МАТЭМАТЫКА

УДК 512.542

ФУНКЦИИ ХАРТЛИ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Н.Т. Воробьёв, Т.А. Жиговец
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Всякая совокупность групп, содержащая вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G, называется классом групп. Пусть $\mathfrak{X}$ *– класс групп. Тогда* $\mathfrak{X}$ *является классом Фиттинга, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных* $\mathfrak{X}$*-подгрупп.*

Цель работы – обобщение понятия квазилокального класса Фиттинга и описание квазилокальных заданий классов Фиттинга.

***Материал и методы.** В исследовании используются методы локализации при изучении классов Фиттинга. В частности, методы теории локальных классов Фиттинга.*

***Результаты и их обсуждение.** Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Пусть* $\mathbb{P}$ *– множество всех простых чисел,* $\pi \in \mathbb{P}$ *и* $\pi' = \mathbb{P}\backslash\pi$*. Если n – целое число, тогда символ* $\pi(n)$ *обозначает множество всех простых чисел, делящих n. В частности,* $\pi(G) = \pi(|G|)$ *множество всех простых чисел, делящих порядок G. Пусть* σ *– некоторое разбиение* $\mathbb{P}$*, т.е.* $\sigma = \{\sigma_i: i \in I\}, \mathbb{P} = \cup_{i\in I} \sigma_i$*,* $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ *для всех* $i \neq j$*,* $\sigma(n) = \{\sigma_i: \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$*.*

Всякое отображение вида $f: \sigma \to$ *{классы групп} назовем* σ*-квазилокальной функцией Хартли или просто* QH_σ*-функцией. Обозначим множество* $\Pi = Supp(f) = \{\sigma_i \in \sigma: f(\sigma_i) \neq \emptyset\}$*.*

Пусть класс групп $QLR_\sigma(f) = \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_i\in\Pi} f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'})$*, где* $\mathfrak{E}_\Pi$ *– класс всех* Π*-групп,* $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ *и* $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ *– классы всех* σ_i*-групп и* σ_i'*-групп соответственно.*

Класс Фиттинга назовем σ*-квазилокальным, если* $\mathfrak{F} = QLR_\sigma(f)$ *для некоторой* QH_σ*-функции* f*.*

Основной результат настоящей работы – следующая

***Теорема.** Пусть* $\mathfrak{F} = LR_\sigma(F)$ *– локальный класс Фиттинга, определяемый канонической* H_σ*-функцией* F *и* $Supp(F) = \Pi$*. Тогда* $\mathfrak{F}$ *выражается максимальной нормально наследственной* σ*-квазилокальной* H*-функцией* f *такой, что:*

$$f(\sigma_i) = \begin{cases} (G|G_{F(\sigma_i)} \text{ покрывает каждый } \mathfrak{F}\text{–центральный главный фактор } G), \text{ если } \sigma_i \in \Pi, \\ \emptyset, \text{ если } \sigma_i \in \Pi'. \end{cases}$$

***Заключение.** В работе описаны новые локальные задания классов Фиттинга, в частности минимальные и максимальные квазилокальные задания классов Фиттинга.*

***Ключевые слова:** σ-квазилокальная функция Хартли, класс Фиттинга, σ-квазилокальный класс Фиттинга.*

HARTLEY FUNCTIONS OF FITTING CLASSES

N.T. Vorobyev, T.A. Zhigovets
Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

Throughout this paper, all groups are finite. A class of groups is a set of groups that, along with each group, contains an isomorphic group. Let $\mathfrak{X}$ be a class group. Class group $\mathfrak{X}$ is called Fitting class if it closed under taking normal subgroups and products of normal $\mathfrak{X}$-subgroups.

The goal of this paper is to generalize the notion of a quasilocal Fitting class and to describe quasilocal assignments of Fitting classes.

***Material and methods.** In the paper, localization methods are used in the study of Fitting classes. In particular, methods of the theory of local Fitting classes.*

***Findings and their discussions.** Throughout the paper, all groups are finite. Let $\mathbb{P}$ be the set of all primes, $\pi \in \mathbb{P}$ and $\pi' = \mathbb{P} \backslash \pi$. If n is an integer, the symbol $\pi(n)$ denotes the set of all primes dividing n. In particular, $\pi(G) = \pi(|G|)$, the set of all primes dividing the order of G. Let σ be some partition of $\mathbb{P}$, that is, $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$, $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$, $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$.*

We call any function f on the form $f: \sigma \to$ {group classes} a Hartley σ-quasilocal function or simply QH_σ-function. Let's denote the set $\Pi = Supp(f) = \{\sigma_i \in \sigma : f(\sigma_i) \neq \emptyset\}$. Let group class $QLR_\sigma(f) = \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'})$, where $\mathfrak{E}_\Pi$ is the class of all Π-group, $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ and $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ are classes of all σ_i-groups and σ_i'-groups, respectively.

A Fitting class is called σ-quasilocal, if there is an QH_σ-function f such that $\mathfrak{F} = QLR_\sigma(f)$.

The basic findings are the following

***Theorem.** Let $\mathfrak{F} = LR_\sigma(F)$ be a local Fitting class with a full and integrated H_σ-function F and $Supp(F) = \Pi$. Then $\mathfrak{F}$ can be defined by a full normal hereditary σ-quasilocal H-function f such that:*

$$f(\sigma_i) = \begin{cases} (G | G_{F(\sigma_i)} \text{ covers every } \mathfrak{F}\text{– central chief factor of } G), \text{if } \sigma_i \in \Pi, \\ \emptyset, \text{if } \sigma_i \in \Pi'. \end{cases}$$

***Conclusion.** In the present paper, new local assignments of the Fitting class are found, namely, minimal and maximal quasilocal Fitting class assignments.*

***Key words:** σ-quasilocal Hartley function, Fitting class, σ-quasilocal Fitting class.*

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. В терминологии и обозначениях мы следуем монографии [1].

В теории классов конечных групп основополагающей является идея локализации. Локальный метод впервые нашел применение в теории формаций. Он был основан В. Гашюцом [2] и дуализирован в теории классов Фиттинга в работе Б. Хартли [3]. Идея локализации Хартли состоит в изучении классов групп в терминах p-групп и радикалов, определяемых отображениями множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел во множества классов Фиттинга. В серии работ А.Н. Скибы [4–6] был предложен σ-метод исследований групп формаций и введено понятие σ-локальной формации. Этот метод был дуализирован в теории классов Фиттинга Н.Т. Воробьёвым, Го В и Чи Л [7]. Ориентиром для исследований в данной работе являются результаты Н.Т. Воробьёва и В.Н. Загурского [8] об описании квазилокальных заданий классов Фиттинга. В связи с этим актуальна задача, используя σ-метод, обобщить понятия квазилокального класса Фиттинга и описать квазилокальные задания класса Фиттинга.

Решение указанной задачи – основная цель настоящей работы.

Материал и методы. В данной статье развиваются новые методы локализации при изучении классов Фиттинга, определяемые разбиениями множества простых чисел. В частности, методы теории локальных классов Фиттинга.

Результаты и их обсуждение. 1. Предварительные сведения. Напомним, что всякая совокупность групп, содержащая вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G, называется *классом групп* [1]. Класс групп – *формация*, если он замкнут относительно факторгрупп и подпрямых произведений [1]. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Тогда $\mathfrak{X}$ является *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп [1]. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Подгруппа $G_\mathfrak{F}$ группы G называется $\mathfrak{F}$-*радикалом* группы G, если она является максимальной из нормальных подгрупп группы G, принадлежащих $\mathfrak{F}$ [1].

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы групп. Произведением классов групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ называют класс групп G такой, что существует нормальная подгруппа K группы G с условием $K \in \mathfrak{F}$ и $G/K \in \mathfrak{H}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *нормально наследственным*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$ следует $\mathrm{N} \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P}\backslash\pi$. Если *n* – целое число, тогда символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих *n*. В частности, $\pi(G) = \pi(|G|)$ множество всех простых чисел, делящих порядок *G*. Пусть σ – некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$,

$\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\,\sigma_i$, $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$, $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$.

Если $|H/K|$ – σ_i-число, то фактор H/K называют σ_i-фактором группы G.

Пусть f – приведенная H_σ-функция σ-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, т.е. $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \sigma$. Тогда σ_i-фактор H/K группы G назовем $\mathfrak{F}$-центральным, если $f(\sigma_i)$-радикал $G_{f(\sigma_i)}$ группы G покрывает H/K, т.е. $G_{f(\sigma_i)}K \geq H$.

Пусть $\sigma(n) = \{\sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset : i \in I\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Тогда группу G назовем *σ-примарной*, если $|\sigma(G)| \leq 1$ [4]. Группа G называется *σ-нильпотентной*, если $G = G_1 \times \ldots \times G_t$ для некоторых σ-примарных $G_1, \ldots, G_t$ [4]. Говорим, что группа G *σ-разрешима*, если каждый главный фактор группы G σ-примарен [4].

Лемма 1.1 [1, VIII.2.4 (d)]. *Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и N – субнормальная подгруппа группы G, тогда $N_\mathfrak{F} = G_\mathfrak{F} \cap N$.*

Лемма 1.2 [9, лемма 3.2]. *Пусть $\mathfrak{F} = QLR_\sigma(f)$ и $\sigma \in \Pi = Supp(f)$. Тогда σ_i-главный фактор H/K f-центральный тогда и только тогда, когда $H = KH_{F(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$.*

Теорема 1.3 [1, глава A.2.1(c)]. *Если N и H – нормальные подгруппы группы G, причем $H \leq N$, то G/N изоморфна $(G/H)/(N/H)$, т.е. $(G/H)/(N/H) \cong G/N$.*

Всякое отображение вида $f : \sigma \to \{$классы групп$\}$ назовем σ-квазилокальной функцией Хартли или просто QH_σ-функцией. Если отображение $f : \sigma \to \{$классы Фиттинга$\}$, то QH_σ-функцию f называют σ-функцией Хартли и f – H_σ-функция [7].

Пусть класс групп $QLR_\sigma(f) = \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_i\in\Pi}\, f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'})$, где $\mathfrak{E}_\Pi$ – класс всех Π-групп, $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ – классы всех σ_i-групп и σ_i'-групп соответственно.

Определение 1.4. *Класс Фиттинга назовем σ-квазилокальным, если $\mathfrak{F} = QLR_\sigma(f)$ для некоторой QH_σ-функции f.*

2. Наименьшая $\mathbf{Q}H_\sigma$-функция. Пусть Ω – множество всех QH_σ-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Определим на множестве Ω отношение частичного порядка следующим образом: если $f, \varphi \in \Omega$, то $f \leq \varphi$ в том и только в том случае, если $f(\sigma_i) \subseteq g(\sigma_i)$ для всех σ_i из σ. Наименьший элемент Ω будем называть наименьшей QH_σ-функцией класса Фиттинга.

Наименьшую нормально наследственную QH_σ-функцию класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ описывает следующая

Теорема 2.1. *Пусть $\mathfrak{F} = QLR_\sigma(\varphi)$ для некоторой нормально наследственной квазилокальной QH_σ-функции φ и $\Pi = Supp(\varphi)$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственной наименьшей нормально наследственной квазилокальной QH_σ-функцией f_0 такой, что*

$$f_0(\sigma_i) = \begin{cases} S_n\left(G \in \mathfrak{F} : G \cong X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}}(X \in \mathfrak{F})\right), \text{если } \sigma_i \in \Pi, \\ \emptyset, \text{если } \sigma_i \in \Pi'. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале докажем, что существует единственная минимальная QH_σ-функция. Пусть Ω – множество всех нормально наследственных квазилокальных QH_σ-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Обозначим через *f* пересечение всех элементов из множества Ω. Пусть класс групп

$$QLR_\sigma(f) = \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_i\in\Pi}\, f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}),$$

где $\Pi = Supp(\varphi)$. Покажем, что $QLR_\sigma(f) = \mathfrak{F}$. Обозначим через f_i, где $i \in I$, любую нормально наследственную QH_σ-функцию, которой обладает класс Фиттинга $\mathfrak{F}$,

т.е. $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_i\in\Pi}\, f_i(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'})$.

Покажем, что $QLR_\sigma(f) \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in QLR_\sigma(f)$. Тогда $G \in f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ для любого $\sigma_i \in \Pi$. По определению произведения классов групп в G существует нормальная подгруппа N такая, что $N \in$ $\in f(\sigma_i)$ и $G/N \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Пусть $N = \cap_{i\in I} N_i$. Так как $N \in f(\sigma_i)$ и $f(\sigma_i) = \cap_{i\in I} f_i(\sigma_i)$, то $N \in f_i(\sigma_i)$. Следовательно, $G \in f_i(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Отсюда вытекает, что $G \in \cap_{\sigma_i\in\Pi} f_i(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Тогда $G \in \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_i\in\Pi} f_i(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'})$ и поэтому $QLR_\sigma(f) \subseteq \mathfrak{F}$.

Докажем обратное включение $\mathfrak{F} \subseteq QLR_\sigma(f)$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{E}_\Pi \cap \left(\cap_{\sigma_i\in\Pi} f_i(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\right)$ и $G \in f_i(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ для любого $\sigma_i \in \Pi$. По определению произведения классов групп в G существует нормальная подгруппа N_i такая, что $N_i \in$ $\in f(\sigma_i)$ и $G/N_i \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Пусть $N = \cap_{i\in I} N_i$. Так как $N_i \in f(\sigma_i)$ и $f_i(\sigma_i)$ – нормально наследственный класс групп для всех $\sigma_i \in \Pi$, то $N \in f\,(\sigma_i)$. Но класс $\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ является формацией и $G/N_i \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Значит, $G/N \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Тогда по определению произведения классов групп следует, что $G \in$ $\in f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ для любого $\sigma_i \in \Pi$. Таким образом, $G \in \mathfrak{E}_\Pi \cap \left(\cap_{\sigma_i\in\Pi} f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\right) = QLR_\sigma(f)$. Следовательно, справедливо включение $\mathfrak{F} \subseteq QLR_\sigma(f)$.

Пусть g – произвольная нормально наследственная $\mathrm{Q}H_\sigma$-функция из Ω. Докажем, что $f(\sigma_i) \subseteq g(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \sigma$. Пусть $G \in f(\sigma_i)$. Так как $f(\sigma_i) = \cap_{i\in I} f_i(\sigma_i)$, то $G \in f_i(\sigma_i)$ для любого $i \in I$ и поэтому $g = f_{i_0}$ для некоторого $i_0 \in I$. Тогда $G \in g(\sigma_i)$. Отсюда следует, что $f \leq g$. Следовательно, $QLR_\sigma(f) \subseteq \mathfrak{F}$ и f определяет σ-квазилокально $\mathfrak{F}$.

Пусть f – наименьшая нормально наследственная $\mathrm{Q}H_\sigma$-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и f_0 такая квазилокальная $\mathrm{Q}H_\sigma$-функция, что

$$f_0(\sigma_i) = \begin{cases} S_n\left(G \in \mathfrak{F}\colon G \cong X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}(X \in \mathfrak{F})\right), \text{если } \sigma_i \in \Pi, \\ \emptyset, \text{если } \sigma_i \in \Pi'. \end{cases}$$

Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_i\in\Pi} f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'})$. Пусть класс групп $x(\sigma_i) = \left(G \in \mathfrak{F}\colon G \cong X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}(X \in \mathfrak{F})\right)$.

Докажем, что $x(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \Pi$. Пусть $G \in x(\sigma_i)$. Тогда по определению функции x существует группа $X \in \mathfrak{F}$ такая, что $G \cong X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}$. Так как $X \in \mathfrak{F}$, то $X \in f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Следовательно, по определению произведения классов групп существует нормальная подгруппа M группы X такая, что $M \in f(\sigma_i)$ и $X/M \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Итак, $X/M \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ и, значит, $X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \leq M$. Поскольку $X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \trianglelefteq M$, $M \in f(\sigma_i)$ и $f(\sigma_i) = S_n f(\sigma_i)$, $X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$. Тогда ввиду изоморфизма $G \cong X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}$ имеем $G \in$ $\in f(\sigma_i)$. Следовательно, $x(\sigma_i) \subseteq g(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \Pi$. Поскольку $f_0(\sigma_i) = S_n x(\sigma_i) \subset S_n f(\sigma_i) =$ $= f(\sigma_i)$, $\mathrm{QL}R_\sigma(f_0)$ является подклассом класса $\mathfrak{F}$.

Докажем обратное включение $\mathfrak{F} \subseteq QLR_\sigma(f_0)$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Очевидно, что $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \cong G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}$. По определению функции f_0 получаем $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in$ $\in x(\sigma_i) \subset f_0(\sigma_i)$. Далее $G/G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ и $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \trianglelefteq G$, причем $G/G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in f_0(\sigma_i)$. Следовательно, $G \in f_0(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ для любого $\sigma_i \in \Pi$.

Итак, $G \in \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_i\in\Pi} f_0(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'})$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_i\in\Pi} f_0(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'})$.

Тогда $\mathfrak{F} = \mathrm{QL}R_\sigma(f_0)$ и $f_0 = f$ – наименьшая из нормально наследственных $\mathrm{Q}H_\sigma$-функций класса $\mathfrak{F}$.

Теорема доказана.

3. Максимальные $\mathbf{Q}H_\sigma$-функции. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется D_0-*замкнутым*, если из $G_i \in \mathfrak{F}$ для любого $i = 1, \ldots, r$, следует $G_1 \times \ldots \times G_r \in \mathfrak{F}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ наследственен, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \leq G$, следует $N \in \mathfrak{F}$.

Опишем максимальную из наследственных D_0-замкнутых $\mathrm{Q}H_\sigma$-функций для класса $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ-нильпотентных групп. Обозначим множество $\Pi = Supp(f) = \{\sigma_i \in \sigma\colon f(\sigma_i) \neq \emptyset\}$.

Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{N}_\sigma$ – класс всех σ-нильпотентных групп и f – QH_σ-функция такая, что $f(\sigma_i) = Sf(\sigma_i)$ и $f(\sigma_i) = D_0 f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Тогда справедливо следующее включение:*

$$f(\sigma_i) \cap \mathfrak{N}_\sigma \subset \mathfrak{E}_{\sigma_i}$$

для всех $\sigma_i \in \Pi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем группу G минимального порядка такую, что $G \in (f(\sigma_i) \cap \mathfrak{N}_\sigma) \backslash \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для некоторого $\sigma_i \in \sigma$. Пусть U – произвольная собственная подгруппа из G. Так как G – σ-нильпотентная σ-группа и класс $f(\sigma_i)$ наследственен, то $U \in f(\sigma_i)$ и $U \in \mathfrak{N}_\sigma$. Следовательно, $U \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{N}_\sigma$ и, ввиду выбора G, $U \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Итак, произвольная группа U из G принадлежит $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$.

Так как G – σ-нильпотентная группа, то она представляется в виде прямого произведения своих холловых σ_i-подгрупп $G = U_1 \times \ldots \times U_s$, причем $U_1 \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}, \ldots, U_s \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Получили противоречие с выбором G. Значит в G нет собственных σ_i-подгрупп кроме единичной, то есть G – простая группа. Поэтому $G \cong A_{\sigma_i}$, где $\sigma_j \in \Pi \subset \mathbb{P}$ и $\sigma_j \neq \sigma_i$.

Далее положим $X = B_{\sigma_j} \wr A_{\sigma_i} = (B_{\sigma_j} \times \ldots \times B_{\sigma_j}) \rtimes A_{\sigma_i}$, где $X^* = B_{\sigma_j} \times \ldots \times B_{\sigma_j}$.

Так как A_{σ_i} – холлова σ_i-подгруппа группы X и A_{σ_i} не является нормальной подгруппой в X, то $X \notin \mathfrak{N}_\sigma$. Из свойств полупрямого произведения следует, что $X/X^* \cong A_{\sigma_i} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Но $G \cong B_{\sigma_j}$ и класс $f(\sigma_i)$ D_0-замкнут, поэтому $X^* \in f(\sigma_i)$. Тогда по определению произведения классов групп получим $X \in f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Так как $X/X^* \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $X^* = B_{\mathfrak{E}_{\sigma_j}}$, то $X \in \mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Но $\sigma_j \neq \sigma_i$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ – формация, следовательно, $\mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subset \mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'} \subset f(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$.

Итак, $\mathrm{X} \in f(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$. Возьмем σ_k из Π, причем $\sigma_k \neq \sigma_i$ и $\sigma_k \neq \sigma_j$. Далее $|X| = {\sigma_j}^{\sigma_i} \cdot \sigma_i$ и тогда $\mathrm{X} \in \mathfrak{E}_{\{\sigma_i,\sigma_j\}} \subseteq \mathfrak{E}_{\sigma_k'} \subseteq \mathfrak{E}_{\sigma_k}\mathfrak{E}_{\sigma_k'} \subseteq f(\sigma_k)\mathfrak{E}_{\sigma_k}\mathfrak{E}_{\sigma_k'}$. Следовательно, $\mathrm{X} \in f(\sigma_k)\mathfrak{E}_{\sigma_k}\mathfrak{E}_{\sigma_k'}$ для любого σ_k из Π, причем $\sigma_k \neq \sigma_i$ и $\sigma_k \neq \sigma_j$. Таким образом,

$$X \in f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \cap f(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'} \cap_{\substack{\sigma_k \neq \sigma_i,\sigma_j \\ \sigma_k \in \sigma}} f(\sigma_k)\mathfrak{E}_{\sigma_k}\mathfrak{E}_{\sigma_k'} = QLR_\sigma(f) = \mathfrak{N}_\sigma.$$

Получили противоречие с тем, что $X \notin \mathfrak{N}_\sigma$. Это завершает доказательство того, что $f(\sigma_i) \cap \mathfrak{N}_\sigma \subset$ $\subset \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$.

Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Класс Фиттинга $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ-нильпотентных групп определяется QH_σ-функцией f такой, что*

$$f(\sigma_i) = (G : G_{\mathfrak{N}_\sigma} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i})$$

для любого σ_i из Π.

При этом функция f является наибольшей из наследственных D_0-замкнутых QH_σ-функций класса $\mathfrak{N}_\sigma$ и для всех σ_i из Π справедливо равенство:

$$f(\sigma_i) = f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем вначале, что $f(\sigma_i)$ – наследственный класс групп для каждого σ_i из Π. По определению операции замыкания справедливо включение $f(\sigma_i) \subseteq Sf(\sigma_i)$.

Докажем обратное включение $Sf(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$. Пусть $G \in Sf(\sigma_i)$. По определению операции замыкания существует группа $K \in f(\sigma_i)$ такая, что $G \leq K$. По определению $\mathfrak{N}_\sigma$-радикала $K_{\mathfrak{N}_\sigma} \leq K$ и $G_{\mathfrak{N}_\sigma} \leq K$. Но $\mathrm{K} \in f(\sigma_i)$ и поэтому по теореме 3.1 $K_{\mathfrak{N}_\sigma}$ является σ_i-группой. Следовательно, класс $f(\sigma_i)$ наследственен для любого σ_i из Π.

По определению операции замыкания справедливо включение $f(\sigma_i) \subseteq D_0 f(\sigma_i)$.

Докажем обратное включение $D_0 f(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$. Пусть $G \in D_0 f(\sigma_i)$. Тогда в G существуют нормальные подгруппы G_i такие, что $G_i \in f(\sigma_i)$, где $i = 1,2, \ldots r$ и $G = G_1 \times \ldots \times G_r$. Покажем, что $G \in f(\sigma_i)$. Так как $\mathfrak{N}_\sigma$ – класс Локетта, то $G_{\mathfrak{N}_\sigma} = (G_1)_{\mathfrak{N}_\sigma} \times \ldots \times (G_r)_{\mathfrak{N}_\sigma}$. Но $G_i \in f(\sigma_i)$ и, следовательно, $(G_i)_{\mathfrak{N}_\sigma}$ является σ_i-группой для $i \in \{1,2, \ldots, r\}$. Значит $G_{\mathfrak{N}_\sigma}$ – σ-группа. Тогда $G \in f(\sigma_i)$ и $D_0 f(\sigma_i) \subseteq$ $\subseteq f(\sigma_i)$. Итак, класс $f(\sigma_i)$ D_0-замкнут для любого σ_i из Π.

Покажем теперь, что $f(\sigma_i) = f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для любого σ_i из Π.

По определению операции замыкания справедливо включение $f(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$.

Пусть группа $G \in f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Тогда по определению произведения классов групп существует нормальная подгруппа K группы G такая, что $K \in f(\sigma_i)$, причем $G/K \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Ввиду изоморфизма $G_{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}K/K \cong G_{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}/(G_{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \cap K)$ и леммы 1.1 получаем $G_{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}K/K \cong G_{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}/K_{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$. Но $G_{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}/K_{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Так как $K \in f(\sigma_i)$, то $K_{\mathfrak{N}_\sigma} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Тогда $G_{\mathfrak{N}_\sigma} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $G \in f(\sigma_i)$, что доказывает равенство $f(\sigma_i) = f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для любого σ_i из Π.

Докажем, что f является наибольшей из наследственных D_0-замкнутых σ-квазилокальных $\mathrm{Q}H_\sigma$-функций класса $\mathfrak{N}_\sigma$.

Пусть h – произвольная наследственная $\mathrm{Q}H_\sigma$-функция, определяющая класс $\mathfrak{N}_\sigma$. Покажем, что $h(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$ для некоторого σ_i из Π. Пусть $G \in h(\sigma_i)$. Так как $h(\sigma_i)$ – наследственный класс групп, то $G_{\mathfrak{N}_\sigma} \in h(\sigma_i)$ и $G_{\mathfrak{N}_\sigma} \in \mathfrak{N}_\sigma$. Значит $G_{\mathfrak{N}_\sigma} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i} \cap h(\sigma_i)$. По теореме 3.1 $h(\sigma_i) \cap \mathfrak{N}_\sigma \subseteq \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Значит $G_{\mathfrak{N}_\sigma} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Следовательно, $G \subseteq f(\sigma_i)$ и $h(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$ для любого σ_i из Π. Так как $h \leq f$, то $h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \subseteq f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ для любого σ_i из Π. Итак, $\mathfrak{N}_\sigma = \left(\cap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\right) \cap \mathfrak{N}_\sigma \subseteq QLR_\sigma(f)$.

Докажем включение $QLR_\sigma(f) \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$.

Выберем группу G минимального порядка такую, что $G \in QLR_\sigma(f)\backslash\mathfrak{N}_\sigma$. Тогда группа G комонолитична и ее комонолит $G_{\mathfrak{N}_\sigma}$. Так как $G \in f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$, то по определению произведения классов групп существует нормальная подгруппа N в G такая, что $N \in f(\sigma_i)$ и $G/N \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Поскольку подгруппа N нормальна в G, то по лемме 1.1 $G_{\mathfrak{N}_\sigma} \cap N = N_{\mathfrak{N}_\sigma}$. Ввиду того, что $G_{\mathfrak{N}_\sigma}$ – единственная максимальная подгруппа в G, получим $G_{\mathfrak{N}_\sigma} \cap N = N$. Итак, $N = N_{\mathfrak{N}_\sigma}$. Но $N \in f(\sigma_i)$, поэтому $N_{\mathfrak{N}_\sigma} \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Следовательно, $N \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ и поэтому $N < G_{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$. Так как $G/N \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ – формация, то ввиду изоморфизма $(G/N)/(G_{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}/N) \cong G/G_{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \subseteq \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$.Следовательно, $G \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ для любого σ_i из Π. Отсюда вытекает, что $G \in \cap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Итак, $G \in QLR_\sigma(f) = \mathfrak{N}_\sigma$. Получили противоречие с выбором G. Следовательно, $\mathfrak{N}_\sigma = QLR_\sigma(f)$.

Теорема доказана.

Следующая теорема доказана в универсуме $\mathfrak{S}_\sigma$ всех σ-разрешимых групп.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathfrak{F} = LR_\sigma(F)$ – локальный класс Фиттинга, определяемый канонической H_σ-функцией F и $Supp(F) = \Pi$. Тогда $\mathfrak{F}$ выражается наибольшей нормально наследственной σ-квазилокальной H-функцией f такой, что:*

$$f(\sigma_i) = \begin{cases} (G \mid G_{F(\sigma_i)} \text{ покрывает каждый } \mathfrak{F}\text{–центральный главный фактор } G), \text{ если } \sigma_i \in \Pi, \\ \emptyset, \text{ если } \sigma_i \in \Pi'. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем пошагово.

(1) Пусть $G \in \varphi(\sigma_i) = (G \mid G_{\mathfrak{F}} \in F(\sigma_i))$ для каждого $\sigma_i \in \Pi$. Покажем, что $f(\sigma_i) = \varphi(\sigma_i)$.

Очевидно, если $\sigma_i \notin \Pi$, то $\varphi(\sigma_i) = f(\sigma_i) = \emptyset$. Пусть $G \in \varphi(\sigma_i)$, где $\sigma_i \in \Pi$ и H/K – произвольный главный фактор группы G. Так как группа σ-разрешима, то фактор H/K σ-примарен, т.е. $|H/K|$ – σ_i-число. Тогда по лемме 1.2 H/K покрывает $G_{F(\sigma_i)}$. Действительно, поскольку F – полная приведенная H_σ-функция $F(\sigma_i) = F(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $G_{F(\sigma_i)} \leq G_{\mathfrak{F}}$ и поэтому $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$ группы G покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный σ_i-главный фактор G. Кроме того, так как $G_{\mathfrak{F}} \in F(\sigma_i)$, то $G_{\mathfrak{F}} \leq G_{F(\sigma_i)}$. Следовательно, $G_{\mathfrak{F}} = G_{F(\sigma_i)}$ и, таким образом, каждый $\mathfrak{F}$-центральный σ_i-главный фактор покрывается $G_{F(\sigma_i)}$. Это показывает, что $G \in f(\sigma_i)$ и поэтому $\varphi \leq f$.

Теперь докажем обратное $f \leq \varphi$.

Предположим, что $f(\sigma_i) \neq \varphi(\sigma_i)$ для некоторого $\sigma_i \in \Pi$ и пусть $G \in f(\sigma_i)\backslash\varphi(\sigma_i)$ и G – группа минимального порядка. Так как $G_{F(\sigma_i)} \leq G_{\mathfrak{F}}$ и $G \notin \varphi(\sigma_i)$, то $G_{F(\sigma_i)} < G_{\mathfrak{F}}$. Тогда существует некоторый σ_j-главный фактор H/K из G между $G_{F(\sigma_i)}$ и $G_{\mathfrak{F}}$ для некоторого $\sigma_j \in \Pi$. Согласно предположению, $G \in f(\sigma_i)\backslash\varphi(\sigma_i)$. Следовательно, $G_{\mathfrak{F}}$ покрывает H/K. Так как $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_j \in \Pi} F(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'})$, то $G_{\mathfrak{F}} \in F(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ и $G_{\mathfrak{F}} \in F(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$. Поскольку $F(\sigma_j) \subseteq \mathfrak{F}$, $G_{\mathfrak{F}}/(G_{\mathfrak{F}})_{F(\sigma_j)} = G_{\mathfrak{F}}/G_{F(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j'}$. По теореме Скибы [5] в любой σ-разрешимой группе существует σ_j-холловская подгруппа. Следовательно, каждая холловская σ_j-подгруппа S группы $G_{\mathfrak{F}}$ является холловской σ_j-подгруппой $G_{F(\sigma_j)}$. Тогда S покрывает H/K и поэтому $G_{F(\sigma_j)} = G_{F(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}}$ покрывает H/K. Следовательно, фактор H/K $\mathfrak{F}$-централен. Поскольку H/K – это главный фактор между $G_{F(\sigma_j)}$ и $G_{\mathfrak{F}}$, очевидно, что $G_{F(\sigma_j)}$ не покрывает H/K. Это противоречие завершает доказательство равенства $f = \varphi$.

(2) Теперь покажем, что σ-квазилокальная функция f полная и S_n-замкнута.

Так как $f = \varphi$, согласно первой части доказательства. Остается лишь доказать, что функция φ полная и S_n-замкнутая.

Сначала покажем, что функция φ является S_n-замкнутой. Предположим, что $X \in \varphi(\sigma_i)$ и $V \trianglelefteq X$. Тогда $X_{\mathfrak{F}} \in F(\sigma_i)$. По лемме 1.1 $N_{\mathfrak{F}} = N \cap X_{\mathfrak{F}} \in F(\sigma_i)$ и поэтому $N \in F(\sigma_i)$. Следовательно, $S_n\varphi(\sigma_i) \subseteq \subseteq \varphi(\sigma_i)$. Обратное включение, очевидно. Следовательно, функция φ нормально наследственна.

Теперь докажем, что $\varphi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} = \varphi(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Заметим, что $\Pi = Supp(F) = Supp(f) = = Supp(\varphi)$.

Если $\varphi(\sigma_i) = \emptyset$, тогда доказательство очевидно. Очевидно, что $\varphi(\sigma_i) \subseteq \varphi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Предположим, что $\varphi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} \neq \varphi(\sigma_i)$ и пусть G группа минимального порядка из класса $\varphi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\backslash \backslash\varphi(\sigma_i)$. Согласно выбору группы G в G имеется единственная максимальная нормальная подгруппа M такая, что $|G:M| = \sigma_i$.

Если $G \in \mathfrak{F}$, тогда $G \in F(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ и поэтому $G/G_{F(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Так как M – единственная максимальная нормальная подгруппа, то $G_{F(\sigma_i)} \leq M$. Следовательно, по теореме 1.3

$$(G/G_{F(\sigma_i)})/(M/G_{F(\sigma_i)}) \simeq G/M \in \mathfrak{N}_{\sigma_i} \cap \mathfrak{E}_{\sigma_i'} = (1),$$

Это противоречит тому, что G/M – нетривиальная σ_i-группа. Таким образом, $G \notin \mathfrak{F}$. Из этого следует, что $G_{F(\sigma_i)} \subseteq G_{\mathfrak{F}} \leq M$. Для того, чтобы показать, что $G \in \varphi(\sigma_i)$ достаточно доказать равенство $G_{\mathfrak{F}} = M_{\mathfrak{F}} = M_{F(\sigma_i)} = G_{F(\sigma_i)}$.

Покажем вначале, что $M_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$. Так как $G \notin \mathfrak{F}$, то $G_{\mathfrak{F}} < G$. По определению $\mathfrak{F}$-радикала $G_{\mathfrak{F}} = G$ тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{F}$. Таким образом, получили, что $G_{\mathfrak{F}} < M$, где M – единственная максимальная нормальная подгруппа группы G. По лемме 1.1 имеем $M_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \cap M = G_{\mathfrak{F}}$.

Далее покажем $M_{F(\sigma_i)} = G_{F(\sigma_i)}$. Из того, что $G_{F(\sigma_i)} \subseteq G_{\mathfrak{F}} \leq M$ следует $G_{F(\sigma_i)} \leq M$. Согласно лемме 1.1 $M_{F(\sigma_i)} = M \cap G_{F(\sigma_i)} = G_{F(\sigma_i)}$. Следовательно, $M_{F(\sigma_i)} = G_{F(\sigma_i)}$.

Наконец, что $M_{\mathfrak{F}} = M_{F(\sigma_i)}$. Так как $F(\sigma_i)$ – внутренняя H_σ-функция, $F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, по свойству $\mathfrak{F}$ -радикала $M_{F(\sigma_i)} \leq M_{\mathfrak{F}}$ и $G_{F(\sigma_i)} \leq G_{\mathfrak{F}} \leq M$. Из того, что $G \notin \varphi(\sigma_i)$ имеем $G_{\varphi(\sigma_i)} < G$. Отсюда $|G_{\varphi(\sigma_i)}| < |G|$.

Поскольку $G \in \varphi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. По определению произведения классов групп существует нормальная подгруппа K такая, что $K \in \varphi(\sigma_i)$ и $G/K \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Но M – единственная максимальная нормальная подгруппа. Следовательно, $M \in \varphi(\sigma_i)$ и $G/M \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Значит, $M \in \mathfrak{F}$. Поскольку $M \in \varphi(\sigma_i)$, $M_{\mathfrak{F}} \in \in F(\sigma_i)$. Тогда по лемме 1.1 $M_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \cap M \leq M_{F(\sigma_i)}$. Кроме того, $M_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq \mathrm{M}$ и $M_{\mathfrak{F}} \in F(\sigma_i)$. Следовательно,

$$M_{\mathfrak{F}} \leq M_{F(\sigma_i)}. \qquad \text{(I)}$$

По условию $F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда по свойству $\mathfrak{F}$-радикала

$$M_{F(\sigma_i)} \leq M_{\mathfrak{F}}. \qquad \text{(II)}$$

Исходя из (I) и (II) получаем равенство $M_{\mathfrak{F}} = M_{F(\sigma_i)}$.

Следовательно, равенство $G_{\mathfrak{F}} = G_{F(\sigma_i)}$ справедливо для всех $\sigma_i \in \Pi$. Согласно определению $\mathfrak{F}$-радикала $G_{\mathfrak{F}} = G_{F(\sigma_i)} \in F(\sigma_i)$. Значит, $G \in \varphi(\sigma_i)$ и $G_{\mathfrak{F}} \in F(\sigma_i)$. Получили противоречие с выбором группы G и это доказывает $G \in \varphi(\sigma_i)$.

Таким образом, $\varphi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq \varphi(\sigma_i)$ и $\varphi(\sigma_i) \subseteq \varphi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и справедливо равенство $\varphi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} = \varphi(\sigma_i)$.

Следовательно, функция φ является полной.

(3) Покажем, что $\mathfrak{F}$ – локально определяется функцией f , т.е. $\mathfrak{F} = QLR_\sigma(f)$, где $QLR_\sigma(f) = = \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'})$ и $\Pi = Supp(f)$.

Очевидно, $F(\sigma_i) \subseteq \left(G \middle| G_{\mathfrak{F}} \in F(\sigma_i)\right) = \varphi(\sigma_i) = f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Следовательно, $F \leq \varphi = f$ и поэтому $\mathfrak{F} \subseteq LR_\sigma(f)$. Теперь докажем, что $LR_\sigma(f) \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть G – группа минимального порядка из класса $LR_\sigma(f) \backslash \mathfrak{F}$. Тогда $G_{\mathfrak{F}}$ является единственной максимальной нормальной подгруппой группы G и $\left|G: G_{\mathfrak{F}}\right|$ – σ_i-число для некоторого $\sigma_i \in \Pi$. Так как $G \in LR_\sigma(f)$ и локальная QH_σ-функция f – полная согласно (2), $G \in f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i} = f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Тогда по определению произведения классов групп существует нормальная подгруппа K группы G такая, что $K \in f(\sigma_i)$ и $\frac{G}{K} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. В случае, если $K = G$, имеем $G \in f(\sigma_i)$. Следовательно, согласно (1) $G \in \varphi(\sigma_i)$. Поэтому $G_{\mathfrak{F}} \in F(\sigma_i)$ и $G \in F(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} = F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $K \neq G$. Поскольку $G_{\mathfrak{F}}$ – единственная максимальная нормальная подгруппа группы G, $K \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, по теореме 1.3 $(G/K)/(G_{\mathfrak{F}}/K) \simeq G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Значит $G/G_{\mathfrak{F}} \in$ $\in \mathfrak{N}_{\sigma_i} \cap G_{\sigma_i} = (1)$ и $G = G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Противоречие показывает, что $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$.

Теорема доказана.

Следствие 3.4. *Класс $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп может быть определен квазилокальной функцией такой, что $f(p) = (G|O_p(G)$ покрывает $\mathfrak{N}$-центральные главные факторы из $G)$, и $f(p) =$ $= (G|F(G) = O_p(G))$ для всех $p \in \mathbb{P}$.*

Если задано минимальное разбиение множества $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \sigma^1 = \left\{\{2\}, \{3\}, \ldots\right\}$, то $\mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}$ и поэтому справедливо

Следствие 3.5. *Класс Фиттинга $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп определяется QH-функцией f такой, что $f(p) = (G: G_{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{E}_p)$. При этом f является максимальной из нормально наследственных, QH_σ-функций класса $\mathfrak{N}$ и для всех $p \in \mathbb{P}$ справедливо равенство $f(p) = f(p)\mathfrak{E}_p$.*

Заключение. В работе описаны новые локальные задания классов Фиттинга, в частности минимальные и максимальные квазилокальные задания классов Фиттинга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p.
2. Gaschütz, W. Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups / W. Gaschütz // Notes in Pure Mathematics. – Canberra: Austral. Nat. Univ., 1979. – 100 p.
3. Hartley, B. On Fischer’s dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
4. Skiba, A.N. On σ-properties of finite groups I / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2014. – Vol. 4, № 21. – P. 89–96.
5. Skiba, A.N. On σ-properties of finite groups II / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2015. – Vol. 3, № 24. – P. 67–81.
6. Skiba, A.N. On σ-properties of finite groups III / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2016. – № 1(26). – P. 52–62.
7. Guo, W. On σ-local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob’ev // Journal of Algebra. – 2020. – Vol. 542. – P. 116–129.
8. Воробьев, Н.Т. О новых локальных заданиях классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев, В.Н. Загурский // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2003. – № 2. – С. 100–104.
9. Guo, W. On the theory of $\mathfrak{F}$-centrality of chief factors and $\mathfrak{F}$-hypercentre for Fitting classes / W. Guo, N.T. Vorob’ev // Jornal of Algebra. – 2011. – Vol. 344. – P. 386–396.

REFERENCES

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p.
2. Gaschütz, W. Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups / W. Gaschütz // Notes in Pure Mathematics. – Canberra: Austral. Nat. Univ., 1979. – 100 p.
3. Hartley, B. On Fischer’s dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
4. Skiba, A.N. On σ-properties of finite groups I / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2014. – Vol. 4, № 21. – P. 89–96.
5. Skiba, A.N. On σ-properties of finite groups II / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2015. – Vol. 3, № 24. – P. 67–81.
6. Skiba, A.N. On σ-properties of finite groups III / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2016. – № 1(26). – P. 52–62.
7. Guo, W. On σ-local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob’ev // Journal of Algebra. – 2020. – Vol. 542. – P. 116–129.
8. Vorobyev N.T., Zagurski V.N. *Vesnik VDU* [Journal of Vitebsk State University], 2003, 2, pp. 100–104.
9. Guo, W. On the theory of $\mathfrak{F}$-centrality of chief factors and $\mathfrak{F}$-hypercentre for Fitting classes / W. Guo, N.T. Vorob’ev // Jornal of Algebra. – 2011. – Vol. 344. – P. 386–396.

Поступила в редакцию 23.04.2024

Адрес для корреспонденции: e-mail: ntvorobyov@mail.ru – Воробьёв Н.Т.