УДК 512.542

π-Префраттиниевы подгруппы конечных разрешимых групп

С.Ф. Каморников
Гомельский филиал учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный институт трудовых и социальных отношений»

Пусть π – некоторое множество простых чисел и $\Phi_\pi(G)$ – пересечение всех максимальных подгрупп конечной разрешимой группы G, индексы которых не делятся на числа из π. Подгруппа H группы G называется π-префраттиниевой, если выполняется следующее условие $\Phi_\pi(\varepsilon(G)) = Core_{\varepsilon(G)}(\varepsilon(H))$ для любого эпиморфизма $\varepsilon : G \to \Phi_\pi(G)$. В работе описываются некоторые свойства π-префраттиниевых подгрупп: они существуют в любой конечной разрешимой группе; образуют единственный класс сопряженных подгрупп; покрывают все главные π-факторы и все фраттиниевы главные факторы и изолируют все остальные главные факторы группы. В работе также устанавливается связь π-префраттиниевых подгрупп с холловыми и префраттиниевыми подгруппами группы.

Ключевые слова: *конечная разрешимая группа, прекурсивная подгруппа, π-префраттиниева подгруппа, префраттиниева подгруппа.*

π-Prefrattini subgroups of finite soluble groups

S.F. Kamornikov
Gomel Branch of the International Institute of Labor and Social Relations

Let π be a set of primes and $\Phi_\pi(G)$ the intersection of all maximal subgroups of a finite soluble group G whose indices are not divisible by primes in π. The subgroup H of G is called π-prefrattini if the following condition holds $\Phi_\pi(\varepsilon(G)) = Core_{\varepsilon(G)}(\varepsilon(H))$ for all epimorphisms $\varepsilon : G \to \Phi_\pi(G)$. In the article some properties of π-prefrattini subgroups of finite soluble group are investigated. They are present in any finite soluble group; make up the only class of conjugated subgroups; cover all main π-factors as well as all frattini main factors, it also isolates all the other main factors of the group. The study also states the link between π-prefrattini subgroups and hall as well as prefrattini subgroups of the group.

Key words: *finite soluble group, precursive subgroup, π-prefrattini subgroup, prefrattini subgroup.*

Дерком и Хоуксом в [1] сформулирована общая задача описания всех характеристических подгрупповых функций τ, для которых в каждой разрешимой группе существуют τ-прекурсивные подгруппы. Один из подходов решения этой задачи предложен Фишером (см. [1] на стр. 415). Суть его заключается в выделении так называемых хорошо расположенных характеристических подгрупповых функций τ и построении для них ($\mathfrak{F}$, τ)-прекурсивных подгрупп по значениям функции τ на членах некоторого $\mathfrak{F}$-ряда группы. В [1] этот подход проиллюстрирован на трех примерах функций τ:

1) $\tau = Z_\mathfrak{F}$: $G \to Z_\mathfrak{F}(G)$ – $\mathfrak{F}$-гиперцентр группы G (в этом случае τ-прекурсивными подгруппами являются $\mathfrak{F}$-нормализаторы группы);

2) $\tau = \Phi : G \to \Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G (в этом случае τ-прекурсивными подгруппами являются префраттиниевы подгруппы, введенные Гашюцом в [2]);

3) $\tau = \Delta^\mathfrak{F}$: $G \to \Delta^\mathfrak{F}(G)$ – обобщенная подгруппа Фраттини группы G, введенная Л.А. Шеметковым в [3] (в этом случае τ-прекурсивными подгруппами являются $\mathfrak{F}$-префраттиниевы подгруппы, впервые рассмотренные Хоуксом в [4]).

В данной работе рассматривается характеристическая подгрупповая функция

$$\tau = \Phi_\pi : G \to \Phi_\pi(G),$$

где $\Phi_\pi(G)$ – пересечение всех максимальных подгрупп группы G, индексы которых не делятся на простые числа, принадлежащие множеству π.

Ниже показывается, что функция Φ_π является хорошо расположенной по отношению к формации $\mathfrak{S}_\pi$ всех разрешимых π-групп, а значит, для этой функции в конечной разрешимой группе существуют τ-прекурсивные подгруппы, которые в данной работе называются π-префраттиниевыми. В работе изучаются свойства π-префраттиниевых подгрупп. Во многом эти свойства аналогичны свойствам префраттиниевых подгрупп Гашюца и $\mathfrak{F}$-префраттиниевых подгрупп Хоукса.

Рассматриваются только конечные разрешимые группы. Используются определения и обозначения, принятые в [1, 5].

Хорошо расположенные функции. Приведем основные понятия и результаты теории прекурсивных подгрупп. Эти результаты принадлежат Фишеру и изложены в [1].

Отображение τ, ставящее в соответствие каждой группе G подгруппу $\tau(G)$, называется характеристической подгрупповой функцией (унитарным подгрупповым функтором в терминологии [6]), если выполняется равенство

$$\tau(\varphi(G)) = \varphi(\tau(G))$$

для любого изоморфизма φ группы G. Ясно, что $\tau(G)$ – характеристическая подгруппа группы G.

Подгруппа U группы G называется τ-прекурсивной, если

$$\tau(\varepsilon(G)) = Core_{\varepsilon(G)}(\varepsilon(U)) \qquad (*)$$

для любого эпиморфизма ε группы G. На языке факторгрупп условие (*) означает, что

$$\tau(G/N) = Core_G(UN)/N$$

для любой нормальной подгруппы N группы G. В частности, $\tau(G) = Core_G(U)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и пусть для каждой группы G число $m = m(G)$ обозначает наименьшее целое, для которого $G \in \mathfrak{N}^m\mathfrak{F}$ ($m = 0$, если $G \in \mathfrak{F}$). Ряд подгрупп

$$G = G_m \supset G_{m-1} \supset ... \supset G_1 \supset G_0 \supseteq 1 \qquad (f)$$

называется $\mathfrak{F}$-рядом, если подгруппа G_i является $\mathfrak{N}^i\mathfrak{F}$-проектором в G_{i+1} для всех $i = 0,1,..., m-1$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и τ – характеристическая подгрупповая функция. Подгруппа U группы G называется $(\mathfrak{F},\tau)$-пре-курсивной подгруппой, если:

1) $U = \tau(f)$, где $\tau(f) = \tau(G_m)\ \tau(G_{m-1})... \dots\tau(G_1)\tau(G_0)$ для некоторого $\mathfrak{F}$-ряда (f) группы G;

2) подгруппа U является τ-прекурсивной.

Главный фактор H/K группы G называется τ-центральным, если $H/K \subseteq \tau(G/K)$, и τ-эксцентральным – в противном случае.

Теорема 1 ([1]). *Пусть группа G обладает $(\mathfrak{F},\tau)$-прекурсивными подгруппами. Тогда они:*

1) образуют единственный класс сопряженных подгрупп;

2) покрывают все τ-центральные главные факторы и изолируют все τ-эксцентральные главные факторы группы G.

Теорема 2 ([1]). *Если U – $(\mathfrak{F},\tau)$-прекурсивная подгруппа группы G, то UN/N – $(\mathfrak{F},\tau)$-прекурсивная подгруппа группы G/N.*

Теорема 3 ([1]). *Пусть в каждой группе существуют $(\mathfrak{F},\tau)$-прекурсивные подгруппы. Тогда для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

WD1: $\tau(G/\tau(G)) = 1$;

WD2: Если N – нормальная подгруппа группы G, то $\tau(G)N/N \subseteq \tau(G/N)$, причем $\tau(G)N/N = \tau(G/N)$, если $G \in \mathfrak{F}$;

WD3: Если U – $\mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F}$-проектор группы G, которая принадлежит классу $\mathfrak{N}^m\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F}$ и если $\tau(G) = 1$, то $Core_{F(G)}(\tau(U) \cap F(G)) = 1$.

Условия WD1−WD3 не являются достаточными для существования $(\mathfrak{F},\tau)$-прекурсивных подгрупп в группе.

Характеристическая подгрупповая функция τ называется хорошо расположенной (well disposed) по отношению к формации $\mathfrak{F}$, если она обладает свойствами WD1, WD2, WD3 и, кроме того, удовлетворяет следующему условию:

WD4: Пусть $G \in \mathfrak{N}^m\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F}$ и $\tau(G) = 1$. Если M – максимальная подгруппа группы G, содержащая подгруппу G_{m-1} из некоторого $\mathfrak{F}$-ряда (f), то:

1) $\tau(M) \subseteq \tau(f)$;

2) $\tau(G/N) \subseteq \tau(M/N)$ для каждой минимальной нормальной подгруппы N группы G, содержащейся в M.

Теорема 4 ([1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. И пусть τ – хорошо расположенная по отношению к $\mathfrak{F}$ характеристическая подгрупповая функция. Тогда каждая группа обладает $(\mathfrak{F},\tau)$-прекурсивными подгруппами.*

Из теорем 3 и 4 следует, что для заданной характеристической функции τ вопрос существования τ-прекурсивных подгрупп в ряде случаев может быть сведен к выбору формации $\mathfrak{F}$ и доказательству хорошей расположенности функции τ к формации $\mathfrak{F}$. Этот подход используется ниже в случае, когда $\tau = \Phi_\pi$.

Свойства функции $\tau = \Phi_\pi$. Нам понадобится следующий результат, доказательство которого осуществляется простой проверкой.

Лемма 1. *Для любой группы G и любого множества π простых чисел справедливы следующие утверждения:*

1) $\Phi_\pi(G)/O_\pi(G) = \Phi(G/O_\pi(G))$;

2) если N – нормальная подгруппа группы G, то $\Phi_\pi(G)N/N \subseteq \Phi_\pi(G/N)$;

3) если $G \in \mathfrak{S}_\pi$ и N – нормальная подгруппа группы G, то $\Phi_\pi(G/N) = \Phi_\pi(G)N/N$;

4) если N *– нормальная подгруппа группы* G *и* $N \subseteq \Phi_\pi(G)$*, то* $\Phi_\pi(G/N) = \Phi_\pi(G)/N$*;*

5) $\Phi_\pi(G/\Phi_\pi(G)) = 1$.

Из леммы 3, в частности, следует, что характеристическая подгрупповая функция Φ_π обладает свойствами WD1 и WD2.

Лемма 2. *Пусть N – нормальная* π'*-под-группа группы G, содержащаяся в* $Soc(G)$*. Если H – такая подгруппа группы G, что* $G = NH$ *и* $H \cap N = 1$*, то* $\Phi_\pi(G) = C_{\Phi_\pi(H)}(N)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть T – пересечение всех максимальных подгрупп группы G, которые содержат N и индексы которых не делятся на числа из π. Тогда $\Phi_\pi(G) \subseteq T$ и $T/N = \Phi_\pi(G/N)$. Ввиду естественного изоморфизма $H \cong HN/N = G/N$ имеем равенство $\Phi_\pi(G/N) = \Phi_\pi(H)N/N$. Теперь из $\Phi_\pi(G)N/N \subseteq \Phi_\pi(G/N)$ следует включение $\Phi_\pi(G) \subseteq \Phi_\pi(H)N$.

Пусть W – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в N. Тогда $N = W \times W^*$, где W^* – нормальная подгруппа группы G. Так как подгруппа W дополняема в G максимальной подгруппой W^*H, индекс которой не делится на числа из π, то $\Phi_\pi(G) \cap N = 1$. Следовательно,

$$\Phi_\pi(G) \subseteq C_G(N) \cap \Phi_\pi(H)N =$$
$$= (C_G(N) \cap \Phi_\pi(H))N = C_{\Phi_\pi(H)}(N) \times N.$$

Пусть $K = C_{\Phi_\pi(H)}(N)$. Ясно, что $N_G(K) \supseteq \langle H, N\rangle = G$, то есть K – нормальная подгруппа группы G. Предположим, что найдется не содержащая K максимальная подгруппа M группы G, индекс которой не делится на числа из π. В этом случае $KM = G$. Если $N \subseteq M$, то M/N – максимальная подгруппа группы G/N, а значит, $M \cap H$ – максимальная подгруппа группы H. Кроме того, индекс $|H : M \cap H| = |G : M|$ не делится на числа из π. Но тогда $K \subseteq \Phi_\pi(H) \subseteq M \cap H \subseteq M$, что противоречит предположению.

Итак, N не содержится в M. Пусть $D = M \cap N$. Так как $N \subseteq Soc(G)$, то найдется минимальная нормальная подгруппа V группы G такая, что $N = V \times D$. Значит, M и DH – максимальные подгруппы группы G, дополняющие V. Подгруппы M и DH не сопряжены в G, так как DH содержит нормальную подгруппу K, а M не содержит K ввиду предположения. Тогда на основании утверждения A.16.9 из [1] $M \cap DH$ – максимальная подгруппа группы DH. А так как $M \cap DH = (M \cap H)D$, то подгруппа $M \cap H$ максимальна в H. Так как подгруппы M и H не сопряжены, то $MH = G$. Отсюда $|G| = |MH| = \dfrac{|M||H|}{|M \cap H|}$, а значит, индекс $|G : M| = \dfrac{|G|}{|M|} = \dfrac{|H|}{|H \cap M|} = |H : H \cap M|$ не делится на числа из π. Поэтому имеем $K \subseteq \Phi_\pi(H) \subseteq M \cap H \subseteq M$. Снова пришли к противоречию.

Итак, каждая максимальная подгруппа группы G, индекс которой не делится на числа из π, содержит K. Поэтому $K \subseteq \Phi_\pi(G)$. Теперь окончательно имеем $\Phi_\pi(G) = \Phi_\pi(G) \cap NK = (\Phi_\pi(G) \cap N)K = K$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть N, H и U – подгруппы группы G, причем G=HN,* $H \cap N = 1$ *и* $H \subseteq U$*. Если* $N \subseteq Soc(G)$*, то* $U \cap N \subseteq Soc(U)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что произвольная минимальная нормальная подгруппа группы U, содержащаяся в $U \cap N$, выделяется в $U \cap N$ прямым множителем, нормальным в U.

Пусть S – минимальная нормальная подгруппа группы U, содержащаяся в $U \cap N$. Так как подгруппа N абелева, то $N_G(S) \supseteq \langle U, N\rangle = G$, то есть S – нормальная подгруппа группы G. Так как $N \subseteq Soc(G)$, то $N = S \times V$, где V – нормальная подгруппа группы G. Теперь $U \cap N = U \cap SV = S(U \cap V)$. Как и выше, показывается, что $N_G(S) \supseteq \langle U, N\rangle = G$, то есть $U \cap N$ – нормальная подгруппа группы G. Отсюда окончательно имеем, что $U \cap N = S \times (U \cap V)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть U –* $\mathcal{N}^{m-1}\mathcal{S}_\pi$*-проектор группы* $G \in \mathcal{N}^{m}\mathcal{S}_\pi \setminus \mathcal{N}^{m-1}\mathcal{S}_\pi$. *Если* $\Phi_\pi(G) = 1$*, то* $Core_{F(G)}(\Phi_\pi(U) \cap F(G)) = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\Phi_\pi(G) = 1$, то ввиду леммы 1 $O_\pi(G) = 1$ и $\Phi(G) = 1$. Следовательно, $F(G) = Soc(G)$ и $F(G)$ – π'-группа. Ввиду леммы 7.9 из [5] существует такая подгруппа H, что $G = F(G)H$ и $F(G) \cap H = 1$. Так как $G \in \mathcal{N}^{m}\mathcal{S}_\pi \setminus \mathcal{N}^{m-1}\mathcal{S}_\pi$ и $H \cong G/F(G)$, то $H \in \mathcal{N}^{m-1}\mathcal{S}_\pi$. Ввиду утверждения III.3.23 из [1] найдется $\mathcal{N}^{m-1}\mathcal{S}_\pi$-проектор группы G, содержащий H. А так как все $\mathcal{N}^{m-1}\mathcal{S}_\pi$-проекторы в группе G сопряжены, то, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $H \subseteq U$. Тогда $U = H(F(G) \cap U)$. Так как $F(G) = Soc(G)$, то ввиду леммы 3 $F(G) \cap U \subseteq Soc(U)$. Теперь на основании леммы 2 имеем $\Phi_\pi(U) =$

= $C_{\Phi_\pi(H)}(F(G) \cap U) \subseteq H$. Следовательно, $\Phi_\pi(U) \cap F(G) = 1$ и $Core_{F(G)}(\Phi_\pi(U) \cap F(G)) = 1$. Лемма доказана.

Из леммы 4 следует, что характеристическая подгрупповая функция Φ_π обладает свойством WD3.

Лемма 5. *Пусть* $G \in \mathcal{N}^m\mathcal{S}_\pi \setminus \mathcal{N}^{m-1}\mathcal{S}_\pi$ *и* $\Phi_\pi(G) = 1$. *И пусть M – максимальная подгруппа группы G, содержащая подгруппу* G_{m-1} *для некоторого* $\mathcal{S}_\pi$*-ряда* (f): $G = G_m \supset G_{m-1} \supset ... \supset G_1 \supset G_0 \supseteq 1$. *Тогда:*

1) $\Phi_\pi(M) \subseteq \Phi_\pi(f)$;

2) $\Phi_\pi(G/N) \subseteq \Phi_\pi(M/N)$ *для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G, содержащейся в M.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из $\Phi_\pi(G) = 1$ следует, что $O_\pi(G) = 1$ и $\Phi(G) = 1$. Поэтому $F(G) = Soc(G)$ и $F(G)$ – π'-группа. Пусть H – подгруппа, дополняющая $F(G)$ в G и содержащаяся $\mathcal{N}^m\mathcal{S}_\pi$-проекторе G_{m-1} группы G. Очевидно, $G_{m-1} = H((G_{m-1} \cap F(G))$ и $M = H((M \cap F(G))$. Тогда ввиду леммы 2 имеем $\Phi_\pi(M) = C_{\Phi_\pi(H)}(F(G) \cap M) \subseteq C_{\Phi_\pi(H)}(F(G) \cap G_{m-1})$ = $= \Phi_\pi(G_{m-1})$. Теперь из определения $\mathcal{S}_\pi$-ряда следует, что $\Phi_\pi(M) \subseteq \Phi_\pi(G_{m-1}) \subseteq \Phi_\pi(f)$ для любого $\mathcal{S}_\pi$-ряда, проходящего через G_{m-1}. Тем самым утверждение 1) леммы доказано.

Пусть теперь N – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в M. Так как $MF(G) = G$ и $F(G) = Soc(G)$, то найдется минимальная нормальная подгруппа V группы G, дополняемая подгруппой M.

Обозначим через $\mathbf{\Lambda}$ множество всех таких подгрупп L группы G, что L/N – максимальная подгруппа группы M/N и индекс $|M:L|$ не делится на числа из π. Так как $F(G)$ – π'-группа, то из $MF(G) = G$ следует, что индекс $|G:M|$ не делится на числа из π. Ввиду изоморфизма $M/N \cong G/NV$ имеем, что подгруппа LV/NV максимальна в G/NV, а значит, подгруппа LV/N максимальна в G/N для всех L из $\mathbf{\Lambda}$. Отметим, что индекс $|G/N : LV/N|$ не делится на числа из π. Следовательно,

$$\Phi_\pi(G/N) \subseteq M/N \cap (\cap_{L\in\Lambda} LV/N) =$$
$$= \cap_{L\in\Lambda} L/N = \Phi_\pi(M/N).$$

Лемма доказана.

Таким образом, доказана

Теорема 5. *Функция* Φ_π *хорошо расположена по отношению к формации* $\mathcal{S}_\pi$.

π**-Префраттиниевы подгруппы.** Далее $(\mathcal{S}_\pi, \Phi_\pi)$-прекурсивные подгруппы группы G будем называть π-префраттиниевыми. Из определения π-префраттиниевой подгруппы следует, что для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N и π-префрат-тиниевой подгруппы H справедливо равенство $\Phi_\pi(G/N) = Core_G(HN)/N$. В частности, $\Phi_\pi(G) = Core_G(H)$. Таким образом, подгруппа $\Phi_\pi(G)$ может быть охарактеризована как ядро π-префраттиниевой подгруппы группы G.

Теорема 6. *Для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) группа G обладает по крайней мере одной π*-префраттиниевой подгруппой;*

2) любые две π*-префраттиниевы подгруппы группы G сопряжены в G;*

3) если $G = G_m \supset G_{m-1} \supset ... \supset G_1 \supset G_0 = 1$ *– некоторый* $\mathcal{S}_\pi$*-ряд группы G, то найдется* π*-префраттиниева подгруппа H группы G такая, что*

$$H = \Phi_\pi(G_m)\Phi_\pi(G_{m-1})...\Phi_\pi(G_1)\Phi_\pi(G_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду теоремы 5 характеристическая подгрупповая функция Φ_π хорошо расположена по отношению к формации $\mathcal{S}_\pi$. Теперь на основании теоремы 4 заключаем, что G обладает π-префраттиниевыми подгруппами. Сопряженность π-префрат-тиниевых подгрупп в группе G следует из теоремы 1. Утверждение 3) теоремы вытекает из определения $(\mathcal{S}_\pi, \Phi_\pi)$-прекурсивной подгруппы. Теорема доказана.

Лемма 6. *Главный фактор* H/K *группы G является* Φ_π*-центральным тогда и только тогда, когда либо* H/K *–* π*-фактор, либо* H/K *– фраттиниев фактор.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если главный фактор H/K является либо π-фактором, либо фраттиниевым фактором, то ввиду леммы 1 и того, что $\Phi(T) \subseteq \Phi_\pi(T)$ для любой группы T, следует Φ_π-центральность H/K в группе G.

Пусть теперь H/K – Φ_π-центральный главный фактор группы G. Пусть H/K не является π-группой. Допустим, что H/K не содержится в $\Phi(G/K)$. Тогда найдется максимальная подгруппа M/K группы G/K, дополняющая в G/K подгруппу H/K. При этом индекс $|G/K : M/K| = |H/K|$ не делится на числа из π. Значит, $M/K \supseteq \Phi_\pi(G/K) \supseteq H/K$ и мы приходим к противоречию с выбором M/K. Таким образом, $H/K \subseteq \Phi(G/K)$. Лемма доказана.

Из леммы 6 и теоремы 1 вытекают следующие результаты о свойствах π-префраттинние-вых подгрупп.

Теорема 7. *Если H – π-префраттиниева подгруппа группы G, то:*

1) H покрывает все главные π-факторы и все фраттиниевы главные факторы группы G;

2) H изолирует все остальные главные факторы группы G.

Следствие 7.1. Пусть H – π-префрат-тиниева подгруппа группы G. Тогда $|H|$ – произведение порядков всех главных π-факторов и порядков всех фраттиниевых главных π'-фак-торов некоторого главного ряда группы G.

Следствие 7.2. Каждая π-префраттиниева подгруппа группы G содержит некоторую холлову π-подгруппу группы G.

Отметим еще, что на основании теоремы 2 π-префраттиниевы подгруппы обладают свойством инвариантности при гомоморфизмах группы.

5. Частные случаи. Пусть π – пустое множество. Тогда $\Phi_\pi = \Phi$ – характеристическая подгрупповая функция, выделяющая в каждой группе G ее подгруппу Фраттини $\Phi(G)$. В этом случае формальным следствием описанного выше общего случая являются следующие результаты Гашюца из [2].

Теорема 8. *Для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) группа G обладает по крайней мере одной префраттиниевой подгруппой;

2) любые две префраттиниевы подгруппы группы G сопряжены в G;

3) если $G = G_m \supset G_{m-1} \supset ... \supset G_1 \supset G_0 = 1$ *– некоторый (1)-ряд группы G ((1) – класс единичных групп), то найдется префраттиниева подгруппа H группы G такая, что*

$$H = \Phi(G_m)\Phi(G_{m-1})...\Phi(G_1)\Phi(G_0).$$

Пусть $\pi = \{p\}$, где p – простое число. Тогда $\Phi_\pi = \Phi_p$ – характеристическая подгрупповая функция, выделяющая в каждой группе G ее подгруппу $\Phi_p(G)$, равную пересечению всех максимальных подгрупп группы G, индексы которых не делятся на p. Подгруппа $\Phi_p(G)$ впервые рассмотрена Дескинсом в [8].

Из теоремы 5 следует, что функция Φ_p хорошо расположена по отношению к формации $\mathfrak{N}_p$. Кроме того, справедлива

Теорема 9. *Для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) группа G обладает по крайней мере одной p-префраттиниевой подгруппой;

2) любые две p-префраттиниевы подгруппы группы G сопряжены в G;

3) если $G = G_m \supset G_{m-1} \supset ... \supset G_1 \supset G_0 \supseteq 1$ *– некоторый $\mathfrak{N}_p$-ряд группы G, то найдется p-префраттиниева подгруппа H группы G такая, что*

$$H = \Phi_p(G_m)\Phi_p(G_{m-1})...\Phi_p(G_1)\Phi_p(G_0).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin−N. Y.: Walter de Gruyter, 1992.
2. Gaschütz, W. Praefrattinigruppen / W. Gaschütz // Arch. Math. – 1962. – Bd. 13, № 3. – S. 418–426.
3. Шеметков, Л.А. Ступенчатые формации групп // Матем. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628–648.
4. Hawkes, T.O. Analogues of prefrattini subgroups / T.O. Hawkes // Proc. Internat. Conf. Theory of Groups, Canberra (1965); N. Y., 1967. – P. 145–150.
5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.
6. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 2003.
7. Каморников, С.Ф. Об одном классе прекурсивных подгрупп конечных разрешимых групп / С.Ф. Каморников, А.П. Кармазин // Материалы Украинского мат. конгр. – Киев: Институт математики НАН Украины, 2002. – С. 63–68.
8. Deskins, W.E. A condition for the solvability of a finite group / W.E. Deskins // Ill. J. Math. – 1961. – Vol. 5, № 2. – P. 306–313.

Поступила в редакцию 21.03.2011. Принята в печать 29.04.2011

Адрес для корреспонденции: 246028, г. Гомель, ул. Советская, д. 106, кв. 150,
e-mail: sfkamornikov@mail.ru – Каморников С.Ф.