ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 519.622.26+512.622.25
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-4-282-287

Поступило в редакцию 29.04.2024
Received 29.04.2024

А. В. Лебедев[1], Ю. В. Трубников[2], М. М. Чернявский[2]

[1]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь
[2]Витебский государственный университет имени П. М. Машерова, Витебск, Республика Беларусь

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАНТОВ И ОБЩИЕ КРАТНЫЕ КОРНИ ПОЛИНОМОВ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Аннотация. Доказано, что при наличии у полиномов f и g общего корня w кратности s для f и кратности p для g разложение в ряд Тейлора для результанта $R = R(f, g)(a, b)$ по переменным b (коэффициентам g) начинается со слагаемого порядка s, а разложение в ряд Тейлора для $R = R(f, g)(a, b)$ по переменным a (коэффициентам f) начинается со слагаемого порядка p и для соответствующих слагаемых ряда Тейлора получены явные формулы. На этой базе доказаны идейно отличные от известных результатов утверждения, связывающие высшие производные результантов и кратные общие корни.

Ключевые слова: корень полинома, результант, кратные корни, явные формулы

Для цитирования. Лебедев, А. В. Дифференцирование результантов и общие кратные корни полиномов / А. В. Лебедев, Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2024. – Т. 68, № 4. – С. 282–287. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-4-282-287

Andrei V. Lebedev[1], Yurii V. Trubnikov[2], Mikhail M. Chernyavsky[2]

[1]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus
[2]Vitebsk State University named after P. M. Masherov, Vitebsk, Republic of Belarus

DIFFERENTIATION OF RESULTANTS AND COMMON MULTIPLE ROOTS OF POLYNOMIALS

(Communicated by Corresponding Member Valentin V. Gorokhovik)

Abstract. In the article it is proven that once polynomials f and g possess a common root w of multiplicity s for f and multiplicity p for g, the Taylor series expansion for their resultant $R = R(f, g)(a, b)$ in variables b (coefficients g) starts with the summand of order s, and the Taylor series expansion for $R = R(f, g)(a, b)$ in variables a (coefficients f) starts with the summand of order p; and the explicit formulas for the corresponding summands of the Taylor series are obtained. Based on this, a number of results linking higher derivatives of resultants and multiple common roots of polynomials, which differ in ideas from the well-known ones, are obtained.

Keywords: root of a polynomial, resultant, multiple roots, exact formulas

For citation. Lebedev A. V., Trubnikov Yu. V., Chernyavsky M. M. Differentiation of resultants and common multiple roots of polynomials. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2024, vol. 68, no. 4, pp. 282–287 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-4-282-287

Известным математическим инструментом для обнаружения общих корней пар полиномов являются результанты. Для пары полиномов f и g их результант $R(f, g)$ – функция от их коэффициентов (подробное определение см. в разделе 1). Нули результанта $R(f, g)$ соответствуют наборам коэффициентов f и g таким, что f и g имеют общий корень. При этом вычисление этого общего корня является отдельной проблемой. Получение явных формул, выражающих значения общих корней полиномов через коэффициенты, до конца XX в. представляло собой трудную задачу, поскольку в большинстве своем требовало объемных аналитических промежуточных вычислений, не поддававшихся ручному счету. Относительно новым подходом в данном направлении является выражение значения общего единственного корня в терминах частных производных от результантов. Среди авторитетных работ по теории алгебраических уравнений, где можно найти сведения о вычислении единственного общего простого корня двух полиномов, необходимо отметить монографию И. М. Гельфанда, М. М. Капранова и А. В. Зелевинского [1, глава 3, глава 12] (см. предложение 1 настоящего сообщения). При этом авторы [1] подчеркивают, что, по их мнению, наиболее прозрачное общее доказательство этих результатов достигается использованием теории двойственности для проективных многообразий [1, с. 400].

В настоящем сообщении получены явные формулы для высших производных от результантов многочленов, обладающих общими корнями. На этой базе доказаны идейно отличные от предложения 1 утверждения, связывающие высшие производные результантов и кратные общие корни.

1. Результанты и общие корни пар многочленов. *1.1. Результант.* Здесь приведены необходимые для дальнейшего изложения определения и свойства результанта. Подробности см. в [2, § 54].

Пусть $f(z) := \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a_0 \neq 0)$ и $g(z) := \sum_{j=0}^{m} b_j z^{m-j}$ $(b_0 \neq 0)$ – два многочлена, имеющие корни $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ и $\{\beta_j\}_{j=1}^{m}$ соответственно. *Результантом* многочленов f и g называется произведение

$$R(f, g) \; := \; a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j).$$

Многочлены f и g используются в определении результанта не симметричным образом. Очевидно,

$$R(g, f) = (1)^{mn} R(f, g).$$

Если многочлены f и g имеют хотя бы один общий корень, то значение результанта, составленного из них, равно нулю.

Так как $f(z) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i)$, $\quad g(z) = b_0 \prod_{j=1}^{m} (z - \beta_j)$, то их результант $R(f, g)$ можно представить в виде

$$R(f, g) = a_0^m g(\alpha_1) g(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot g(\alpha_n) = (-1)^{mn} b_0^n f(\beta_1) f(\beta_2) \cdot \ldots \cdot f(\beta_m). \tag{1}$$

Известно также, что результант можно представить в виде следующего определителя, который иногда называют *формулой Сильвестра*, или *результантом в форме Сильвестра*

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & & \\ & a_0 & a_1 & \ldots & a_n & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_m & & \\ & b_0 & b_1 & \ldots & b_m & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & b_0 & b_1 & \ldots & b_m \end{vmatrix}. \tag{2}$$

В данном определителе m строк с коэффициентами полинома $f(z)$ и n строк с коэффициентами полинома $g(z)$. В ячейках определителя, где оставлены пустые поля, подразумеваются нули.

Формула (2) естественным образом приводит нас к рассмотрению результанта, как функции от коэффициентов многочленов f и g, т. е. $R(f, g)(a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m)$. Именно в таком смысле мы будем понимать результант в данной работе.

1.2. Результанты и кратные общие корни многочленов. В монографии И. М. Гельфанда, М. М. Капранова и А. В. Зелевинского [1] доказано следующее утверждение (вытекающее из следствия 3.7 [1, с. 109]).

П р е д л о ж е н и е 1. *Если полиномы*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

и

$$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m$$

имеют ровно один простой общий корень w, то тогда w можно найти явно из соотношений

$$(w^n : w^{n-1} : w^{n-2} : \ldots : w : 1) = \left(\frac{\partial R(f,g)}{\partial a_0} : \frac{\partial R(f,g)}{\partial a_1} : \ldots : \frac{\partial R(f,g)}{\partial a_n} \right), \tag{3}$$

$$(w^m : w^{m-1} : w^{m-2} : \ldots : w : 1) = \left(\frac{\partial R(f,g)}{\partial b_0} : \frac{\partial R(f,g)}{\partial b_1} : \ldots : \frac{\partial R(f,g)}{\partial b_m} \right), \tag{4}$$

где $R(f, g)$ – результант полиномов $f(x)$ и $g(x)$.

В [1] (3) и (4) получаются из интерпретации результанта в теории двойственности алгебраических многообразий и авторы [1] подчеркивают, что, на их взгляд, это доказательство наиболее прозрачно (см. обсуждение [1, с. 400]).

Для выполнения соотношений (3) и (4) принципиально важно, чтобы общий корень был только один и чтобы он не являлся кратным для какого-то из полиномов. Здесь можно привести пример $f(x) = (x-1)^3$, $g(x) = (x-1)^2$, где все частные производные первого порядка $\frac{\partial R(f,g)}{\partial a_i}$, $i = 0, 1, 2, 3;$ $\frac{\partial R(f,g)}{\partial b_j}$, $j = 0, 1, 2,$ равны нулю.

Описанию эффектов, возникающих в таких ситуациях, посвящен данный раздел.

Рассмотрим многочлены $f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i} (a_0 \neq 0)$ и $g(z) := \sum_{j=0}^{m} b_j z^{m-j} (b_0 \neq 0).$ В соответствии с (1) запишем результант $R(f, g)$ в виде

$$R(f,g) := R = a_0^m g_1 g_2 \cdot \ldots \cdot g_{n-1} g_n,$$

где

$$g_i \equiv g(z_i) = b_0 z_i^m + b_1 z_i^{m-1} + \ldots + b_{m-1} z_i + b_m = \sum_{j=0}^{m} b_j z_i^{m-j} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

– значение многочлена g на i-м корне многочлена f (z_i, $i = 1, \ldots, n$, – корни f).

Кроме того, опять-таки в соответствии с (1)

$$R(f,g) = (-1)^{mn} b_0^n f_1 \cdot \ldots \cdot f_m, \tag{6}$$

где

$$f_i \equiv f(y_i) = a_0 y_i^n + a_1 y_i^{n-1} + \ldots + a_{n-1} y_i + a_n = \sum_{j=0}^{n} a_j y_i^{n-j} \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{7}$$

– значение многочлена f на i-м корне многочлена g (y_i, $i = 1, \ldots, m$, – корни g).

Нашим первым наблюдением является следующее утверждение.

Л е м м а. *Пусть $z_1 = w$ является корнем для многочлена* $f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a_0 \neq 0)$ (z_i, $i = 1, \ldots, n$, – корни f) *и пусть $w = y_1$ также является корнем многочлена* $g(z) = \sum_{j=0}^{m} b_j z^{m-j}$ $(b_0 \neq 0)$ (y_i, $i = 1, \ldots, m$, – корни g). *Тогда для результанта $R := R(f,g)$ имеют место равенства*

$$\frac{\partial R}{\partial b_j} = a_0^m w^{m-j} \prod_{i=2}^{n} g_i, \quad j = 0, \ldots, m;$$

где g_i заданы формулой (5);

$$\frac{\partial R}{\partial a_j} = (-1)^{mn} b_0^n w^{n-j} \prod_{i=2}^{m} f_i, \quad j = 0, \ldots, n;$$

где f_i заданы формулой (7).

Из леммы можем получить следующее уточнение предложения 1.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть* $f(z)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a_0 \ne 0, a_n \ne 0)$ *и* $g(z)=\sum_{j=0}^{m} b_j z^{m-j}$ $(b_0 \ne 0,\ b_m \ne 0)$. *Для того чтобы w был единственным однократным общим корнем полиномов f и g необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:*

1) $R(f,g)=0$;

2) $\dfrac{\partial R}{\partial b_m} \ne 0,\ \dfrac{\partial R}{\partial a_n} \ne 0.$

При этом w удовлетворяет соотношениям (3) и (4).

Следующее утверждение описывает высшие производные результантов от многочленов, имеющих кратные общие корни.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $z_1 = z_2 = \ldots = z_s = w$ *– корень кратности, как минимум,* s $(2 \le s < n)$ *для многочлена* $f(z)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a_0 \ne 0)$ *(здесь* z_i, $i = 1, \ldots, n$, *–* корни f*). Пусть w также является корнем многочлена* $g(z)=\sum_{j=0}^{m} b_j z^{m-j}$ $(b_0 \ne 0)$. *Тогда для результанта* $R = R(f, g)$ *имеют место следующие равенства:*

1) для $1 \le r < s$

$$\frac{\partial^r R}{\partial b_{j_r} \ldots \partial b_{j_1}} = 0 \ \ (j_k = 0,1,\ldots,m); \tag{8}$$

2)

$$\frac{\partial^s R}{\partial b_{j_s} \ldots \partial b_{j_1}} = a_0^m s!\, w^{sm-(j_s+\ldots+j_1)} \prod_{i=s+1}^{n} g_i \ \ (j_k = 0,1,\ldots,m), \tag{9}$$

где g_i *заданы формулой (5).*

Если $s = n$, *т.* е. $f(z)=a_0(z-w)^n$, *то для* $r < n$ *выполняется равенство (8) и*

$$\frac{\partial^n R}{\partial b_{j_n} \ldots \partial b_{j_1}} = a_0^m n!\, w^{nm-(j_n+\ldots+j_1)} \ (j_k = 0,1,\ldots,m).$$

Если в теореме 1 мы заменим местами полиномы f и g, то, с учетом (6) и (7), получим следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть* $y_1 = y_2 = \ldots = y_s = w$ *– корень кратности, как минимум,* $p\,(2 \le p < m)$ *для многочлена* $g(z)=\sum_{j=0}^{m} b_j z^{m-j}$ $(b_0 \ne 0)$ *(здесь* y_j, $j = 1, \ldots, m$ *– корни g). Пусть w также является корнем многочлена* $f(z)=\sum_{i=}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a \ \ \ne 0)$. *Тогда для результанта* $R = R(f, g)$ *имеют место следующие равенства:*

1) для $1 \le r < p$

$$\frac{\partial^r R}{\partial a_{i_r} \ldots \partial a_{i_1}} = 0 \ \ \left(i_k = 0,1,\ldots,n\right); \tag{10}$$

2)

$$\frac{\partial^p R}{\partial a_{i_p} \ldots \partial a_{i_1}} = (-1)^{mn} b_0^n p!\, w^{pn-(i_p+\ldots+i_1)} \prod_{j=p+1}^{m} f_j \ \ (i_k = 0,1,\ldots,n), \tag{11}$$

где f_j *заданы формулой (7).*

Если $p = m$, *т. е.* $g(z)=b_0(z-w)^m$, *то для* $r < m$ *выполняется равенство (10) и*

$$\frac{\partial^m R}{\partial a_{i_m} \ldots \partial a_{i_1}} = b_0^n m!\, w^{nm-(i_m+\ldots+i_1)} \ \ (i_k = 0,1,\ldots,n).$$

В качестве следствия из данных наблюдений мы можем сразу получить обобщение предложения 1 на случай общих кратных корней двух многочленов.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $f(z)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a_0 \neq 0, a_n \neq 0)$ *и* $g(z)=\sum_{j=0}^{m} b_j z^{m-j}$ $(b_0 \neq 0,\ b_m \neq 0)$. *Если многочлены f и g имеют ровно один общий корень w кратности s для f и кратности p для g, то тогда w удовлетворяет соотношениям*

$$\frac{\partial^s R}{\partial b_{j_s} \dots \partial b_{j_1}} : \frac{\partial^s R}{\partial b_{k_s} \dots \partial b_{k_1}} = w^{(k_s+\dots+k_1)-(j_s+\dots+j_1)} \quad (j_r, k_r = 0, 1, \dots, m) \tag{12}$$

и

$$\frac{\partial^p R}{\partial a_{i_p} \dots \partial a_{i_1}} : \frac{\partial^p R}{\partial a_{l_p} \dots \partial a_{l_1}} = w^{(l_p+\dots+l_1)-(i_p+\dots+i_1)} \quad (i_r, l_r = 0, 1, \dots, n). \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношения (12) вытекают непосредственно из формул (9) с учетом того, что в рассматриваемой ситуации $\prod_{i=s+1}^{n} g_i \neq 0$; а соотношения (13) вытекают из (11) с учетом того, что в рассматриваемой ситуации $\prod_{j=p+1}^{m} f_j \neq 0$.

2. Тейлоровское разложение результантов и общие корни пар полиномов. Результаты предыдущего раздела показывают, что при наличии общих корней у пар полиномов производные их результантов принимают довольно специальный вид. В данном разделе мы запишем эти результаты в соответствующих терминах.

Напомним, что для функции *F*: $\mathbb{C}^p \to \mathbb{C}$ $(p = 1, 2, \dots)$ ее производная порядка *s* $F^{(s)}$ (s = 1, 2, …) – это s-линейная функция, задаваемая семейством частных производных

$$F^{(s)} \leftrightarrow \left[\frac{\partial^s F}{\partial z_{i_s} \dots \partial z_{i_1}} \right], \quad i_r = 1, \dots, p.$$

Если $F(a, b)$, $a = (a_0, \dots, a_n)$, $b = (b_0, \dots, b_m)$ – функция от $(n+1)+(m+1)$ переменных, то через $F_a^{(s)}$ мы обозначаем ее частную производную порядка *s* по переменным *a* и, соответственно, через $F_b^{(s)}$ обозначаем ее частную производную порядка *s* по переменным *b*. Положим также, как обычно, $F^{(0)} = F_a^{(0)} = F_b^{(0)} = F$.

В этих терминах можно единообразно записать полученные в разделе 1.2 результаты (лемму, теорему 1 и предложение 3).

Т е о р е м а 3. *Пусть* $f(z)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a_0 \neq 0)$ *и* $g(z)=\sum_{j=0}^{m} b_j z^{m-j}$ $(b_0 \neq 0)$. *Если f и g имеют общий корень w и, при этом,* $w = z_1 = z_2 = \dots = z_s$ *– корень кратности s* $(1 \le s < n)$ *для f, и* $w = y_1 = y_2 = \dots = y_p$ *– корень кратности p* $(1 \le p < m)$ *для g, то для результанта* $R = R(f, g)(a, b)$ $a = (a_0, \dots, a_n)$, $b = (b_0, \dots, b_m)$ *имеют место следующие равенства*

1) для $0 \le r < s$

$$R_b^{(r)} = 0;$$

для $0 \le r < p$

$$R_a^{(r)} = 0.$$

2)

$$R_b^{(s)} = a_0^m s! \prod_{i=s+1}^{n} g_i [w^{sm-(j_s+\dots+j_1)}], \tag{14}$$

где g_i заданы формулой (5);

3)

$$R_a^{(p)} = (-1)^{mn} b_0^n p! \prod_{j=p+1}^{m} f_j [w^{pn-(i_p+\dots+i_1)}], \tag{15}$$

где f_j заданы формулой (7).

Если s = n, т. е. $f(z)=a_0(z-w)^n$, *то вместо (14) имеем*

$$R_b^{(n)}=a_0^m n![w^{nm-(j_n+\ldots+j_1)}],$$

если p = m, т. е. $g(z)=b_0(z-w)^m$, *то вместо (15) имеем*

$$R_a^{(m)}=(-1)^{mn}b_0^n m![w^{nm-(i_m+\ldots+i_1)}].$$

Иными словами, при наличии у полиномов f и g общего корня w кратности s для f и кратности p для g разложение в ряд Тейлора для результанта $R=R(f,g)(a,b)$ по переменным b (коэффициентам g) начинается со слагаемого порядка s, а разложение в ряд Тейлора для $R=R(f,g)(a,b)$ по переменным a (коэффициентам f) начинается со слагаемого порядка p и соответствующие слагаемые ряда Тейлора описываются явно.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф23М-003).

Acknowledgements. The study was carried out with financial support from the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. Ф23М-003).

Список использованных источников

1. Gelfand, I. M. Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants / I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky. – Boston, 1994. – 528 p.

2. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры: учеб. / А. Г. Курош. – 19-е изд., стереотип. – СПб., 2013. – 432 с.

References

1. Gelfand I. M. Kapranov M. M., Zelevinsky A. V. *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*. Boston, 1994. 528 p.

2. Kurosh A. G. *Higher Algebra course*. 19-th edition. Saint Petersburg, 2013. 432 p. (in Russian).

Информация об авторах

Лебедев Андрей Владимирович – д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220050, Минск, Республика Беларусь). E-mail: lebedev@bsu.by.

Трубников Юрий Валентинович – д-р физ.-мат. наук, профессор. Витебский государственный университет им. П. М. Машерова (пр. Московский, 33, 210038, Витебск, Республика Беларусь). E-mail: yurii_trubnikov@mail.ru.

Чернявский Михаил Михайлович – ст. преподаватель. Витебский государственный университет им. П. М. Машерова (пр. Московский, 33, 210038, Витебск, Республика Беларусь). E-mail: misha360ff@mail.ru.

Information about the authors

Lebedev Andrei V. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220050, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lebedev@bsu.by.

Trubnikov Yurii V. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Vitebsk State University named after P. M. Masherov (33, Moskovskiy Ave., 210038, Vitebsk, Republic of Belarus). E-mail: yurii_trubnikov@mail.ru.

Chernyavsky Mikhail M. – Senior Lecturer. Vitebsk State University named after P. M. Masherov (33, Moskovskiy Ave., 210038, Vitebsk, Republic of Belarus). E-mail: misha360ff@mail.ru.