УДК 518.5

Об алгоритмах нахождения оптимальных итерационных параметров

Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко
Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Находятся итерационные параметры для некоторых итерационных функций, минимизирующие чебышевскую норму производных итерационных функций. Такая минимизация позволяет получить итерационный процесс с минимальной на заданном отрезке константой сжатия. В частности, находится оптимальное значение параметра для классического метода Ньютона. Кроме того, получены условия, при которых выпуклая (вогнутая) итерационная функция преобразует отрезок в себя. Основным результатом статьи является теорема 5, в которой находятся явные формулы, определяющие значения итерационных параметров в случае, когда единичная функция проектируется на двумерное подпространство, образованное чебышевской системой функций. Формулы, по которым находятся значения итерационных параметров, содержат информацию о концах отрезка и свойствах самих функций, образующих это двумерное подпространство.

Ключевые слова: *итерационные параметры, чебышевская норма, константа сжатия.*

On algorithms of finding optimal iteration parameters

Y.V. Trubnikov, O.V. Pyshnenko
Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

Iteration parameters for some iteration functions which minimize Chebyshev norm of derivative iteration functions are found. Such minimization makes it possible to obtain iteration process with a minimal squeezing constant at a given section. In particular optimal parameter for the classical Newton method is found. Besides conditions are obtained in which convex (inverted) iteration function converts the section into itself. Main finding of the article is theorem 5, in which apparent formulas are presented which define the indication of iteration parameters when single function is projected onto bidimentional subspace formed by Chebyshev system of functions. Formulas according to which iteration parameters are found contain information on the ends of a segment as well as on the features of the functions themselves which form this bidimentional subspace.

Key words: *iteration parameters, Chebyshev norm, convex constant.*

Итерационные методы являются основой приближенного решения многих классов уравнений в банаховых пространствах. Однако теория оптимальных итерационных процессов (в смысле наибольшей скорости сходимости) в настоящее время находится в стадии разработки. В частности, даже в скалярном случае мы далеки от полного ответа на многие вопросы.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу приближенного вычисления нуля функции $f(x)$, или, что то же самое, задачу приближенного вычисления корня уравнения $f(x)=0$. Термины нуль функции f, корень уравнения $f(x)=0$ и решение уравнения $f(x)=0$ будут использоваться как эквивалентные.

Обозначим через φ функцию, определяющую итерационный процесс

$$x_{n+1}=\varphi(x_n) \qquad (n=1,2,...). \tag{1}$$

Определенную таким образом функцию φ будем называть итерационной функцией. В дальнейшем вместо термина «итерационная функция» как в единственном, так и во множественном числе будет использоваться аббревиатура ИФ, а вместо термина «итерационный процесс» сокращение ИП.

Цель настоящей статьи – найти такие значения параметра α (параметров α,β), при которых чебышевская норма производной φ' ИФ (1) на отрезке m,M минимальна. В статье будут рассмотрены следующие ИФ:

$$\varphi_1 = x-\alpha f(x),\ x\in m,M\ ; \tag{2}$$

$$\varphi_2 = x-\alpha\frac{f(x)}{f^{`}(x)},\ x\in m,M\ ; \tag{3}$$

$$\varphi_3 = x-\alpha\ f(x)^{\ p},\ x\in m,M\ ; \tag{4}$$

$$\varphi_4 = x-\alpha f(x)-\beta g(x),\ x\in m,M\ . \tag{5}$$

В каждом из этих случаев устанавливается значение константы сжатия.

В случае функции φ_2 при $\alpha = 1$ получается обычный метод Ньютона.

Рассмотрим следующую задачу: минимизировать по α выражение

$$\max_{x\in[m,M]} \left|1-\alpha h(x)\right|, \qquad (6)$$

где $h(x)$ – непрерывная функция, определенная на отрезке $[m,M]$. Сразу же заметим, что если функция $h(x)$ принимает на $[m,M]$ значения разных знаков, то выражение (6) достигает минимума по α при $\alpha = 0$, т.е. этот случай интереса не представляет.

Теорема 1. *Пусть $h(x)$ сохраняет знак на отрезке $[m,M]$, тогда искомое значение параметра α определяется равенством*

$$\alpha = \frac{2}{h_{\max} + h_{\min}}, \qquad (7)$$

при этом

$$q_* = \min_{\alpha}\left[\max_{x\in[m,M]} \left|1-\alpha h(x)\right|\right] = \left|\frac{h_{\max} - h_{\min}}{h_{\max} + h_{\min}}\right|, \qquad (8)$$

где $h_{\max}$ – максимальное ($h_{\min}$ – минимальное) значение функции $h(x)$ на отрезке $[m,M]$.

Доказательство. Пусть для определенности $h(x) > 0$, тогда минимальность выражения (6) обеспечивает равенство

$$\alpha h_{\max} - 1 = 1 - \alpha h_{\min},$$

т.е. параметр α определяется равенством (7).

При таком значении α

$$\max_{x\in[m,M]}\left|1-\frac{2}{h_{\max}+h_{\min}}\cdot h(x)\right| = \left|1-\frac{2}{h_{\max}+h_{\min}}\cdot h_{\max}\right| =$$

$$= \left|1-\frac{2}{h_{\max}+h_{\min}}\cdot h_{\min}\right| = \left|\frac{h_{\max}-h_{\min}}{h_{\max}+h_{\min}}\right|.$$

Теорема доказана.

При использовании ИФ φ_1 возникает необходимость минимизировать по α

$$\max_{x\in[m,M]}\left|1-\alpha f'(x)\right|. \qquad (9)$$

Для этого случая теорема 1 формулируется следующим образом.

Следствие 1. Пусть функция $f'(x)$ сохраняет знак на отрезке $[m,M]$, тогда

$$\alpha = \frac{2}{f'_{\max} + f'_{\min}}, \qquad (10)$$

при этом

$$q_* = \left|\frac{f'_{\max} - f'_{\min}}{f'_{\max} + f'_{\min}}\right|. \qquad (11)$$

Если применяется ИФ φ_2, то минимизируется выражение

$$\max_{x\in[m,M]}\left|1-\alpha\left[1-\frac{f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}\right]\right|. \qquad (12)$$

Для этого случая получаем

Следствие 2. Пусть функция

$$h(x) = 1-\frac{f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} \qquad (13)$$

сохраняет знак на отрезке $[m,M]$, тогда

$$\alpha = \frac{2}{2-\left(\frac{ff''}{f'^2}\right)_{\min}-\left(\frac{ff''}{f'^2}\right)_{\max}}, \qquad (14)$$

$$q_* = \left|\frac{\left(\frac{ff''}{f'^2}\right)_{\max}-\left(\frac{ff''}{f'^2}\right)_{\min}}{2-\left(\frac{ff''}{f'^2}\right)_{\min}-\left(\frac{ff''}{f'^2}\right)_{\max}}\right|. \qquad (15)$$

В случае использования ИФ φ_3 минимизируется выражение

$$\max_{x\in[m,M]}\left|1-\alpha p\left[f(x)\right]^{p-1}\cdot f'(x)\right|. \qquad (16)$$

В этом случае справедливо

Следствие 3. Пусть функция

$$h(x) = p\left[f(x)\right]^{p-1}\cdot f'(x)$$

сохраняет знак на отрезке $[m,M]$, тогда

$$\alpha = \frac{2}{pf^{p-1}\cdot f'_{\max} + pf^{p-1}\cdot f'_{\min}}. \qquad (17)$$

$$q_* = \left|\frac{f^{p-1}\cdot f'_{\max} - f^{p-1}\cdot f'_{\min}}{f^{p-1}\cdot f'_{\max} + f^{p-1}\cdot f'_{\min}}\right|. \qquad (18)$$

В равенствах (17) и (18) для сокращения записи аргумент функции $f^{p-1}\cdot f'$ не пишется.

Далее рассмотрим вопрос об условиях преобразования отрезка $[m,M]$ в себя при использовании ИФ φ_j $(j = 1,2,3)$.

Теорема 2. *Пусть непрерывно дифференцируемая функция* $h(x)$ *обладает строго монотонной производной на отрезке $[m,M]$ и функция*

$$\varphi(x) = x - \alpha h(x) \qquad (19)$$

является выпуклой. Тогда при выполнении условий

$$0 \le \alpha h(M), \quad m \le \alpha h(m) + M, \qquad (20)$$

$$h'^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \alpha h\left[h'^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right] \le M \qquad (21)$$

функция φ отображает отрезок $[m,M]$ в себя.

Если функция φ является на отрезке m,M вогнутой функцией, то при выполнении условий

$$\alpha h(m) \le 0\,, \qquad m + \alpha h(M) \le M \qquad (22)$$

$$(h^{'})^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \alpha h\left[\ h^{'\ -1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right] \le M \qquad (23)$$

функция φ отображает отрезок m,M в себя.

В неравенствах (21), (23) $h^{'\ -1}$ – функция, обратная производной $h^{'}$.

Другие достаточные условия преобразования отрезка m,M в себя получаются применением теоремы 1.2 из ([1], с. 10). В этом случае получаем

Следствие 4. Пусть функция (19) является сжимающим отображением, определенным на отрезке m,M и пусть

$$\left|\alpha h\left(\frac{m+M}{2}\right)\right| \le\ 1-q\ \frac{M-m}{2}. \qquad (24)$$

Тогда отрезок m,M преобразуется функцией φ в себя.

Далее рассмотрим задачу минимизации выражения

$$\max_{x\in\ m,M} \left|1-\alpha f(x)-\beta g(x)\right| \qquad (25)$$

по параметрам α, β. Для этого напомним читателю некоторые определения и теоремы.

Определение 1. Система заданных на отрезке m,M непрерывных функций

$$h_0(x),\ h_1(x),\ \ldots,\ h_n(x) \qquad (26)$$

называется чебышевской или Т-системой на этом множестве, если любой обобщенный полином $P_n(x)$ вида

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k h_k(x), \qquad (27)$$

где c_k – числа, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, имеет на m,M не более чем n различных корней.

Теорема 3 ([2], с. 20). *Для того чтобы система функций (26), заданных на m,M, была чебышевской на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы определитель вида*

$$\begin{vmatrix} h_0(x_0) & h_0(x_1) & \ldots & h_0(x_n) \\ h_1(x_0) & h_1(x_1) & \ldots & h_1(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_n(x_0) & h_n(x_1) & \ldots & h_n(x_n) \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля для произвольно взятой системы из $n+1$ различных между собою точек x_j $(0 \le j \le n)$ из отрезка m,M.

Далее нам потребуется теорема об альтернансе ([2], с. 26).

Теорема 4. *Пусть на отрезке m,M заданы чебышевская система функций $h_k(x)$ $(k = 0,1,\ldots,n)$ и непрерывная функция $f(x)$. Тогда для того, чтобы некоторый полином $P_n^*(x)$ был полиномом наилучшего приближения по системе $h_k(x)$ $(k = 0,1,\ldots,n)$ для функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы на m,M нашлась по крайней мере одна система из n+2 точек x_j (альтернанс)*

$$m \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2} \le M\,,$$

в которых разность

$$f(x) - P_n^*(x) = r_n(x)$$

1) *поочередно принимает значения разных знаков;*
2) *достигает по модулю наибольшего на m,M значения, так что*

$$r_n(x_1) = -r_n(x_2) = \ldots = (-1)^{k+1} r_n(x_{n+2}) = \pm\|r_n\|.$$

Вернемся к выражению (25). В нашем случае в качестве функции $f(x)$ берется единичная функция, а $P_1^*(x)$ имеет вид

$$P_1^*(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)\,, \qquad (28)$$

т.е. для единичной функции требуется найти полином наилучшего приближения вида (28).

Будем предполагать, что система функций $f(x), g(x)$ является чебышевской, причем функции $f(x), g(x)$ выбраны таким образом, что

$$\begin{vmatrix} f(x_1) & f(x_2) \\ g(x_1) & g(x_2) \end{vmatrix} > 0$$

всякий раз, когда $m \le x_1 < x_2 \le M$.

Теорема 5. *Пусть функции $f(x), g(x)$ являются непрерывно дифференцируемыми на отрезке m,M, производная $f^{'}(x)$ сохраняет знак на m,M, а функция*

$$\frac{g^{'}(x)}{f^{'}(x)} \qquad (29)$$

является строго монотонной.

Тогда искомыми значениями параметров α, β являются следующие:

$$\alpha = \frac{(1-q_*)[g(M)-g(m)]}{f(m)g(M)-g(m)f(M)}\,, \qquad (30)$$

$$\beta = \frac{(1-q_*)[f(m)-f(M)]}{f(m)g(M)-g(m)f(M)}\,, \qquad (31)$$

при этом

$$q_* = \left|\frac{g(M)-g(m)\ \ f(x_2)-f(m)\ -\ f(M)-f(m)\ \ g(x_2)-g(m)}{g(M)-g(m)\ \ f(x_2)+f(m)\ -\ f(M)-f(m)\ \ g(x_2)+g(m)}\right|, \qquad (32)$$

$$x_2 = \left(\frac{g'}{f'}\right)^{-1}\left[\frac{g(M)-g(m)}{f(M)-f(m)}\right]. \qquad (33)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Предположим для определенности, что функция (29) строго возрастает. Для применения теоремы об альтернансе рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} q+\alpha f(x_1)+\beta g(x_1)=1, \\ -q+\alpha f(x_2)+\beta g(x_2)=1, \\ q+\alpha f(x_3)+\beta g(x_3)=1,\ m \le x_1 < x_2 < x_3 \le M. \end{cases} \qquad (34)$$

Определитель Δ системы (34) будет иметь вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & f_1 & g_1 \\ -1 & f_2 & g_2 \\ 1 & f_3 & g_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f_1 & g_1 \\ 0 & f_1+f_2 & g_1+g_2 \\ 0 & f_3-f_1 & g_3-g_1 \end{vmatrix} =$$

$$=(g_3-g_1)(f_1+f_2)-(f_3-f_1)(g_1+g_2),$$

где $f_j = f(x_j), g_j = g(x_j)$ $(j=1,2,3)$.

Далее

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & f_1 & g_1 \\ 1 & f_2 & g_2 \\ 1 & f_3 & g_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f_1 & g_1 \\ 0 & f_2-f_1 & g_2-g_1 \\ 0 & f_3-f_1 & g_3-g_1 \end{vmatrix} =$$

$$=(g_3-g_1)(f_2-f_1)-(f_3-f_1)(g_2-g_1).$$

Таким образом,

$$q = \frac{(g_3-g_1)(f_2-f_1)-(f_3-f_1)(g_2-g_1)}{(g_3-g_1)(f_1+f_2)-(f_3-f_1)(g_1+g_2)}. \qquad (35)$$

Найдем производную

$$\Delta^2\frac{\partial q}{\partial x_3} = \left[g_3'(f_2-f_1)-f_3'(g_2-g_1)\right]\times$$

$$\times\ (g_3-g_1)(f_1+f_2)-(f_3-f_1)(g_1+g_2)\ -$$

$$-\ (g_3-g_1)(f_2-f_1)-(f_3-f_1)(g_2-g_1)\ \times$$

$$\times\left[g_3'(f_1+f_2)-f_3'(g_1+g_2)\right]=$$

$$=[(f_2-f_1)(g_3-g_1)(f_1+f_2)-(f_2-f_1)(f_3-f_1)(g_1+g_2)-$$

$$-(g_3-g_1)(f_2-f_1)(f_1+f_2)+(f_3-f_1)(g_2-g_1)(f_1+f_2)]g_3'+$$

$$+[(f_3-f_1)(g_2-g_1)(g_1+g_2)-(g_3-g_1)(f_1+f_2)(g_2-g_1)+$$

$$+(f_2-f_1)(g_3-g_1)(g_1+g_2)-(f_3-f_1)(g_2-g_1)(g_1+g_2)]f_3'=$$

$$=(f_3-f_1)[(f_1+f_2)(g_2-g_1)-(f_2-f_1)(g_1+g_2)]g_3'+$$

$$+(g_3-g_1)[(f_2-f_1)(g_1+g_2)-(f_1+f_2)(g_2-g_1)]f_3'=$$

$$=2\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}[(f_3-f_1)g_3'-(g_3-g_1)f_3']=$$

$$=2(f_3-f_1)f_3'\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}\left[\frac{g_3'}{f_3'}-\frac{g'(c)}{f'(c)}\right]>0, \quad c\in\ x_1,x_3\ .$$

Из последнего неравенства следует, что при фиксированных $x_1, x_2 \in\ m, M$ максимальное значение q достигается при $x_3 = M$.

Аналогично

$$\Delta^2\frac{\partial q}{\partial x_1} = 2(f_3-f_1)f_1'\begin{vmatrix} f_2 & f_3 \\ g_2 & g_3 \end{vmatrix}\left[\frac{g_1'}{f_1'}-\frac{g'(c)}{f'(c)}\right]<0,$$

т.е. $x_1 = m$.

Для нахождения производной $\dfrac{\partial q}{\partial x_2}$ поступим следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & f_1 & g_1 \\ -1 & f_2 & g_2 \\ 1 & f_3 & g_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f_1 & g_1 \\ 0 & f_2+f_1 & g_2+g_1 \\ 0 & f_3-f_1 & g_3-g_1 \end{vmatrix} =$$

$$=(f_2+f_1)(g_3-g_1)-(f_3-f_1)(g_1+g_2);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & f_1 & g_1 \\ 1 & f_2 & g_2 \\ 1 & f_3 & g_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f_1 & g_1 \\ 0 & f_2-f_1 & g_2-g_1 \\ 0 & f_3-f_1 & g_3-g_1 \end{vmatrix} =$$

$$=(f_2-f_1)(g_3-g_1)-(f_3-f_1)(g_2-g_1).$$

Тогда

$$\Delta^2\frac{\partial q}{\partial x_2} = \frac{\partial\Delta_1}{\partial x_2}\cdot\Delta-\Delta_1\frac{\partial\Delta}{\partial x_2} =$$

$$=\left[f_2'(g_3-g_1)-(f_3-f_1)g_2'\right]\ (f_2+f_1)(g_3-g_1)-(f_3-f_1)(g_1+g_2)\ -$$

$$-\ (f_2-f_1)(g_3-g_1)-(f_3-f_1)(g_2-g_1)\ \left[f_2'(g_3-g_1)-(f_3-f_1)g_2'\right]=$$

$$=2\ f_1(g_3-g_1)-(f_3-f_1)g_1\ \left[f_2'(g_3-g_1)-(f_3-f_1)g_2'\right]=$$

$$=2\begin{vmatrix} f_1 & f_3 \\ g_1 & g_3 \end{vmatrix}(f_3-f_1)\left[f_2'\cdot\frac{g_3-g_1}{f_3-f_1}-g_2'\right]=$$

$$=2(f_3-f_1)f'(x)\begin{vmatrix} f_1 & f_3 \\ g_1 & g_3 \end{vmatrix}\cdot\left[\frac{g'(c)}{f'(c)}-\frac{g'(x_2)}{f'(x_2)}\right].$$

Точка x_2, для которой выражение в квадратных скобках равно нулю, определяется уравнением

$$\frac{g'(c)}{f'(c)} = \frac{g(M)-g(m)}{f(M)-f(m)} = \frac{g'(x_2)}{f'(x_2)},$$

т.е.

$$x_2 = \left(\frac{g'}{f'}\right)^{-1}\left[\frac{g(M)-g(m)}{f(M)-f(m)}\right].$$

После нахождения точки x_2 итерационные параметры α, β находятся из системы уравнений (34) и выражаются равенствами (30)–(31).

В качестве функции $g(x)$ можно взять функцию $f\ f(x)-f(0)$ и тогда соответствующий ИП будет иметь вид

$$x_{n+1}=x_n-\alpha f(x)-\beta\{f(f(x)-f(0)\}. \qquad (36)$$

В общем случае в качестве ИФ берется функция

$$\varphi(x)=x-\alpha_1 f(x)-\sum_{k=2}^{n}\alpha_k\left[f^k(x)-f^{k-1}(0)\right], \qquad (37)$$

где $f^k(x)$ – k-я итерация функции f, т.е.

$$f^k(x)=f\ \ldots f\ f(x)\ , \qquad (38)$$

где операция взятия функции f производится k раз.

Приведем следующий пример. Пусть

$$f(x)=x^2-4,\quad m=\frac{3}{2},\quad \text{M}=3,$$

тогда

$$\alpha=0{,}265,\qquad \beta=-0{,}011$$

и ИП (36) определяется равенством:

$$x_{n+1}=x_n-0{,}353x_n^2+0{,}011x_n^4+1{,}236. \qquad (39)$$

При $x_1=1{,}8$ получаем $x_2=2{,}008$, что показывает высокую эффективность такого ИП.

Постоянная сжатия q^* равна

$$q^*=\max_{x\in\left[\frac{3}{2},3\right]}\left|1-0{,}706x+0{,}044x^3\right|\approx 0{,}09.$$

Различные подходы, направленные на ускорение сходимости ИП, изложены в монографиях [3–4].

Заключение. Таким образом, полученные результаты позволяют существенно сократить число итераций в процессе приближенного нахождения решения уравнения $f(x)=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский, М.А. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
2. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
3. Ортега, Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболт. – М.: Мир, 1975. – 560 с.
4. Трауб, Дж. Итерационные методы решения уравнений / Дж. Трауб. – М.: Мир, 1985. – 264 с.

Поступила в редакцию 24.02.2011. Принята в печать 29.04.2011

Адрес для корреспонденции: 210026, г. Витебск, ул. Коммунистическая, д. 12/23, кв. 16,
e-mail: Yurii_Trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.