0}) \in a\};$$
$$pr_2 a = \{\bar{y} \in V : \exists\, \bar{x} \in V, (\bar{x}, \bar{y}) \in a\},$$
$$\operatorname{coker} a \ \{\bar{y} \in V : (\bar{0}, \bar{y}) \in a\}.$$

Ранг линейного отношения $a \in LR(V)$ определяется формулой:

$$\operatorname{rank} a = \dim (pr_1 a / \ker a).$$

Множество $LR_\zeta(V) = \{a : a \in LR(V), \operatorname{rank} a < \zeta\}$ является подполугруппой полугруппы $LR(V)$ и даже идеалом этой полугруппы $LR(V)$ линейных отношений.

Для получения основных результатов нашей работы сформулируем несколько лемм, доказательство которых легко получить непосредственной проверкой.

Пусть δ – конгруэнция на полугруппе $LR_\zeta(V)$.

Лемма 1. *Если* a, $b \in LR_\zeta(V)$, $a\delta b$, $\operatorname{rank} a < \operatorname{rank} b = \mu$, *то* $\mu < \eta(\delta)$.

Лемма 2. *Если* $a, b \in LR_\zeta(V)$, δ *– конгруэнция конечного индекса на полугруппе* $LR_\zeta(V)$, $a\delta b$, $\operatorname{rank} a \geq \eta(\delta)$, *то существуют такие* c, $d \in D_n$, *что* $a, b \in cN_e d$ *или* $a, b \in D_\mu$ $(\mu > \eta(\delta))$ *и* $b = \alpha a$ *при некотором* $\alpha \in Q_\mu$.

Лемма 3. *Пусть* δ *– конгруэнция бесконечного индекса на полугруппе* $LR_\zeta(V)$, $a\delta b$ *и* $\operatorname{rank} a \geq \eta(\delta)$, *тогда выполняются неравенства*

$$\dim(pr_1 a / pr_1 a \cap pr_1 b) < \nu_i,$$
$$\dim(pr_1 b / pr_1 a \cap pr_1 b) < \nu_i,$$
$$\dim(pr_2 a / pr_2 a \cap pr_2 b) < \nu_i,$$
$$\dim(pr_2 b / pr_2 a \cap pr_2 b) < \nu_i.$$

Основные результаты работы.

Сформулируем теорему, которая устанавливает связь между конгруэнцией на полугруппе $LR_\zeta(V)$ и конгруэнцией на полугруппе $LR(V)$.

Теорема 1. *Пусть* ρ *– наименьшая конгруэнция на полугруппе* $LR(V)$, *содержащая конгруэнцию* δ *подполугруппы* $LR_\zeta(V)$, τ *– отношение равенства на полугруппе* $LR(V)$. *Тогда* $\rho = \delta \cup \tau$.

Доказательство. Достаточно показать, что из $(a, b) \in \delta$ и c, $d \in LR(V)$ следует $(cad, cbd) \in \delta$.

Пусть $\operatorname{rank} a < \eta(\delta)$, тогда в силу леммы 1 $rank\ b < \eta(\delta)$. Следовательно, $\operatorname{rank} (cad)$, $\operatorname{rank} (cbd) < \eta(\delta)$, т.е. $cad \equiv w_A w_C^{-1}$ (δ) и $cbd \equiv w_B w_D^{-1}$ (δ). Отсюда в силу транзитивности δ и $w_A w_C^{-1} \equiv w_B w_D^{-1}$ (δ) получим $cad \equiv cbd(\delta)$.

Пусть теперь $\operatorname{rank} a = \mu$, $\mu \geq \eta(\delta)$ и пусть e – некоторое линейное отношение, тождественное на каком-нибудь прямом дополнении подпространства $\ker a \cap \ker b = ker\ e$ в пространстве $pr_1 b + pr_1 b$, g – тождественное линейное отношение на каком-нибудь прямом дополнении подпространства $\operatorname{coker} a \cap \operatorname{coker} b = \operatorname{coker} d$ в пространстве $pr_2 b + pr_2 b$. В силу леммы 2, в случае конечного индекса конгруэнции δ, и в силу леммы 3 в случае бесконечного индекса конгруэнции δ, из $\mu \geq \eta(\delta)$ и определения линейных отношений e и g получим $\operatorname{rank} e = \mu$, $\operatorname{rank} g = \mu$. Кроме того, имеем $ea = a$, $eb = b$, $ag = a$, $bg = b$. Умножая обе части сравнения $a \equiv b(\delta)$ слева на $ce \in LR_\zeta(V)$ и справа на $gd \in LR_\zeta(V)$, мы получим $ceagd \equiv cebgd(\delta)$. Отсюда, учитывая предыдущие равенства, имеем $cad \equiv cbd(\delta)$.

Значит, $\rho = \delta \cup \tau$. Теорема доказана.

Используя эту теорему, дадим непосредственное описание конгруэнций на подполугруппе $LR_\zeta(V)$ линейных отношений.

Пусть n – целое положительное число, ν, ν' – кардинальные числа равные 1 (при $n = 1$) или превосходящие $\aleph_0$ при любом n; Q_μ $(n + 1 \leq \mu \leq \zeta \leq \dim V)$ – подгруппы группы Z^*, удовлетворяющие условию $Q_{\mu'} \subseteq Q_\mu$ при $\mu \leq \mu'$. Пусть, далее, e – идемпотент некоторого H-класса $H_e \subset D_n$, N_e – нормальный делитель группы H_e такой, что $Q_{n+1} e \subseteq N_e$. Определим отношение δ на полугруппе $LR_\zeta(V)$ следующим образом: $a\delta b$ тогда и только тогда, когда

$a, b \in LR_n(V)$ и $\dim(pr_1 a / (pr_1 a \cap pr_1 b)) < \nu$,
$\dim(pr_1 b / (pr_1 a \cap pr_1 b)) < \nu$,
$\dim(pr_2 a / (pr_2 a \cap pr_2 b)) < \nu'$,
$\dim(pr_2 b / (pr_2 a \cap pr_2 b)) < \nu'$;

$a, b \in D_n$ и существуют такие c, $d \in D_n$, что $a, b \in cN_e d$ или $a, b \in D_\mu$ $(n < \mu \leq \zeta \leq \dim V)$ и $b = \alpha a$ при некотором $\alpha \in Q_\mu$.

Пусть k – натуральное число, ν_i, μ_i $(i = 1, \ldots, k)$, ν, ν' – кардинальные числа, удовлетворяющие условиям:

1) $\nu_k < \nu_{k-1} < \ldots < \nu_1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k \leq \zeta \leq \dim V = \mu_{k+1}$;

2) все ν_i и μ_i бесконечны за исключением, быть может, ν_k, если ν_k конечно, то $\nu_k = 0$;

3) $\mu_1 \leq \nu$, $\mu_1 \leq \nu'$.

Пусть, далее, Q_μ $(\mu_1 \leq \mu \leq \zeta \leq \dim V)$ – ненулевые мультипликативные подгруппы центра тела F такие, что $Q_\mu \subseteq Q_{\mu'}$ при $\mu' \leq \mu$. Определим следующее отношение σ на полугруппе $LR_\zeta(V)$:

$a\sigma b$ тогда и только тогда, когда
$a, b \in LR_{\mu_1}(V)$ и $\dim(pr_1 a / (pr_1 a \cap pr_1 b)) < \nu$,
$\dim(pr_1 b / (pr_1 a \cap pr_1 b)) < \nu$,
$\dim(pr_2 a / (pr_2 a \cap pr_2 b)) < \nu'$,

Репозиторий ВГУ

$\dim(pr_2b / (pr_2a \cap pr_2b)) < \nu'$, или

$a, b \in D_\mu$ $(\mu_i \le \mu < \mu_{i+1})$,

$b'_{pr_1a \cap pr_1b} = \alpha\, a'_{pr_1a \cap pr_1b} + f,\ b''_{pr_2a \cap pr_2b} =$

$= \alpha^{-1} a''_{pr_2a \cap pr_2b}{}^{\bullet} + f_1$ при некоторых $\alpha \in Q_\mu$, f, $f_1 \in LR_{\nu_i}(V)$ $(pr_1f = pr_1a \cap pr_1b$, $\operatorname{coker} f = \{\bar{0}\}$,

$pr_2f_1 = pr_2a \cap pr_2b$, $\ker f_1 = \{\bar{0}\})$,

$b' = <(\bar{x}, \bar{y}) : \bar{y} \in V_2^{'}, (\bar{x}, \bar{y}) \in b>$,

$b'' = <(\bar{x}, \bar{y}) : \bar{x} \in V_1^{'}, (\bar{x}, \bar{y}) \in b>$,

$a' = <(\bar{x}, \bar{y}) : \bar{y} \in V_2, (\bar{x}, \bar{y}) \in a>$,

$a'' = <(\bar{x}, \bar{y}) : \bar{x} \in V_1, (\bar{x}, \bar{y}) \in a>$,

$pr_1a = \ker a \oplus V_1$, $pr_2a = \operatorname{coker} a \oplus V_2$,

$pr_1b = \ker b \oplus V_1^{'}$, $pr_2b = \operatorname{coker} b \oplus V_2^{'}$, где V_1, V_2, $V_1^{'}$, $V_2^{'}$ – некоторые прямые дополнения пространства $\ker a$, $\operatorname{coker} a$, $\ker b$, $\operatorname{coker} b$ в pr_1a, pr_2a, pr_1b, pr_2b соответственно и

$\dim(pr_1a / (pr_1a \cap pr_1b)) < \nu_i$,

$\dim(pr_1b / (pr_1a \cap pr_1b)) < \nu_i$,

$\dim(pr_2a / (pr_2a \cap pr_2b)) < \nu_i$,

$\dim(pr_2b / (pr_2a \cap pr_2b)) < \nu_i$.

Теорема 2. *Отношение* δ *является конгруэнцией конечного индекса на полугруппе* $LR_\zeta(V)$, *отношение* σ *– конгруэнцией бесконечного индекса. Обратно, всякая конгруэнция конечного индекса совпадает с одним из отношений типа* δ, *всякая конгруэнция бесконечного индекса совпадает с одним из отношений типа* σ.

Доказательство. Известно, что ограничение произвольной конгруэнции ρ полугруппы S на некоторой подполугруппе $S_1 \in S$ $\rho \cap (S_1 \times S_1)$ есть конгруэнция.

Из теоремы 1 следует, что всякая конгруэнция на полугруппе $LR_\zeta(V)$ является ограничением на полугруппе $LR_\zeta(V)$ некоторой конгруэнции ρ полугруппы $LR(V)$. Отсюда и из теоремы 3 работы автора [1] вытекает доказательство данной теоремы.

Заключение. В данной работе установлена связь между конгруэнциями на подполугруппе $LR_\zeta(V)$ полугруппы $LR(V)$ и конгруэнциями на полугруппе $LR(V)$ линейных отношений. Используя это, мы получили описание конгруэнций на подполугруппе $LR_\zeta(V)$ полугруппы $LR(V)$ линейных отношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наумик, М.И. Полугруппа линейных отношений / М.И. Наумик // Доклады НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 3. – С. 34–37.
2. Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп / А. Клиффорд, Г. Престон. – М., 1972. – Т. 1. – 286 с.
3. Артамонов, В.А. Общая алгебра / В.А. Артамонов [и др.]; под общ. ред. Л.А. Скорнякова. – М.: Наука, 1991. – Т. 2. – 480 с.

Поступила в редакцию 11.02.2011. Принята в печать 26.02.2011

Адрес для корреспонденции: 210041, г. Витебск, ул. Чкалова, д. 47, корп. 2, кв. 34, e-mail: naumik@tut.by – Наумик М.И.

Репозиторий ВГУ