УДК 519.7

Метод внутренней точки для задачи идентификации напорной характеристики центробежного насоса

А.А. Царев
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Различные методы оптимизации являются главным инструментом при решении многих прикладных задач исследования операций, управления и идентификации. Но часто их использование в данном случае ограничено малой эффективностью методов и большими вычислительными затратами. При оперативном управлении и диагностике состояния нефтепроводов часто возникают задачи идентификации, в большинстве своем связанные с проблемами нелинейной оптимизации. Достижения последних двадцати лет в этой области математики позволяют значительно упростить некоторые методы идентификации и ускорить процесс расчета по ним. Это дает возможность создавать эффективные алгоритмы, работающие в системах реального времени. В работе рассматривается задача идентификации напорной характеристики центробежного насоса. Предложен новый эффективный метод идентификации напорной характеристики центробежного насоса, основанный на применении метода внутренней точки.

Ключевые слова: *идентификация, нелинейная оптимизация, метод внутренней точки, трубопроводный транспорт, напорная характеристика насоса.*

Interior point method for the problem of identification of the pressure head characteristic of the centrifugal pump

A.A. Tsarev
Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Various methods of optimization is the main tool in solving a lot of applied research problems of operations, management and identification. However their use in the given concrete case is frequently limited by small efficiency of methods and big calculation expenditures. At operative management and diagnostics of the condition of oil pipelines there are often problems of identification, in the majority of cases connected with problems of nonlinear optimization. Achievements of the last twenty years in this area of mathematics make it possible to simplify considerably some methods of identification and to accelerate the process of their calculation. It enables to create the effective algorithms which work in the systems of real time. This article describes the application of the interior-point method for the problems of identification in pipeline systems. New efficient method of of the identification of the pressure head characteristic of pumps based on the application of interior point method is presented.

Key words: *identification, nonlinear optimization, interior point method, pipeline systems, pressure head characteristic of pumps.*

В настоящее время решение прикладных задач трубопроводного транспорта не обходится без применения сложных математических методов, которые зачастую требуют колоссальных вычислительных затрат. При оперативном управлении и диагностике состояния нефтепроводов нередко возникают задачи идентификации, в большинстве своем связанные с проблемами нелинейной оптимизации. Достижения последних двадцати лет, сделанные в этой области математики, позволяют значительно упростить некоторые методы идентификации и ускорить процесс расчета по ним. Это дает возможность создавать эффективные алгоритмы, работающие в системах реального времени. *Основная цель настоящей работы* – нахождение алгоритма для определения напорной характеристики магистрального центробежного насоса посредством метода внутренней точки для задач нелинейной выпуклой оптимизации.

Постановка задачи. Напорная характеристика насоса при заданных оборотах z и конкретном значении диаметра ходового колеса D представляет собой некоторую функцию, выражающую зависимость создаваемого насосом напора H от текущего расхода Q [1]. На практике определить явный вид этой функции не удается, поэтому в трубопроводном транспорте для технологических расчетов используют аналитическую аппроксимацию данной зависимости [1]. Исходя из этого, будем определять напорную характеристику насоса как

$$H(Q) = z^2 D^2 P_n(\frac{Q}{zD}), \tag{1}$$

где $P_n(x)$ – аппроксимирующий многочлен от x степени n.

В проектной практике в качестве аппроксимирующей часто используют квадратичную зависимость [2]:

$$\frac{H(Q)}{z^2D^2} = A_0 + A_1\frac{Q}{zD} + A_2\left(\frac{Q}{zD}\right)^2, \qquad (2)$$

здесь A_0, A_1, A_2 – коэффициенты многочлена P_2 из (1).

Для более точной аппроксимации будем использовать многочлены более высокого порядка:

$$\frac{H(Q)}{z^2D^2} = A_0 + A_1\frac{Q}{zD} + A_2\left(\frac{Q}{zD}\right)^2 + ... + A_n\left(\frac{Q}{zD}\right)^n. \quad (3)$$

Для определения коэффициентов A_i можно использовать метод наименьших квадратов в явном виде. Однако формально определенная таким образом функция может иметь в рабочей области насоса экстремумы, не соответствующие физической природе. При аппроксимации следует учесть тот факт, что реальная напорная характеристика является строго убывающей функцией во всем рабочем диапазоне, т.е. производная $H'(Q) < 0$ для всех возможных объемов перекачки Q.

Решение задачи. Опишем, как решать подобную задачу. Пусть даны экспериментальные точки (Q_i, H_i), где $i = 1, \ldots, m$, и требуется определить полином степени n, аппроксимирующий зависимость $H(Q)$, т.е.

$$H(Q) = a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + ... + a_nQ^n.$$

Сформируем следующие матрицы:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & Q_1 & Q_1^2 & ..... & Q_1^n \\ 1 & Q_2 & Q_2^2 & ..... & Q_2^n \\ .... & .... & ..... & ..... & ..... \\ 1 & Q_m & Q_m^2 & ..... & Q_m^n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = [H_1 H_2 ... H_m]^T.$$

Далее решим задачу для $n = 2$, т.е. найдем вектор $\mathbf{A} = [a_0\ a_1\ a_2]^T$ из условия

$$\|\mathbf{CA} - \mathbf{H}\|^2 \to \min. \qquad (4)$$

Решение (4) определяется выражением

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^T\mathbf{H}, \qquad (5)$$

что и дает метод наименьших квадратов в явном виде.

Далее, зная «грубую» аппроксимацию, определим правую границу Q^* области $[0,Q^*]$, в которой производная искомого полинома должна быть отрицательна. Q^* есть положительное решение квадратного уравнения

$$a_0 + a_1Q + a_2Q^2 = 0, \text{ т.е.}$$

$$Q^* = \max\left(\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}\right). \qquad (6)$$

После определения «рабочей области» можно приступить к решению задачи для произвольного n. Для этого требуется дополнительно ввести матрицу

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & q_1 & q_1^2 & ..... & q_1^{n-1} \\ 0 & 1 & q_2 & q_2^2 & ..... & q_2^{n-1} \\ 0 & .... & .... & ..... & ..... & ..... \\ 0 & 1 & q_k & q_k^2 & ..... & q_k^{n-1} \end{bmatrix},$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_k$ – равномерно распределенные на отрезке $[0,\ Q^*]$ значения, $k > m$. Тогда задачу идентификации можно записать в следующем виде:

$$\|\mathbf{CA} - \mathbf{H}\|^2 \to \min, \qquad (7)$$

$$\mathbf{BA} \le \mathbf{0}, \qquad (8)$$

где $\mathbf{A} = [a_0 a_1 .... a_n]^T$ – искомый вектор коэффициентов.

Условие (8) при достаточно большом k гарантирует убывание (точнее, невозрастание) аппроксимирующей функции на отрезке $[0, Q^*]$.

Задача (7), (8) относится к классу задач нелинейного программирования, подробно описанных в [3]. Проблеме нелинейной выпуклой оптимизации при наличии ограничений посвящено довольно много работ, однако какого-либо универсального метода решения с приемлемыми в практике сходимостью и сложностью не существует. Для подобных задач наиболее перспективными являются алгоритмы, основанные на методе Ньютона [3]. Для решения поставленной задачи автором выбран метод внутренней точки, предложенный Нестеровым и Немировским в 1994 году [4]. Суть метода заключается в использовании барьерных функций, сводящих задачу с ограничениями к безусловной, решаемой в дальнейшем демпфированным методом Ньютона. Нестеров и Немировский ввели класс самосогласованных функций. Это три раза дифференцируемые выпуклые функции, определенные на выпуклом множестве $D \subset \boldsymbol{R}^n$, удовлетворяющие свойству

$$\left|\nabla^3 f(x)[h,h,h]\right| \le 2(\nabla^2 f(x)[h,h])^{\frac{3}{2}}, \quad \forall x \in D, \quad h \in \boldsymbol{R}^n .$$

Приведенная формула включает вторые и третьи производные f и их действие на вектор $h \in \boldsymbol{R}^n$. В более простом виде она может быть записана с помощью производных скалярной функции

$$\varphi(t) = (x + th):$$

$$\left|\varphi'''(0)\right| \le 2(\varphi''(0))^{\frac{3}{2}}, \quad \forall x \in D, \quad h \in \boldsymbol{R}^n .$$

Для $x_k \in D$ определим ньютоновский декремент

$$\delta_k = \sqrt{\nabla f(x_k)^{\mathrm{T}} (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)} .$$

Тогда вариант Нестерова–Немировского демпфированного метода Ньютона для решения задачи безусловной минимизации функции $f(x)$ выглядит так:

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k), \quad k = 0,1,..., \tag{9}$$

$$\lambda_k = 1, \text{ если } \delta_k \le \frac{1}{4}, \tag{10}$$

$$\lambda_k = \frac{1}{1+\delta_k}, \text{ если } \delta_k \le \frac{1}{4}. \tag{11}$$

В [3–4] доказано, что данный метод при сделанных предположениях имеет полиномиальную сложность (скорость сходимости).

Перейдем к применению этого алгоритма для решения конкретных выпуклых задач оптимизации. Основная схема метода внутренней точки выглядит следующим образом: см. [4]. Для задачи

$$\min f(x), \; x \in Q \tag{12}$$

с выпуклой самосогласованной f и выпуклой $Q \in \boldsymbol{R}^n$ строится самосогласованный барьер $F(\mathrm{x})$, определенный на внутренности Q и растущий к бесконечности, когда точка приближается к границе Q:

$$F : \operatorname{int} Q \to \boldsymbol{R}^1, \; F(x) \to \infty \text{ для } x \to \partial Q.$$

Такие барьеры существуют для многих ограничений, например, если $Q = \{x : x \ge 0\}$, тогда годится логарифмический барьер:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} -\ln x_i \; .$$

Используя данные барьеры, можно построить штрафную функцию

$$f_k(x) = t_k f(x) + F(x),$$

зависящую от параметра $t_k > 0$. При естественных предположениях можно доказать, что $f_k(x)$ имеет точку минимума x_k^* на Q и $f(x_k^*) \to f^*$ (минимальное значение в (12)), когда $t_k \to \infty$ (это так называемый *центральный путь*). Однако нет необходимости находить x_k^* точно, достаточно сделать один шаг метода (9)–(11) и затем увеличить t_k. Существуют различные способы настройки параметров λ_k, t_k, при которых метод имеет полиномиальную сложность: см. [4–5].

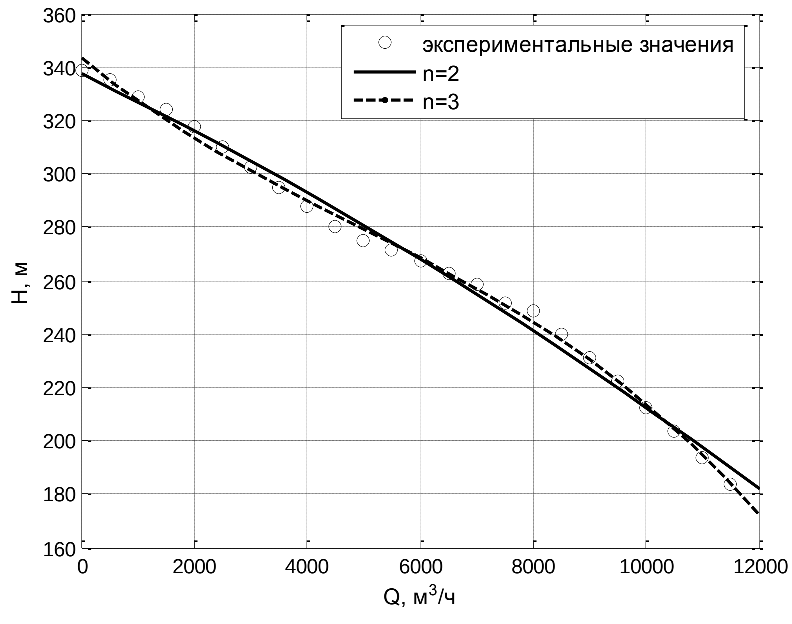

Рис. **Аппроксимация напорной характеристики насоса НМ 10000–210.**

Применим алгоритм для поставленной задачи идентификации напорной характеристики насоса. Барьерная функция для ограничения (8) выглядит следующим образом:

$$F(\mathbf{A}) = -\sum_{i=1}^{k} \ln(-\mathbf{B}_i \mathbf{A}), \qquad (13)$$

где $\mathbf{B}_i$ – i-ая строка матрицы **B.**

Заметим, что целевая функция в (7) $f(\mathbf{A}) = \|\mathbf{CA} - \mathbf{H}\|^2$ так же, как и функция в (13), является самосогласованной. Последнее дает возможность применить изложенный вариант метода внутренней точки для рассматриваемой задачи, сохраняя утверждения о быстрой сходимости алгоритма.

Заключение. По описанной методике были определены коэффициенты квадратного и кубического полиномов напорной характеристики насоса НМ 10000–210. На рис. выколотыми точками обозначены экспериментальные значения паспортной характеристики насоса, которая имеет перегиб в рабочей зоне ($Q \approx 6000$). Квадратичная аппроксимация ($n = 2$) сглаживает эту особенность, что приводит к явному отклонению от реальной характеристики (рис.). Абсолютная погрешность аппроксимации в оптимальной зоне (8–12 тыс. м куб./ч) достигает 8 метров, что часто является неприемлемым. В этом случае лучший результат дает кубическая аппроксимация ($n = 3$). Погрешность не превышает 1,9 метра по абсолютной величине. При этом фиксируется точка перегиба и сохраняется строгое убывание характеристики в рабочей зоне насоса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье, М.В. Математическое моделирование процессов трубопроводного транспорта нефти, нефтепродуктов и газа / М.В. Лурье. – М.: Нефть и газ, 2003. – 336 с.
2. Вайншток, С.М. Трубопроводный транспорт нефти / С.М. Вайншток. – М.: Недра-Бизнесцентр, 2002. – Т. 1. – 408 с.
3. Поляк, Б.Т. Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике / Б.Т. Поляк // Труды ИСА РАН. – 2006. – Т. 28. – С. 48–66.
4. Nemirovski, A. Interior-point methods for optimization / A. Nemirovski, M. Todd // Acta Numerica. – 2008. – Vol. 17. – P. 191–234.
5. Nesterov, Yu. Cubic regularization of Newton method and its global performance / Yu. Nesterov, B. Polyak // Mathematical Programming. Ser. A. – 2006. – No. 108. – P. 177–205.

Поступила в редакцию 23.03.2011. Принята в печать 29.04.2011
Адрес для корреспонденции: 210029, г. Витебск, Московский пр-т, д. 64, кв. 164, e-mail: andr_king@mail.ru – Царев А.А.