УДК 512.548

Полиадические операции на множестве пространственных матриц

А.М. Гальмак

Учреждение образования «Могилевский государственный университет продовольствия»

В статье рассматриваются трехмерные матрицы, у которых, по крайней мере, два размера совпадают. Для произвольного целого $l \geq 3$, любой подстановки σ из S_m и любой ориентации $r \in \{i, j, k\}$ на множестве всех трехмерных матриц над ассоциативным кольцом P, у которых размер, соответствующий индексу r, равен m, а два оставшихся размера могут отличаться от m, но совпадают, определяется l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,m}^{(r)}$. Изучаются свойства полиадических операций $[\ ]_{l,\sigma,m}^{(i)}$, $[\ ]_{l,\sigma,m}^{(j)}$ и $[\ ]_{l,\sigma,m}^{(k)}$. В частности, показано, что если подстановка $\sigma \in S_m$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то они ассоциативны.

Ключевые слова: *матрица, операция, полугруппа, алгебра.*

Polyadic operations on the set of spacematrices

A.M. Galmak

Educational establishment «Mogilev State University of Food Technologies»

This article is about three-dimensional matrixes in which two sizes coincided at least. For the any whole $l \geq 3$, any substitution σ from S_m and any orientation $r \in \{i, j, k\}$ on set of all three-dimensional matrixes above associative ring P, in which the size appropriating an index r, is equal m, and two remained sizes can differ from m, but coincide, the l operation $[\ ]_{l,\sigma,m}^{(r)}$ is defined. Properties of polyadic operations $[\ ]_{l,\sigma,m}^{(i)}$, $[\ ]_{l,\sigma,m}^{(j)}$ u $[\ ]_{l,\sigma,m}^{(k)}$ are studied. It is shown, that if substitution $\sigma \in S_m$ satisfies the condition $\sigma^l = \sigma$, they are associative.

Key words: *matrix, operation, semigroup, algebra.*

Для p-мерной матрицы A порядка n и квадратной матрицы a того же порядка n может быть определено [1−2] произведение $A\{i_\alpha\}a$ по индексу i_α ($\alpha = 1, \ldots, p$), которое является p-мерной матрицей порядка n. В частности, в трехмерном случае для каждого из трех индексов i, j, k определены произведения $A\{i\}a$, $A\{j\}a$, $A\{k\}a$ трехмерной матрицы A порядка n на обычную матрицу a того же порядка n. Во всех трех случаях результатом произведения является трехмерная матрица n-го порядка. Как видим, указанное произведение многомерных матриц существенно отличается от умножения обычных матриц. Во-первых, в многомерном случае перемножаются матрицы различных размерностей. Во-вторых, в отличие от произведения обычных матриц, произведение многомерных матриц определено только для случая, когда они имеют один и тот же порядок. Еще одним отличием является то, что произведение пространственных матриц не является ассоциативным в обычном алгебраическом смысле.

Мало общего со своим бинарным прототипом имеет и еще один, более общий, чем указанный выше, многомерный аналог умножения обычных матриц – произведение p-мерной матрицы n-го порядка по одному из фиксированных индексов на q-мерную матрицу того же порядка n [1−2]. Всего имеется p таких произведений, результатом каждого из которых является $(p + q - 2)$-мерная матрица. Произведение p-мерной матрицы на q-мерную матрицу не является алгебраической операцией, поэтому и в данном случае не имеет смысла говорить об ассоциативности этого произведения.

В данной работе на множестве всех трехмерных матриц, у которых, по крайней мере, два размера совпадают, для каждого индекса i, j, k определены многоместные операции, обладающие рядом хороших свойств. В частности, указанные операции, в отличие от умножения пространственных матриц из [1−2], могут быть ассоциативными.

1. Сведения о пространственных матрицах. Приведем вначале необходимые в дальнейшем сведения о пространственных (трехмерных) матрицах, взятые из [1−2].

Пространственную матрицу над кольцом P, имеющую размер $m \times n \times p$, можно определить как пространственную таблицу из mnp элементов

$$a_{ijk}\ (i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, p)$$

из P, имеющую форму параллелепипеда с линейными размерами m, n и p.

Пространственную матрицу размера $m \times n \times p$ с общим элементом a_{ijk} обозначают символом $(a_{ijk})_{m\times n\times p}$. Элементы этой матрицы можно считать расположенными в точках (i, j, k) трехмерного пространства, где i, j, k изменяются как указано выше.

Пространственную матрицу размера $n \times n \times n$ называют *кубической матрицей порядка* n.

Фиксируя значение индекса i, получают m обычных матриц $(a_{1jk}), (a_{2jk}), \ldots, (a_{mjk})$ размера $n \times p$, которые называются сечениями ориентации (i). Аналогично n матриц $(a_{i1k}), (a_{i2k}), \ldots, (a_{ink})$ размера $m \times p$ называют сечениями ориентации (j), а p матриц $(a_{ij1}), (a_{ij2}), \ldots, (a_{ijp})$ размера $m \times n$ называют сечениями ориентации (k).

Понятно, что трехмерная матрица полностью определяется заданием всех своих сечений какой-либо фиксированной ориентации (i), (j) или (k).

Пространственные матрицы $(a_{ijk})_{m\times n\times p}$ и $(b_{ijk})_{m\times n\times p}$ одного и того же размера можно складывать по правилу

$$(a_{ijk})_{m\times n\times p} + (b_{ijk})_{m\times n\times p} = (c_{ijk} = a_{ijk} + b_{ijk})_{m\times n\times p}.$$

1.1. Замечание. Ясно, что для любого $r = 1, \ldots, m$ r-ое сечение ориентации (i) суммы пространственных матриц равно сумме r-ых сечений ориентации (i) пространственных матриц-слагаемых, то есть, если

$$(a_{ijk})_{m\times n\times p} + (b_{ijk})_{m\times n\times p} = (c_{ijk})_{m\times n\times p},$$

то

$$(a_{rjk}) + (b_{rjk}) = (c_{rjk}),\ r = 1, \ldots, m.$$

Аналогичные утверждения справедливы для сечений ориентаций (j) и (k).

Всякую пространственную матрицу $(a_{ijk})_{m\times n\times p}$ можно умножить на любой элемент λ из P по правилу

$$\lambda(a_{ijk})_{m\times n\times p} = (d_{ijk} = \lambda a_{ijk})_{m\times n\times p}.$$

1.2. Замечание. Ясно, что для любого $r = 1, \ldots, m$ r-ое сечение ориентации (i) пространственной матрицы $\lambda(a_{ijk})_{m\times n\times p}$, где $\lambda \in P$, равно произведению λ на r-ое сечение ориентации (i) пространственной матрицы (a_{ijk}), то есть, если $\lambda(a_{ijk})_{m\times n\times p} = (d_{ijk})_{m\times n\times p}$, то $(d_{rjk}) = \lambda(a_{rjk})$, $r = 1, \ldots, m$.

1.3. Замечание. Множество $\mathbf{M}_{m\times n\times p}(P)$ всех пространственных матриц размера $m \times n \times p$ над полем P относительно этих операций является линейным пространством над P, размерность которого равна mnp.

2. Операции $[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}$, $[\,]^{(j)}_{l,\sigma,m}$, $[\,]^{(k)}_{l,\sigma,m}$. Для сокращения записей, в случаях, когда не возникает разночтений, будем в обозначении пространственной матрицы $(a_{ijk})_{m\times n\times p}$ опускать ее размеры $m\times n\times p$, то есть полагать $(a_{ijk})_{m\times n\times p} = (a_{ijk})$.

Зафиксировав целое $l \geq 3$, подстановку $\sigma \in S_m$ и ориентацию (i), определим на множестве $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ всех пространственных матриц размера $m \times n \times n$ над ассоциативным кольцом P l-арную операцию $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$ следующим образом: если

$$(a_{ijk})_1 \ldots (a_{ijk})_l \tag{1}$$

– произвольные пространственные матрицы из $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$, то

$$[(a_{ijk})_1 \ldots (a_{ijk})_l]^{(i)}_{l,\sigma,m} = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m\times n\times n}(P), \tag{2}$$

где сечения

$$(a_{1jk}), \ldots, (a_{mjk}) \tag{3}$$

ориентации (i) пространственной матрицы (a_{ijk}) из правой части (2) находятся с помощью сечений ориентации (i) матриц (1) по правилу

$$(a_{rjk}) = (a_{rjk})_1(a_{\sigma(r)jk})_2 \ldots (a_{\sigma^{l-2}(r)jk})_{l-1}(a_{\sigma^{l-1}(r)jk})_l, \tag{4}$$

где $(a_{rjk})_s$ – r-ое сечение ориентации (i) трехмерной матрицы $(a_{ijk})_s$, $r = 1, \ldots, m$, $s = 1, \ldots, l$.

Придавая переменной r в (4) конкретные значения $r = 1, \ldots, m$, выпишем каждое сечение (3) отдельно:

$$(a_{1jk}) = (a_{1jk})_1(a_{\sigma(1)jk})_2 \ldots (a_{\sigma^{l-2}(1)jk})_{l-1}(a_{\sigma^{l-1}(1)jk})_l;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(a_{mjk}) = (a_{mjk})_1(a_{\sigma(m)jk})_2 \ldots (a_{\sigma^{l-2}(m)jk})_{l-1}(a_{\sigma^{l-1}(m)jk})_l.$$

Если в определении операции $[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}$ заменить ориентацию (i) ориентацией (j), а множество $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ – множеством $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ всех пространственных матриц размера $n \times m \times n$ над P, то получим определение l-арной операции $[\,]^{(j)}_{l,\sigma,m}$. А именно, если

$$(a_{ijk})_1, \ldots, (a_{ijk})_l \tag{5}$$

– произвольные пространственные матрицы из $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$, то

$$[(a_{ijk})_1 \ldots (a_{ijk})_l]^{(j)}_{l,\sigma,m} = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{n\times m\times n}(P), \tag{6}$$

где сечения $(a_{i1k}), \ldots, (a_{imk})$ ориентации (j) пространственной матрицы (a_{ijk}) из правой части (6) находятся с помощью сечений ориентации (j) матриц (5) по правилу

$$(a_{irk}) = (a_{irk})_1(a_{i\sigma(r)k})_2 \ldots (a_{i\sigma^{l-2}(r)k})_{l-1}(a_{i\sigma^{l-1}(r)k})_l, \quad (7)$$

где $(a_{irk})_s$ – r-ое сечение ориентации (j) пространственной матрицы $(a_{ijk})_s$, $r = 1, \ldots, m$, $s = 1, \ldots, l$.

Если в определении операции $[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}$ заменить ориентацию (i) ориентацией (k), а множество $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ – множеством $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$ всех пространственных матриц размера $n \times n \times m$ над P, то получим определение l-арной операции $[\,]^{(k)}_{l,\sigma,m}$. А именно, если

$$(a_{ijk})_1, \ldots, (a_{ijk})_l \quad (8)$$

– произвольные пространственные матрицы из $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$, то

$$[(a_{ijk})_1, \ldots, (a_{ijk})_l]^{(k)}_{l,\sigma,m} = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{n\times n\times m}(P), \quad (9)$$

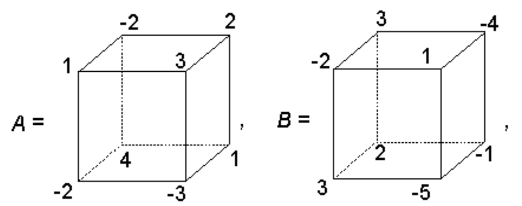
где сечения $(a_{ij1}), \ldots, (a_{ijm})$ ориентации (k) пространственной матрицы (a_{ijk}) из правой части (9) находятся с помощью сечений ориентации (k) матриц (8) по правилу

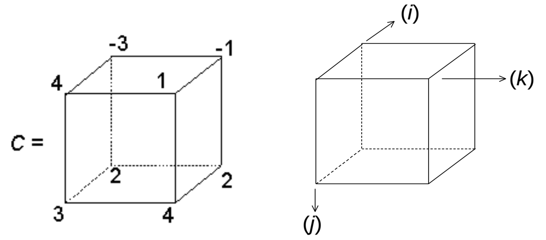
$$(a_{ijr}) = (a_{ijr})_1(a_{ij\sigma(r)})_2 \ldots (a_{ij\sigma^{l-2}(r)})_{l-1}(a_{ij\sigma^{l-1}(r)})_l, \quad (10)$$

где $(a_{ijr})_s$ – r-ое сечение ориентации (k) пространственной матрицы $(a_{ijk})_s$, $r = 1, \ldots, m$, $s = 1, \ldots, l$.

Если $m = n = p$, то на множестве $\mathbf{M}_{n\times n\times n}(P)$ всех кубических матриц порядка n определены три операции $[\,]^{(i)}_{l,\sigma,n}$, $[\,]^{(j)}_{l,\sigma,n}$, $[\,]^{(k)}_{l,\sigma,n}$.

2.1. Пример. Пусть $\sigma = (12) \in S_2$, $l = 3$, $m = n = p = 2$, $P = \mathbb{Z}$,





1) Полагая в определении операции $[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}$ $l = 3$, $\sigma = (12)$, $m = n = 2$, найдем $[ABC]^{(i)}_{3,(12),2} = U$. Считая

$$A = (a_{ijk}),\ B = (b_{ijk}),\ C = (c_{ijk}),\ U = (u_{ijk}),$$

выпишем сечения ориентации (i) указанных кубических матриц:

$$(a_{1jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},\ (a_{2jk}) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(b_{1jk}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix},\ (b_{2jk}) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(c_{1jk}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ (c_{2jk}) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Согласно (4) из определения операции $[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}$,

$$(u_{1jk}) = (a_{1jk})(b_{\sigma(1)jk})(c_{\sigma^2(1)jk}) = (a_{1jk})(b_{2jk})(c_{1jk}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

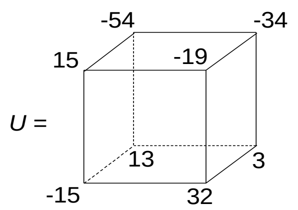
$$= \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -12 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -19 \\ -15 & 32 \end{pmatrix},$$

$$(u_{2jk}) = (a_{2jk})(b_{\sigma(2)jk})(c_{\sigma^2(2)jk}) = (a_{2jk})(b_{1jk})(c_{2jk}) =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -54 & -34 \\ 13 & 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $[ABC]^{(i)}_{3,(12),2} = U$, где



2) Найдем $[ABC]^{(j)}_{3,(12),2} = V$. Считая $V = (v_{ijk})$, выпишем сечения ориентации (j) кубических матриц A, B и C:

$$(a_{i1k}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},\ (a_{i2k}) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(b_{i1k}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},\ (b_{i2k}) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(c_{i1k}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix},\ (c_{i2k}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Согласно (7) из определения операции $[\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m}$,

$$(v_{i1k}) = (a_{i1k})(b_{i\sigma(1)k})\,(c_{i\sigma^2(1)k}) = (a_{i1k})(b_{i2k})(c_{i1k}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

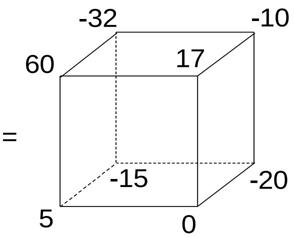
$$= \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 17 \\ -32 & -10 \end{pmatrix},$$

$$(u_{i2k}) = (a_{i2k})(b_{i\sigma(2)k})\,(c_{i\sigma^2(2)k}) = (a_{i2k})(b_{i1k})(c_{i2k}) =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -15 & -20 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $[ABC]^{(j)}_{3,(12),2} = V$, где

$V =$ 

.

3) Найдем $[ABC]^{(k)}_{3,(12),2} = W$. Считая $W = (w_{ijk})$, выпишем сечения ориентации (k) кубических матриц A, B и C:

$$(a_{ij1}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},\ (a_{ij2}) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(b_{ij1}) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ (b_{ij2}) = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(c_{ij1}) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},\ (c_{ij2}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Согласно (10) из определения операции $[\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m}$,

$$(w_{ij1}) = (a_{ij1})(b_{ij\sigma(1)})\,(c_{ij\sigma^2(1)}) = (a_{ij1})(b_{ij2})(c_{ij1}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

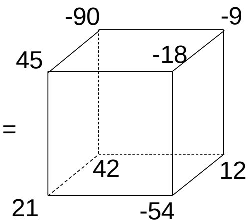
$$= \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -18 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 21 \\ -90 & -42 \end{pmatrix},$$

$$(w_{ij2}) = (a_{ij2})(b_{ij\sigma(2)})\,(c_{ij\sigma^2(2)}) = (a_{ij2})(b_{ij1})(c_{ij2}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -15 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -54 \\ -9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $[ABC]^{(k)}_{3,(12),2} = W$, где

$W =$ 

.

3. Многоместные алгебры пространственных матриц. Напомним, что универсальная алгебра $< A, [\ ] >$ с одной l-арной операцией [ ] называется *l-арной полугруппой,* если в ней для любого $i = 1, 2, \ldots, l-1$ выполняется тождество

$$[[a_1 \ldots a_l]a_{l+1} \ldots a_{2l-1}] =$$

$$= [a_1 \ldots a_i[a_{i+1} \ldots a_{i+l}]a_{i+l+1} \ldots a_{2l-1}].$$

Сама l-арная операция [ ] в этом случае называется *ассоциативной*.

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в справедливости следующей теоремы.

3.1. Теорема. *Если подстановка* $\sigma \in S_m$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то универсальные алгебры* $< \mathbf{M}_{m\times n\times n}(P), [\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m} >$, $< \mathbf{M}_{n\times m\times n}(P), [\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m} >$ *и* $< \mathbf{M}_{n\times n\times m}(P), [\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m} >$, где P – *ассоциативное кольцо, являются изоморфными l-арными полугруппами.*

Так как $(12)^3 = (12)$, то из теоремы 3.1, в частности, вытекает, что все три тернарные операции $[\ ]^{(i)}_{3,(12),2}$, $[\ ]^{(j)}_{3,(12),2}$ и $[\ ]^{(k)}_{3,(12),2}$ в примере 2.1 ассоциативны на множестве $\mathbf{M}_{2\times2\times2}(\mathbb{Z})$ всех кубических матриц второго порядка над кольцом целых чисел, а универсальные алгебры $< \mathbf{M}_{2\times2\times2}(\mathbb{Z}), [\ ]^{(i)}_{3,(12),2} >$, $< \mathbf{M}_{2\times2\times2}(\mathbb{Z}), [\ ]^{(j)}_{3,(12),2} >$, $< \mathbf{M}_{2\times2\times2}(\mathbb{Z}), [\ ]^{(k)}_{3,(12),2} >$ являются изоморфными тернарными полугруппами.

В леммах 4.2–4.7 P – ассоциативное кольцо.

3.2. Лемма. *Для всех* $A_1, \ldots, A_l \in \mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$, $\lambda \in P$, s = 1, …, l *верно*

$$[A_1 \ldots A_{s-1}(\lambda A_s)A_{s+1} \ldots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m} = \lambda[A_1 \ldots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Положим

$$A_t = (a_{ijk})_t,\ t = 1, \dots l,$$

$$[A_1 \dots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m} = B = (b_{ijk}),$$

$$[A_1 \dots A_{s-1}(\lambda A_s)A_{s+1} \dots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m} = C = (c_{ijk}).$$

Так как $\lambda A_s = \lambda(a_{ijk})_s = (d_{ijk} = \lambda a_{ijk})_s$, то, ввиду определения операции $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$, r-ое сечение ориентации (i) пространственной матрицы C имеет следующий вид:

$$(c_{rjk}) = (a_{rjk})_1(a_{\sigma(r)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{s-2}(r)jk})_{s-1}$$

$$(d_{\sigma^{s-1}(r)js})_s(a_{\sigma^{s}(r)jk})_{s+1}\dots(a_{\sigma^{l-1}(r)jk})_l =$$

$$= (a_{rjk})_1(a_{\sigma(r)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{s-2}(r)jk})_{s-1}$$

$$(\lambda a_{\sigma^{s-1}(r)jk})_s(a_{\sigma^{s}(r)jk})_{s+1}\dots(a_{\sigma^{l-1}(r)jk})_l =$$

$$= (a_{rjk})_1(a_{\sigma(r)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{s-2}(r)jk})_{s-1}$$

$$\lambda(a_{\sigma^{s-1}(r)jk})_s(a_{\sigma^{s}(r)jk})_{s+1}\dots(a_{\sigma^{l-1}(r)jk})_l =$$

$$= \lambda((a_{rjk})_1(a_{\sigma(r)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{l-1}(r)jk})_l),$$

то есть

$$(c_{rjk}) = \lambda((a_{rjk})_1(a_{\sigma(r)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{l-1}(r)jk})_l).$$

А так как r-ое сечение ориентации (i), где $r = 1, \dots, m$, пространственной матрицы B, согласно определению операции $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$, имеет вид

$$(b_{rjk}) = (a_{rjk})_1(a_{\sigma(r)jk})_2 \dots (a_{\sigma^{l-1}(r)jk})_l,$$

то $(c_{rjk}) = \lambda(b_{rjk})$, откуда $(c_{rjk}) = (\lambda b_{rjk})$. Правая часть последнего равенства является r-ым сечением ориентации (i) пространственной матрицы λB.

Таким образом, для любого $r = 1, \dots, m$ r-ые сечения ориентации (i) пространственных матриц λB и C совпадают, а значит, совпадают и сами эти пространственные матрицы, то есть верно требуемое равенство. Лемма доказана.

Следующие две леммы доказываются аналогично лемме 3.2.

3.3. Лемма. *Для всех* $A_1, \dots, A_l \in \mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$, $\lambda \in P$, s = 1, …, l *верно*

$$[A_1 \dots A_{s-1}(\lambda A_s)A_{s+1} \dots A_l]^{(j)}_{l,\sigma,m} = \lambda[A_1 \dots A_l]^{(j)}_{l,\sigma,m}.$$

3.4. Лемма. *Для всех* $A_1, \dots, A_l \in \mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$, $\lambda \in P$, $s = 1, \dots, l$ *верно*

$$[A_1 \dots A_{s-1}(\lambda A_s)A_{s+1} \dots A_l]^{(k)}_{l,\sigma,m} = \lambda[A_1 \dots A_l]^{(k)}_{l,\sigma,m}.$$

3.5. Лемма. *l-Арная операция* $[\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m}$, *определенная на множестве* $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$, *является дистрибутивной относительно сложения пространственных матриц, то есть*

$$[A_1 \dots A_{s-1}(B + C)A_{s+1} \dots A_l[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m} =$$

$$= [A_1 \dots A_{s-1}BA_{s+1} \dots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m} +$$

$$+ [A_1 \dots A_{s-1}CA_{s+1} \dots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m}$$

для всех $A_1 \dots A_l, B, C \in \mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ *и любого* $s = 1, \dots, l$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Положим

$$A_t = (a_{ijk})_t,\ t \in \{1, \dots, s-1, s+1, \dots, l\},$$

$$B = (b_{ijk}),\ C = (c_{ijk}),$$

$$[A_1 \dots A_{s-1}(B + C)A_{s+1} \dots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m} = U = (u_{ijk}),$$

$$[A_1 \dots A_{s-1}BA_{s+1} \dots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m} +$$

$$+ [A_1 \dots A_{s-1}CA_{s+1} \dots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m} = V = (v_{ijk}),$$

$$[A_1 \dots A_{s-1}BA_{s+1} \dots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m} = G = (g_{ijk}),$$

$$[A_1 \dots A_{s-1}CA_{s+1} \dots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m} = H = (h_{ijk}).$$

Так как для любого $r = 1, \dots, m$ r-ое сечение ориентации (i) пространственной матрицы $G + H$ равно сумме r-ых сечений ориентации (i) пространственных матриц G и H: $(v_{rjk}) = (g_{rjk}) + (h_{rjk})$, то, используя определение операции $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$ и дистрибутивность умножения обычных матриц относительно их сложения, получим

$$(u_{rjk}) = (a_{rjk})_1(a_{\sigma(r)jk})_2\dots(a_{\sigma^{s-2}(r)jk})_{s-1}(b_{\sigma^{s-1}(r)jk} +$$

$$+ c_{\sigma^{s-1}(r)jk})_s(a_{\sigma^{s}(r)jk})_{s+1}\dots(a_{\sigma^{l-1}(r)jk})_l =$$

$$= (a_{rjk})_1(a_{\sigma(r)jk})_2\dots(a_{\sigma^{s-2}(r)jk})_{s-1}$$

$$(b_{\sigma^{s-1}(r)jk})_s\,(a_{\sigma^{s}(r)jk})_{s+1}\dots(a_{\sigma^{l-1}(r)jk})_l +$$

$$+ (a_{rjk})_1(a_{\sigma(r)jk})_2\dots(a_{\sigma^{s-2}(r)jk})_{s-1}$$

$$(c_{\sigma^{s-1}(r)jk})_s\,(a_{\sigma^{s}(r)jk})_{s+1}\dots(a_{\sigma^{l-1}(r)jk})_l =$$

$$= (g_{rjk}) + (h_{rjk}) = (v_{rjk}),$$

то есть $(u_{rjk}) = (v_{rjk})$.

Таким образом, для любого $r = 1, \dots, m$ r-ые сечения ориентации (i) пространственных матриц U и V совпадают, а значит совпадают и сами эти пространственные матрицы, то есть верно требуемое равенство. Лемма доказана.

Следующие две леммы доказываются аналогично лемме 3.5.

3.6. Лемма. *l-Арная операция $[\,]^{(j)}_{l,\sigma,m}$, определенная на множестве $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$, является дистрибутивной относительно сложения пространственных матриц, то есть*

$$[A_1 \ldots A_{s-1}(B + C)A_{s+1} \ldots A_l\,]^{(j)}_{l,\sigma,m} =$$
$$= [A_1 \ldots A_{s-1}BA_{s+1} \ldots A_l\,]^{(j)}_{l,\sigma,m} +$$
$$+ [A_1 \ldots A_{s-1}CA_{s+1} \ldots A_l\,]^{(j)}_{l,\sigma,m}$$

для всех $A_1 \ldots A_l, B, C \in \mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ и любого $s = 1, \ldots, l$.

3.7. Лемма. *l-Арная операция $[\,]^{(k)}_{l,\sigma,m}$, определенная на множестве $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$, является дистрибутивной относительно сложения пространственных матриц, то есть*

$$[A_1 \ldots A_{s-1}(B + C)A_{s+1} \ldots A_l\,]^{(k)}_{l,\sigma,m} =$$
$$= [A_1 \ldots A_{s-1}BA_{s+1} \ldots A_l\,]^{(k)}_{l,\sigma,m} +$$
$$+ [A_1 \ldots A_{s-1}CA_{s+1} \ldots A_l\,]^{(k)}_{l,\sigma,m}$$

для всех $A_1 \ldots A_l, B, C \in \mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$ и любого $s = 1, \ldots, l$.

Напомним определения $(2, l)$-алгебры и $(2, l)$-кольца.

Линейное пространство A над полем P с определенной на нем l-арной операцией η называется $(2, l)$-*алгеброй* над P, если выполняются следующие условия:

1) для любого $\lambda \in P$ и любых $a_1, \ldots, a_l \in A$ верно

$$\lambda\eta(a_1 \ldots a_l) = \eta((\lambda a_1)a_2 \ldots a_l) =$$
$$= \eta(a_1(\lambda a_2)a_3 \ldots a_l) = \ldots = \eta(a_1 \ldots a_{l-1}(\lambda a_l));$$

2) l-арная операция η дистрибутивна относительно операции + сложения векторов, то есть в A для любого $i = 1, \ldots, l$ выполняется тождество

$$\eta(a_1 \ldots a_{i-1}(b_1 + b_2)a_{i+1} \ldots a_l) =$$
$$= \eta(a_1 \ldots a_{i-1}b_1a_{i+1} \ldots a_l) +$$
$$+ \eta(a_1 \ldots a_{i-1}b_2a_{i+1} \ldots a_l). \qquad (11)$$

Если l-арная операция η ассоциативна, то соответствующую $(2, l)$-алгебру $< A, +, \eta >$ называют *ассоциативной*.

Отображение φ $(2, l)$-алгебры $< A, +, [\,] >$ в $(2, l)$-алгебру $< B, +, [\,] >$ называют гомоморфизмом, если:

$$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x),\ \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$
$$\varphi([x_1 \ldots x_l]) = [\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_l)] \qquad (12)$$

для любых $x, y; x_1, \ldots, x_l \in A; \lambda \in P$.

Гомоморфизм φ $(2, l)$-алгебр, являющийся взаимнооднозначным отображением, называют изоморфизмом.

Универсальную алгебру $< A, +, \eta >$ с бинарной и n-арной операциями + и η называют $(2, l)$-*кольцом*, если $< A, + >$ – абелева группа и в A выполняется тождество дистрибутивности (11). Если при этом l-арная операция η ассоциативна, то $(2, l)$-кольцо $< A, +, \eta >$ называют *ассоциативным*.

С помощью второго и третьего равенств из (12) определяются гомоморфизм и изоморфизм $(2, l)$-колец.

Согласно замечанию 1.3, множества $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$, $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ и $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$ являются линейными пространствами относительно сложения пространственных матриц и умножения пространственных матриц на элемент из поля P. Эти линейные пространства, рассматриваемые вместе с l-арными операциями $[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}$, $[\,]^{(j)}_{l,\sigma,m}$ и $[\,]^{(k)}_{l,\sigma,m}$ соответственно, ввиду лемм 4.2–4.7, являются $(2, l)$-алгебрами над P. Более того, ввиду теоремы 3.1, имеет место

3.8. Предложение. *Если подстановка $\sigma \in S_m$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то универсальные алгебры $< \mathbf{M}_{m\times n\times n}(P), +, [\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m} >$, $< \mathbf{M}_{n\times m\times n}(P), +, [\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m} >$, $< \mathbf{M}_{n\times n\times m}(P), +, [\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m} >$, где P – поле, являются изоморфными ассоциативными $(2, l)$-алгебрами. В частности, указанные универсальные алгебры являются изоморфными $(2, l)$-кольцами.*

Следующая теорема доказывается с использованием соответствующих результатов из [3].

3.9. Теорема. *Пусть P – поле, $m \ge 2$, $l \ge 3$, m делит $l - 1$, σ – цикл длины m из S_m. Тогда каждая из универсальных алгебр из предыдущего предложения является ассоциативной неабелевой $(2, l)$-алгеброй, в которой нет единиц, и все элементы которой являются делителями ее нуля.*

Заметим, что нулями $(2, l)$-алгебр из предложения 3.8 являются пространственные матрицы $(o_{ijk})_{m\times n\times n}$, $(o_{ijk})_{n\times m\times n}$ и $(o_{ijk})_{n\times n\times m}$ соответственно, у которых все элементы являются нулем поля P.

3.10. Следствие. *Пусть P – поле, $m \ge 2$, $l \ge 3$, σ – цикл длины m из S_m. Тогда каждая из универсальных алгебр $< \mathbf{M}_{m\times n\times n}(P), +, [\ ]^{(i)}_{m+1,\sigma,m} >$, $< \mathbf{M}_{n\times m\times n}(P), +, [\ ]^{(j)}_{m+1,\sigma,m} >$, $< \mathbf{M}_{n\times n\times m}(P), +, [\ ]^{(k)}_{m+1,\sigma,m} >$ является ассоциативной неабелевой $(2, m + 1)$-алгеброй над P, в которой нет единиц, и все элементы которой являются делителями ее нуля.*

Напомним, что универсальная алгебра $< A, [\ ] >$ с l-арной операцией $[\ ]$ называется полуабелевой, если в ней выполняется тождество

$$[x_1x_2 \ldots x_{l-1}x_l] = [x_lx_2 \ldots x_{l-1}x_1].$$

3.11. Замечание. Используя некоммутативность при $n \geq 2$ алгебры $\mathbf{M}_n(P)$ всех матриц порядка n над полем P, можно показать, что полиадические алгебры из теоремы 3.9 и следствия 3.10 не являются полуабелевыми.

4. Тернарный случай. Если $l = 3$, $m = 2$, $\sigma = (12) \in S_2$, то $\sigma^l = \sigma$. Поэтому для указанных l, m и σ можно конкретизировать результаты предыдущего раздела.

Теореме 3.1 соответствует

4.1. Следствие. *Если P – ассоциативное кольцо, то универсальные алгебры* $< \mathbf{M}_{2\times n\times n}(P), [\ ]^{(i)}_{3,(12),2} >$, $< \mathbf{M}_{n\times 2\times n}(P), [\ ]^{(j)}_{3,(12),2} >$ *и* $< \mathbf{M}_{n\times n\times 2}(P), [\ ]^{(k)}_{3,(12),2} >$ *являются изоморфными тернарными полугруппами.*

Теореме 3.9 соответствует

4.2. Следствие. *Если P – поле, то универсальные алгебры* $< \mathbf{M}_{2\times n\times n}(P), [\ ]^{(i)}_{3,(12),2} >$, $< \mathbf{M}_{n\times 2\times n}(P), [\ ]^{(j)}_{3,(12),2} >$ *и* $< \mathbf{M}_{n\times n\times 2}(P), [\ ]^{(k)}_{3,(12),2} >$ *являются изоморфными ассоциативными неабелевыми тернарными алгебрами, в которых нет единиц, и все элементы которых являются делителями нуля.*

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Соколов, Н.П. Пространственные матрицы и их приложения / Н.П. Соколов. – М.: Наука, 1960. – 300 с.
2. Соколов, Н.П. Введение в теорию пространственных матриц / Н.П. Соколов. – Киев: Наукова думка, 1972. – 175 с.
3. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

Поступила в редакцию 11.04.2011. Принята в печать 29.04.2011
Адрес для корреспонденции: 212002, г. Могилев, Пушкинский пр-т, д. 19, корп. 1, кв. 95,
e-mail: mgup@mogilev.by – Гальмак А.М.