УДК 517.936:977.1

Управляемость вполне интегрируемых линейных стационарных систем Пфаффа

О.В. Храмцов
Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Рассматривается процесс, описываемый вполне интегрируемыми стационарными системами Пфаффа, которые являются линейными по входу, управлению, и по выходу, состоянию. Исследуются следующие свойства управляемости состоянием системы Пфаффа: полная управляемость – когда заданы произвольные начальное и конечное состояния системы – постоянные вектора, полная континуум управляемость – когда заданы произвольное начальное состояние – постоянный вектор и произвольное конечное состояние – аналитическая вектор-функция, полная максимальная управляемость – когда заданы произвольное начальное состояние и произвольные конечные состояния – постоянный вектор и аналитическая вектор-функция. Все множество систем Пфаффа разбито на три класса, в каждом из которых получены условия наличия свойств управляемости системы Пфаффа в классе аналитических управлений. Условия носят ранговый характер от некоторой матрицы, составленной по известным матрицам исходной системы. Полученные результаты применяются к исследованию управляемости линейных стационарных систем дифференциальных уравнений с частными производными.

Ключевые слова: *системы Пфаффа, полная интегрируемость. управляемость.*

Controllability of the totally integrable linear stationary Pfaff systems

O.V. Khramtsov
Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

We are considering the process described by quite integrated stationary Pfaff systems which are linear according to the entrance, management exit and the status. The following characteristics of the management of Pfaff system are studied: complete management – when arbitrary initial and final statuses of the system are given, constant vector and arbitrary final status, analytical vector function, complete maximal management, when arbitrary initial status and arbitrary final status are given, constant vector and analytical vector function. The whole set of Pfaff systems is divided into three classes in each of which conditions of the presence of management characteristics of Pfaff system within the class of analytical managements have been obtained. The findings which we have got are applied for the study of the management of linear stationary systems of differential equations with quotient derivatives.

Key words: *Pfaff system, totally integrable linear stationary, controllability.*

В данной работе продолжается изучение свойств управляемости вполне интегрируемых линейных стационарных систем Пфаффа. В [1] получен критерий двухточечной полной управляемости в случае, когда заданы произвольные постоянные начальный вектор состояния и конечный вектор состояния. В [2] введено понятие «континуум управляемости», когда конечным состоянием является произвольная ограниченная аналитическая вектор-функция, и доказан критерий наличия этого свойства при двумерном векторе управления. В настоящей работе изучаются свойства континуум и максимальной управляемостей в случае, когда размерность вектора управления больше двух. В отличие от случая систем обыкновенных дифференциальных уравнений [3] переход к управлению большей размерности представляет определенные трудности. Доказан ряд условий наличия свойств континуум и максимальной управляемостей. Эти условия носят ранговый характер от некоторых матриц, составленных по известным матрицам исходной системы Пфаффа.

Рассматривается процесс, описываемый вполне интегрируемой линейной системой Пфаффа Θ

$$\Theta: dx = (A_1x + B_1u(s))ds_1 + (A_2x + B_2u(s))ds_2, \quad (1)$$

где $s = (s_1, s_2) \in R^2$, $x \in R^n$ – выход, состояние системы, $u \in R^r$ – вход, управление, непрерывно дифференцируемая вектор-функция, $r \le 2n$, A_1, A_2, B_1, B_2 – постоянные вещественные матрицы соответствующих размерностей. Условия полной интегрируемости системы (1) имеют вид [4, с. 44]

$$A_1A_2 = A_2A_1, \quad (2)$$

$$B_1\frac{\partial u}{\partial s_2} - B_2\frac{\partial u}{\partial s_1} = Pu, \quad P \equiv A_2B_1 - A_1B_2. \quad (3)$$

При выполнении этих условий для заданного вектора u система (1) имеет единственное решение с начальным условием

$$x(0) = x^0. \quad (4)$$

Цель работы – изучить наличие свойств управляемости вполне интегрируемых линейных стационарных систем Пфаффа.

Рассмотрим свойства управляемости систем Пфаффа (1) в смысле следующих определений.

Определение 1 [1]. *Система (1) называется вполне управляемой, если для произвольных состояний* $x^0, x^1 \in R^n$ *существуют точка* $s^1 = (s_1^1, s_2^1),\ 0 < s_1^1, s_2^1 < \infty,$ *и непрерывно дифференцируемое управление* $u = u(s, x^0, x^1)$ *такие, что для некоторого решения системы (1) наряду с условием (4) выполняется условие*

$$x(s^1) = x^1. \quad (5)$$

В данной работе изучается возможность управления системой (1) при конечном условии

$$x(s_1, s_2^0) = \phi(s_1),\ s_1 \in I = (a,b), \quad (6)$$

где ϕ – ограниченная аналитическая вектор-функция.

Определение 2 [2]. *Система (1) называется вполне континуум управляемой, если для произвольного состояния* $x^0 \in R^n$ *и произвольной аналитической ограниченной вектор-функции* ϕ *существуют интервал I, конечный момент* $s_2^0 > 0$ *и непрерывно дифференцируемое управление* $u = u(s, x^0, \phi)$ *такие, что для некоторого решения системы (1) наряду с условием (4) выполняется условие (6).*

Рассмотрим вполне интегрируемые системы Пфаффа (1) класса Θ_1, то есть такие, что для матриц этих систем выполняются условия [1]

$$rank[B_1, B_2] = rank[B_1, B_2, P] = m,\ m \le r, \quad (7)$$

$$\exists\alpha \in R^1 : rank[\alpha B_1 + (1-\alpha)B_2] = m. \quad (8)$$

Выполнение условий (7)–(8) означает, согласно теории систем Пфаффа [5], что система (1) находится в инволюции [5, с. 176] и не требует продолжения [5, с. 287] в инволюцию.

Пусть вектор управления u имеет размерность $r \ge 2$ $(r \le 2n)$. Если ввести вспомогательный параметр q равенством $m + q = r$, $q \in \{0,1,...,r-1\}$, то для него возможны варианты соотношения с числом m: a) $q = 0$, b) $m = q$, c) $m > q$, d) $m < q$.

Предположение 1. *Не существует линейной замены для вектора управления* $u = Dv, v \in R^p$, D *– вещественная постоянная матрица, с условием* $p < r$.

В силу предположения 1 случай d) невозможен. Поэтому класс систем Пфаффа Θ_1 разбивается на три класса:

класс Θ_{11} в случае $q = 0$, т.е. $m = r$;

класс Θ_{12} в случае $m = q$;

класс Θ_{13} в случае $m > q$.

Рассмотрим свойства управляемости систем Пфаффа в каждом классе.

Управляемость систем Пфаффа класса Θ_{11}. К классу Θ_{11} относятся те системы Пфаффа Θ_1, для которых наряду с условиями (7)–(8) выполнено условие $m = r$, где m число из (7), а r – размерность вектора управления.

Предложение 1. *Системы Пфаффа класса* Θ_{11} *не являются вполне континуум управляемыми ни при каких условиях.*

Действительно, если $m = r$, то свобода вектора управления в силу дифференциального ограничения (3) заключается только в выборе начального состояния управления $u(t_1, 0)$. Этот ресурс недостаточен для удовлетворения условия (6), а, значит, и для континуум управляемости системой (1). Он может быть использован на решение задачи полной управляемости по определению 1. В работе [1] получен критерий полной управляемости систем Пфаффа класса Θ_1, в том числе и класса Θ_{11}.

Теорема 1. *Система Пфаффа класса* Θ_1 *вполне управляема тогда и только тогда, когда*

$$\exists\alpha \in R^1 : rank Q(\alpha) = n,$$

здесь $Q(\alpha) \equiv [B(\alpha), A(\alpha)B(\alpha), ..., A^{n-1}(\alpha)B(\alpha)]$,

$$B(\alpha) \equiv \alpha B_1 + (1-\alpha)B_2,\ A(\alpha) \equiv \alpha A_1 + (1-\alpha)A_2.$$

Управляемость систем Пфаффа класса Θ_{12}. К классу Θ_{12} относятся те системы Пфаффа Θ_1, для которых наряду с условиями (7)–(8) выполнено условие $m = q$, ($m + q = r$), где m – число из (7), а r – размерность вектора управления. Критерий полной управляемости по определению 1 приведен в теореме 1.

Условие (7) позволяет выбрать из матрицы $[B_1, B_2]$ ровно m линейно независимых столбцов, из которых составляется матрица B

$$B \equiv [b_1^{[k_1]}, b_1^{[k_2]}, ..., b_1^{[k_s]}, b_2^{[l_1]}, ..., b_2^{[l_p]}],\ \ s + p = m \quad (9)$$

(нижний индекс – номер матрицы B_i, верхний – номер столбца в этой матрице). В свою очередь условие (8) означает, что $k_i \neq l_j$ для любых $i \in \{1,...,s\}, j \in \{1,..., p\}$. Тем самым в матрице B нет столбцов из матриц B_1, B_2 с одинаковыми номерами.

Введение (9) матрицы B позволяет получить для матриц B_1, B_2, P представления

$$B_1 = BL_1,\ B_2 = BL_2,\ P = BC, \qquad (10)$$

где L_1, L_2, C – некоторые однозначно определенные вещественные постоянные $(m \times r)$ – матрицы, причем в силу (7) имеем

$$rank[L_1, L_2] = m. \qquad (11)$$

В случае класса Θ_{12} в силу предположения 1 эти матрицы обладают также свойством

$$\Delta = \det L \neq 0,\ L \equiv \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}. \qquad (12)$$

Действительно, если возможно уменьшение размерности r вектора управления u за счет введения нового управления v размерности $p < r$, то существуют вещественные $(r \times p)$-матрицы D_i такие, что имеют место равенства

$$\begin{cases} L_1 u = D_1 v \\ L_2 u = D_2 v \end{cases}.$$

Для существования вектора v меньшей размерности необходима и достаточна линейная зависимость строк матрицы L, а это означает, в силу предположения 1, что имеет место условие (12).

Справедлива

Теорема 2. *Система Пфаффа (1) класса* Θ_{12} *вполне континуум управляема тогда и только тогда, когда*

$$\exists \alpha \in R^1 : rank Q_2(\alpha) = n, \qquad (13)$$

где

$$Q_2(\alpha) \equiv [B, A_2(\alpha)B, ..., A_2^{n-1}(\alpha)B],$$
$$A_2(\alpha) \equiv \alpha A_1 + A_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. А. Заметим, что если условие (13) выполняется для некоторого $\alpha \in R^1$, то оно выполняется почти всюду, за исключением, возможно, конечного множества K_1 значений α.

В системе (1) сделаем замену аргумента

$$\begin{cases} s_1 = t_1 + \alpha t_2 \\ s_2 = \alpha t_1 + t_2 \end{cases},\ \alpha \in R^1,\ t = (t_1, t_2),\ \alpha \neq \pm 1. \quad (14)$$

После обозначений $x(s) = y(t),\ \ u(s) = v(t)$ с учетом введения (9) матрицы B и представлений (10) матриц B_1, B_2, P система (1) примет вид

$$\begin{aligned} dy &= (A_1(\alpha)y + BL_1(\alpha)v(t))dt_1 + \\ &+ (A_2(\alpha)y + BL_2(\alpha)v(t))dt_2, \end{aligned} \qquad (15)$$

здесь $t = (t_1, t_2) \in R^2$,

$$A_1(\alpha) \equiv A_1 + \alpha A_2,\ \ A_2(\alpha) \equiv \alpha A_1 + A_2,$$
$$L_1(\alpha) \equiv L_1 + \alpha L_2,\ \ L_2(\alpha) \equiv \alpha L_1 + L_2.$$

Условие (2) для системы (15) выполняется, а дифференциальное ограничение (3) для систем Пфаффа класса Θ_{12} после пересчета с учетом представлений (10) и замены (14) принимает вид

$$L_1(\alpha)\frac{\partial v}{\partial t_2} - L_2(\alpha)\frac{\partial v}{\partial t_1} = (1 - \alpha^2)Cv. \qquad (16)$$

Б. Введем новое управление $(f, w) \in R^{2m}$ по формулам

$$\begin{cases} L_1(\alpha)v = f \\ L_2(\alpha)v = w \end{cases},\ L(\alpha) \equiv \begin{bmatrix} L_1(\alpha) \\ L_2(\alpha) \end{bmatrix}. \qquad (17)$$

Определитель матрицы $L(\alpha)$ коэффициентов в системе (17) не равен нулю в силу свойства (12) почти всюду в R^1, за исключением, возможно, конечного множества K_2 значений α. Значит, соответствие (17) между векторами v и (f, w) взаимно однозначно для значений $\alpha \in R^1 \setminus K_2$.

Согласно (17) система (15) перепишется в виде

$$\begin{aligned} dy &= (A_1(\alpha)y + Bf(t))dt_1 + \\ &+ (A_2(\alpha)y + Bw(t))dt_2. \end{aligned} \qquad (18)$$

Условие (2) для системы (18) выполняется, а дифференциальное ограничение (16) для систем Пфаффа класса Θ_{12} после пересчета с учетом представлений (10) и замены (17) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} - \frac{\partial w}{\partial t_1} = (1 - \alpha^2)CL^{-1}(\alpha)\begin{pmatrix} f \\ w \end{pmatrix},$$
$$L(\alpha) \equiv \begin{bmatrix} L_1(\alpha) \\ L_2(\alpha) \end{bmatrix}. \qquad (19)$$

В. Общее решение для системы (18) записывается в виде [4, с. 48]

$$y(t) = \exp(A_1(\alpha)t_1 + A_2(\alpha)t_2) \times \qquad (20)$$
$$\times [y^0 + \int_0^t \exp(-A_1(\alpha)t_1 - A_2(\alpha)t_2)B(f(t)dt_1 + w(t)dt_2)].$$

Начальное условие (4) выполняется: $y(0) = x(0) = x^0$. В правой части (20) стоит криволинейный интеграл второго рода, который в силу условий (2) и (19) не зависит от пути интегрирования. Поэтому решение (20) можно представить в виде

$$y(t) = \exp(A_1(\alpha)t_1 + A_2(\alpha)t_2)\times$$
$$\times[y^0 + \int_0^{t_1}\exp(-A_1(\alpha)t_1)Bf(t_1,0)dt_1] +$$
$$+\exp(A_1(\alpha)t_1 + A_2(\alpha)t_2)\times$$
$$\times\int_0^{t_2}\exp(-A_1(\alpha)t_1 - A_2(\alpha)t_2)Bw(t)dt_2.$$

Если в (21) положить $t_2 = 0$, то получится равенство

$$h(t_1,0) = \int_0^{t_1}\exp(-A_1(\alpha)t_1)Bf(t_1,0)dt_1, \qquad (22)$$

где $h(t_1,0) \equiv \exp(-A_1(\alpha)t_1)y(t_1,0) - y^0$.

В случае заданной произвольной аналитической ограниченной функции $f(t_1,0)$ при $t_2 = t_2^0$ из решения (21) конечное условие (6) принимает вид

$$H(t_1,t_2^0) = \int_0^{t_2^0}\exp(-A_2(\alpha)t_2)Bw(t)dt_2, \qquad (23)$$

здесь

$$H(t_1,t_2^0) \equiv \exp(A_1(\alpha)t_1)[\exp(-A_1(\alpha)t_1 - A_2(\alpha)t_2^0)\times$$
$$\times\phi(t_1 + \alpha t_2^0) - y^0 - \int_0^{t_1}\exp(-A_1(\alpha)t_1)Bf(t_1,0)dt_1].$$

Г. В качестве промежуточного вспомогательного управления теперь используется аналитическая ограниченная функция

$$w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t_1^i z_i(t_2), \qquad (24)$$

где вектора $z_i \in R^m$ подлежат определению. Аналитическая функция H в (23) раскладывается в ряд

$$H(t_1,t_2^0) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t_1^i, \ \ a_i \in R^n, \qquad (25)$$

здесь вещественные вектора $a_i \in R^n$ являются известными. В силу (24) и (25) задача (23) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t_1^i = \int_0^{t_2^0}\exp(-A_2(\alpha)t_2)B\sum_{i=0}^{\infty} t_1^i z_i(t_2)dt_2. \qquad (26)$$

В результате сравнения коэффициентов при одинаковых степенях t_1^i получается счетное множество проблем моментов

$$a_i = \int_0^{t_2^0}\exp(-A_2(\alpha)t_2)Bz_i(t_2)dt_2, \ i = 0,1,2,\ldots. \qquad (27)$$

Каждая из проблем моментов в (27) имеет решение $z_i(t_2)$ тогда и только тогда, когда [6, с. 42], [3, с. 182] выполняется условие (13) теоремы 2. Решений каждой проблемы моментов бесконечное множество и при этом и в классе аналитических функций [6, с. 51], [7]. Выберем в каждой проблеме моментов такое решение z_i, чтобы ряд (24) сходился для точек (t_1,t_2) из некоторой области $G = I_1 \times I_2 = (a_1,b_1)\times[0,t_2^0]$. Тем самым найден вектор w. Для отыскания вектора f имеем из условия (19) начальную задачу

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} - (1-\alpha^2)CL^{-1}(\alpha)\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial w}{\partial t_1} + (1-\alpha^2)CL^{-1}(\alpha)\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}, \qquad (28)$$
$$f(t_1,0) = \varphi(t_1),$$

где $\varphi(t_1)$ – некоторая ограниченная аналитическая функция, пока незаданная. Задача (28) всегда имеет единственное решение f в области G, а, значит, вектор (f,w) найден. В результате замен, обратных к (17) и (14), из вектора (f,w) и интервала I_1 получаются искомые управление u и интервал I. Все ограничения на параметр α выполняются почти всюду в R^1, за исключением, возможно, конечного множества $K = \bigcup_1^2 K_i$ значений α. Таким образом, задача полной континуум управляемости разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (13) теоремы 2. Теорема доказана.

Замечание 1. Условие (13) на самом деле достаточно проверять для произвольного конечного множества числом n_1 значений $\alpha \in R^1$, где n_1 – количество значений α во множестве K_1.

Замечание 2. В доказательстве теоремы 2 в задаче (28) функция $\varphi(t_1)$ была выбрана произвольно. Поэтому эту свободу выбора можно использовать для управления системой (1).

Определение 3. *Система (1) называется вполне максимально управляемой, если для произвольных состояний* $x^0, x^1 \in R^n$ *и произвольной* *аналитической ограниченной функции* ϕ *существуют точка* $s^1=(s_1^1,s_2^1)$, $0<s_1^1,s_2^1<\infty$, *момент* $s_2^0>0$, *интервал* $I=(a,b)$ *и непрерывно дифференцируемое управление* $u=u(s,x^0,x^1,\phi)$ *такие, что для некоторого решения* φ *системы (1) наряду с условием (4) выполняются условия (5) и (6).*

Имеет место

Теорема 3. *Система Пфаффа (1) класса* Θ_{12} *вполне максимально управляема тогда и только тогда, когда выполняется условие (13).*

Доказательство. В системе (1) сделаем замену аргумента (14). Условие (4) выполняется в силу формулы общего решения (21). Согласно теореме 2 условие (13) обеспечивает выполнимость требования (6) для функции φ, определяемой ниже. Чтобы рассмотреть условие (5) положим в (21) $t_2^0=0$, $t_1=t_1^0$ и получим проблему моментов (см. (22))

$$h(t_1^0,0)=\int_0^{t_1^0}\exp(-A_1(\alpha)t_1)B\varphi(t_1)dt_1,$$

здесь $h(t_1^0,0)\equiv\exp(-A_1(\alpha)t_1^0)y^1-y^0$.

Эта проблема моментов имеет аналитическое решение $\varphi(t_1)$ тогда и только тогда, когда [3, с. 182], [1] выполняется условие

$$\exists\alpha\in R^1: rank Q_1(\alpha)=n, \tag{29}$$

где $Q_1(\alpha)\equiv[B,A_1(\alpha)B,...,A_1^{n-1}(\alpha)B]$,

$$A_1(\alpha)\equiv A_1+\alpha A_2.$$

Очевидно, что условие (29) имеет место почти всюду в R^1, за исключением, возможно, конечного множества K_3 значений α, тогда и только тогда, когда выполняется условие (13). Поэтому существует значение $\alpha\in R^1\setminus\bigcup_1^3 K_i$, для которого выполнены все требования доказательства теоремы на параметр α. Теорема 3 доказана.

Управляемость систем Пфаффа класса Θ_{13}. К классу Θ_{13} относятся те системы Пфаффа Θ_1, для которых наряду с условиями (7)–(8) выполнено условие $m>q$, $(m+q=r)$, где m – число из (7), а r – размерность вектора управления. Критерий полной управляемости по определению 1 приведен в теореме 1.

Рассмотрим представления (10) матриц системы (1) и замену аргумента

$$\begin{cases} s_1=t_1+\beta_1 t_2 \\ s_2=\alpha t_1+\beta_2 t_2 \end{cases},$$

$$\alpha,\beta_1,\beta_2\in R^1,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}1 & \beta_1\\ \alpha & \beta_2\end{vmatrix}\neq 0. \tag{30}$$

В результате система (1) примет вид

$$dy=(A_1(\alpha)y+BL_1(\alpha)v(t))dt_1+$$
$$+(A_2(\beta)y+BL_2(\beta)v(t))dt_2,$$

здесь $\beta=(\beta_1,\beta_2)$,

$$A_1(\alpha)\equiv A_1+\alpha A_2,\ A_2(\beta)\equiv\beta_1 A_1+\beta_2 A_2,$$
$$L_1(\alpha)\equiv L_1+\alpha L_2,\ L_2(\beta)\equiv\beta_1 L_1+\beta_2 L_2.$$

В силу предположения 1 ранг матрицы $L_2(\beta)$ удовлетворяет неравенству $q\le rank L_2(\beta)\le m$ почти всюду в R^2, за исключением, возможно, конечного множества K_4 направлений, задаваемых вектором β. Для систем класса Θ_{13} взаимно однозначная замена (17) в общем случае невозможна, так как матрица $L(\beta)$ имеет размерности $(2m\times r)$ и $r<2m$. Назовем спектром линейной зависимости матрицы $L_2(\beta)$ множество Ω значений векторов β, для которых $rank L_2(\beta)=q$. Если $\beta^{(i)}\in\Omega$, то матрица $L_2(\beta)$ представима в виде $L_2(\beta^{(i)})=M_i L_2^0(\beta^{(i)})$, где матрица $L_2^0(\beta^{(i)})$ составлена из линейно независимых строк матрицы $L_2(\beta^{(i)})$, M_i – некоторая однозначно определенная постоянная $(m\times m)$-матрица. Имеет место достаточное условие континуум управляемости систем класса Θ_{12}.

Теорема 4. *Для полной континуум управляемости системы Пфаффа (1) класса* Θ_{13} *достаточно существование вектора* $\beta^{(i)}$ *из спектра* Ω *линейной зависимости матрицы* $L_2(\beta)$, *для которого выполняется условие*

$$rank Q_3(\beta^{(i)})=n, \tag{31}$$

здесь

$$Q_3(\beta)\equiv[BM_i,A_2(\beta)BM_i,...,A_2^{n-1}(\beta)BM_i],$$
$$A_2(\beta)\equiv\beta_1 A_1+\beta_2 A_2.$$

В силу (30) и представления для матрицы $L_2(\alpha_i)=M_i L_2^0(\alpha_i)$ возможна взаимно однозначная замена

$$\begin{cases} L_1(\alpha)v=f \\ L_2^0(\beta^{(i)})v=w \end{cases},\ f\in R^m, w\in R^q.$$

В дальнейшем доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

В результате рассуждений, аналогичных приведенным при доказательстве теорем 3 и 4, получается

Теорема 5. *Для полной максимальной управляемости системы Пфаффа класса* Θ_{13} *достаточно существование вектора* $\beta^{(i)}$ *из спектра* Ω *линейной зависимости матрицы* $L_2(\beta)$, *для которого выполняются условие (31) и условие*

$$\exists\alpha \in R^1 : rank Q_1(\alpha) = n,$$

здесь $Q_1(\alpha) \equiv [B, A_1(\alpha)B,..., A_1^{n-1}(\alpha)B],$

$$A_1(\alpha) \equiv A_1 + \alpha A_2.$$

Управляемость линейных стационарных систем Коши–Ковалевской. Полученные результаты применимы к исследованию свойства континуум управляемости задачи

$$\frac{\partial x}{\partial s_2} = Ax + C\frac{\partial x}{\partial s_1} + Bu(s),\ x \in R^n, u \in R^r. \quad (32)$$

$$x(s_1, 0) = \varphi(s_1),\ s_1 \in I_1,\ (0,0) \in I_1, \quad (33)$$

$$x(s_1, s_2^0) = \phi(s_1),\ s_1 \in I_2, \quad (34)$$

где φ, ϕ – произвольно заданные ограниченные аналитические вектор-функции.

После введения [8, с. 30] вектора параметрических переменных $\frac{\partial x}{\partial s_1} = z$ система (32) может быть представлена в форме системы Пфаффа [9, с. 324]

$$dx = Ez(s)ds_1 + (Ax + Cz(s) + Bu(s))ds_2$$

(здесь E – единичная $(n \times n)$-матрица). Вектор параметрических переменных z отвечает за разрешимость начальной задачи (32)–(33) и поэтому не может быть использован в задаче управления для обеспечения условия (34). В результате замены

$$\begin{cases} s_1 = t_1 + \alpha t_2 \\ s_2 = t_2 \end{cases},\ \alpha \in R^1,\ t = (t_1, t_2),$$

получается система

$$dy = Ep(t)dt_1 + (Ay + EL_2(\alpha)\begin{pmatrix} p(t) \\ v(t) \end{pmatrix})dt_2, \quad (35)$$

здесь $t = (t_1, t_2) \in R^2,\ L_2(\alpha) \equiv [\alpha E + C, B].$

Пусть множество Ω – спектр линейной зависимости строк матрицы $L_2(\alpha)$ из системы (35). Т.е. Ω – это множество значений α, для которых имеет место равенство $rank L_2(\alpha) = rank B$. Если $\alpha_i \in \Omega$, то матрица $L_2(\alpha)$ представима в виде $L_2(\alpha_i) = M_i L_2^0(\alpha_i)$, где матрица $L_2^0(\alpha_i)$ составлена из линейно независимых строк матрицы $L_2(\alpha_i)$, M_i – некоторая однозначно определенная $(n \times n)$-матрица. В результате применения теоремы 4 получается

Теорема 6. *Для полной континуум управляемости системы (32) достаточно существование значения* α_i *из спектра* Ω *линейной зависимости матрицы* $L_2(\alpha)$, *для которого выполняется условие*

$$rank Q_4(\alpha_i) = n,\ Q_4(\alpha_i) \equiv [M_i, A M_i,..., A^{n-1}M_i].$$

Рассмотрим теперь систему из [10]

$$\frac{\partial x}{\partial s_2} = Ax + E\lambda\frac{\partial x}{\partial s_1} + Bu(s),$$

$$\lambda \in R^1,\ x \in R^n,\ u \in R^r. \quad (36)$$

Система (36) – частный случай системы (32). Спектр Ω содержит значение $\alpha = -\lambda$. Тогда матрица $L_2(-\lambda) = B$. В результате применения теоремы 6 получается (см. [10]) критерий континуум управляемости системы (36).

Теорема 7. *Для полной континуум управляемости системы (36) необходимо и достаточно выполнение условия*

$$rank Q_5 = n,\ Q_5 \equiv [B, A B,..., A^{n-1}B].$$

Вопрос о полной максимальной управляемости не возникает, так как для систем Коши–Ковалевской (32) выполняется более сильное начальное условие (33).

ЛИТЕРАТУРА

1. Храмцов, О.В. К управляемости стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 11. – С. 1933–1939.
2. Храмцов, О.В. Задача континуум управляемости линейных стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Веснік ВДУ. – 2010. – № 3(57). – С. 54–59.
3. Ройтенберг, Я.Н. Автоматическое управление / Я.Н. Ройтенберг. – М.: Наука, 1971. – 395 с.
4. Гайшун, И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И.В. Гайшун. – Минск: Наука и техника, 1983. – 371 с.
5. Фиников, С.П. Метод внешних форм Картана / С.П. Фиников. – М.–Л.: ОГИЗ, 1948. – 432 с.
6. Калман, Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М.: Наука, 1971. – 426 с.
7. Шкляр, Б.Ш. Об управляемости в классах простейших функций / Б.Ш. Шкляр // Вестник БГУ. – Сер. 1. – 1972. – № 1. – С. 91–93.
8. Лурье, К.Л. Оптимальное управление в задачах математической физики / К.Л. Лурье. – М.: Наука, 1975. – 478 с.
9. Рашевский, П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными / П.К. Рашевский. – М.: Гостехиздат, 1947. – 354 с.
10. Храмцов, О.В. Управляемость одной линейной стационарной системы в частных производных / О.В. Храмцов // Веснік ВДУ. – 2010. – № 1(55). – С. 101–102.

Поступила в редакцию 23.12.2010. Принята в печать 26.02.2011

Адрес для корреспонденции: 210038, г. Витебск, Московский пр-т, 33, УО «ВГУ им. П.М. Машерова», каф. геометрии и математического анализа, тел.: (8-025)682-19-69 – Храмцов О.В.